Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2020, 9(9), 1534-1539
Published Online September 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2020.99180

Hans汉斯

Delannoy类矩阵的行多项式的根

邢媛媛，林佳倩

辽宁师范大学数学学院，辽宁 大连
Email: xyy-yy@outlook.com, 1741972903@qq.com

收稿日期：2020年8月29日；录用日期：2020年9月15日；发布日期：2020年9月22日

摘 要

本文证明了Delannoy类矩阵的行多项式 $d_n(x)=\sum_{k=0}^{m} d(n,k)x^k$ 的根是实根的，其全部实根在开区间 $\left(-\left(\sqrt{e+h}+\sqrt{h}\right)^2,-\left(\sqrt{e+h}-\sqrt{h}\right)^2\right)$ 内且在对应闭区间上稠密。

关键词

Delannoy类矩阵，行多项式，根

The Zeros of Row Polynomials of Delannoy-Like Matrix

Yuanyuan Xing, Jiaqian Lin

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning
Email: xyy-yy@outlook.com, 1741972903@qq.com

Received: Aug. 29th, 2020; accepted: Sep. 15th, 2020; published: Sep. 22nd, 2020

Abstract

In this paper, we show that the zeros of row polynomials $d_n(x)=\sum_{k=0}^{m} d(n,k)x^k$ of Delannoy-like matrix are real in the open interval $\left(-\left(\sqrt{e+h}+\sqrt{h}\right)^2,-\left(\sqrt{e+h}-\sqrt{h}\right)^2\right)$ and are dense in the corresponding closed interval.

文章引用: 邢媛媛, 林佳倩. Delannoy 类矩阵的行多项式的根[J]. 应用数学进展, 2020, 9(9): 1534-1539.
DOI: 10.12677/aam.2020.99180

Keywords

Delannoy-Like Matrix, Row Polynomial, Zeros

1. 引言

Delannoy 数 $d(n,k)$ 是计数从 $(0,0)$ 到 (n,k) 且只走上步 $(0,1)$、下步 $(1,0)$ 和对角步 $(1,1)$ 的格路数。Delannoy 矩阵 $D=\left[t_{n,k}\right]_{n,k\ge 0}$，其中元素 $t_{n,k}=d(n-k,k)$，则 D 是无限下三角矩阵，即当 $n\ge k\ge 0$ 时 $t_{n,k}=0$ 且元素满足递归关系

$$t_{n,k}=t_{n-1,k-1}+t_{n-1,k}+t_{n-2,k-1},$$

其中 $t_{0,0}=1$。

Delannoy 类矩阵定义为 $D(e,h)=\left[d_{n,k}\right]_{n,k\ge 0}$，见图 1。

$$D(e,h)=\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ e & 1+e+h & 1 & & \\ e^2 & e^2+2e+eh+h & 1+2e+2h & 1 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots \end{bmatrix}$$

Figure 1. Delannoy-like matrix
图 1. Delannoy 类矩阵

其中元素满足递归关系 $d_{n,k}=d_{n-1,k-1}+ed_{n-1,k}+hd_{n-2,k-1}$，$d_{0,0}=d_{1,0}=d_{1,1}=1$，$e,h$ 是非负数，则 $D(e,h)$ 为无限下三角矩阵，即当 $n\ge k\ge 0$ 时有 $d_{n,k}=0$。Delannoy 类矩阵包含组合学中许多常见的矩阵，如 Delannoy 矩阵 $D(1,1)$，Pascal 矩阵 $D(1,0)$，Fibonacci 矩阵 $D(0,1)$。Delannoy 类矩阵具有很多的组合性质，例如 Delannoy 类矩阵具有全正性，当一个矩阵的所有子式都非负，则该矩阵为全正矩阵[1]。Delannoy 类矩阵的每一行和对角行都是 PF 序列，若一个无限非负序列 $(a_n)_{n\ge 0}$ 的 Toeplize 矩阵 $T=\left[a_{i-j}\right]_{i,j\ge 0}$ 是全正的，则 $(a_n)_{n\ge 0}$ 是 PF 序列(详见[1])。关于 Delannoy 矩阵和 Pascal 矩阵的行多项式的实根性已被广泛研究(读者可参考[2] [3])。本文从 Delannoy 类矩阵角度统一给出这类矩阵的行多项式实根性的证明并给出根的稠密区间。

2. Delannoy 类矩阵的行多项式的根

定义 2.1 定义 $d_n(x)=\sum_{k=0}^{n}d(n,k)x^k, n=0,1,2,\cdots$ 是 Delannoy 类矩阵的行多项式，则 $d_n(x)$ 满足下列递归关系

$$d_n(x)=(e+x)d_{n-1}(x)+hxd_{n-2}(x), \tag{2.1}$$

其中 $d_0(x)=1, d_1(x)=e+x$。

定义 2.2 假设 $f,g\in RZ$。令 $\{r_i\}$ 和 $\{s_j\}$ 分别是 f 和 g 的根的非增序列。如果 $\deg f=\deg g=n$，

$$s_n\le r_n\le s_{n-1}\le\cdots\le s_2\le r_2\le s_1\le r_1,$$

我们称 g 交替 f 的左边(简称 g 交替 f)。若果 $\deg f=\deg g+1=n$，

$$r_n\le s_{n-1}\le\cdots\le s_2\le r_2\le s_1\le r_1,$$

我们称 g 交错 f。将 g 交替 f 或者 g 交错 f 记为 $g\preceq f$。

在给出 $d_n(x)$ 实根性之前，我们需要下面判断实根性的重要引理。

引理 2.3 [4]令 F,f,g 是三个实多项式，且满足下面条件

a) $F(x)=a(x)f(x)+b(x)g(x)$，其中 $a(x),b(x)$ 是两个实多项式，有 $\deg F=\deg f$ 或 $\deg f+1$。

b) $f,g\in RZ,g\preceq f$。

c) F 与 g 有相同的首项系数。

假设当 $f(r)=0$ 时 $b(r)\le 0$，则有 $F\in RZ,f\preceq F$。

定理 2.4 设 $r_{n-1,i}$ 和 $r_{n,i}$ 分别是多项式 $d_{n-1}(x),d_n(x)$ 的根。$d_n(x)$ 的根均为实根且 $d_{n-1}(x)$ 的根严格交替于 $d_n(x)$ 的根，即

$$r_{n,1}<r_{n-1,1}<r_{n,2}<\cdots<r_{n,n-1}<r_{n-1,n-1}<r_{n,n}.$$

证明：由(2.1)递归关系

$$d_n(x)=(e+x)d_{n-1}(x)+hxd_{n-2}(x)\,(n\ge 2),$$

$d_0(x)=1,d_1(x)=e+x$ 知

$$\deg d_n(x)=\deg d_{n-1}(x)+1.$$

下面用归纳假设证明 $d_n(x)$ 只有实根且 $d_{n-1}(x)\preceq d_n(x)$。

由

$$d_1(x)=e+x,$$

$$d_2(x)=e^2+(2e+h)x+x^2.$$

解得其根分别为

$$r_{1,1}=-e,$$

$$r_{2,1}=-\frac{(2e+h)+\sqrt{(2e+h)^2-4e^2}}{2},$$

$$r_{2,2}=-\frac{(2e+h)-\sqrt{(2e+h)^2-4e^2}}{2},$$

均为实根且满足 $r_{2,1}<r_{1,1}<r_{2,2}$，即 $d_1(x)\preceq d_2(x)$。现假设 $k<n$ 时 $d_k(x)$ 的根均为实的且 $d_{n-2}(x)\preceq d_{n-1}(x)$。易知 $d_n(x)$ 与 $d_{n-2}(x)$ 的首项系数相同。$d_{n-1}(x)$ 的各项系数均为正，故 $d_{n-1}(x)=0$ 的根全为负数，即 $r_{n-1,k}<0$。因为 $h>0$，所以 $b(r_{n-1,k})=hr_{n-1,k}<0$。由引理 2.3 从而有 $d_n(x)$ 的根为实根且 $d_{n-1}(x)\preceq d_n(x)$。□

以上证明了 $d_n(x)$ 的实根性，下面我们给出根的存在区间及在对应的闭区间上稠密的证明。在证明之前，先来介绍一下相关的定义及引理。

定义 2.5 假设 $(f_n(x))_{n\ge 0}$ 为一个复多项式序列。若存在一个序列 $(z_n)_{n\ge 0}$ 使得 $f_n(z_n)=0$ 并且当 $n\to+\infty$ 有 $z\to x$ 成立，则我们称复数 x 为多项式序列 $(f_n(x))_{n\ge 0}$ 的零点的极限。

引理 2.6 [5]在非退化的情况下，$f_n(x)=\sum_{j=1}^{k}a_j(x)\lambda_j^n(x)$ 中的任意一个 $a_j(x)$ 都不恒为零多项式且使得对于一些单位模的 $\omega\in\mathbb{C}$ 有 $\lambda_i(x)=\omega\lambda_j(x)$ 成立的 i 与 $j(i\neq j)$ 不存在。则 x 为 $(f_n(x))_{n>0}$ 的零点的极限当且仅当

i) 至少有两个 $\lambda_j(x)$ 是模相等的且严格大于其余 $\lambda_i(x)$ 的模；或者

ii) 对于一些 j，$\lambda_j(x)$ 的模严格大于其余 $\lambda_i(x)$ 的模且 $a_j(x)=0$。

引理 2.7 [6]令 $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R},n\in\mathbb{N}$。

i) 若 n 为奇数，

$$\lambda_1^n-\lambda_2^n=(\lambda_1-\lambda_2)\prod_{s=1}^{\frac{n-1}{2}}\left[(\lambda_1+\lambda_2)^2-4\lambda_1\lambda_2\cos^2\frac{s\pi}{n}\right].$$

ii) 若 n 为偶数，

$$\lambda_1^n-\lambda_2^n=(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1+\lambda_2)\prod_{s=1}^{\frac{n-1}{2}}\left[(\lambda_1+\lambda_2)^2-4\lambda_1\lambda_2\cos^2\frac{s\pi}{n}\right].$$

定理 2.8 Delannoy 类矩阵多项式的根都是实互异的，在区间 $\left(-\left(\sqrt{e+h}+\sqrt{h}\right)^2,-\left(\sqrt{e+h}-\sqrt{h}\right)^2\right)$ 内，且在闭区间上稠密。

证明：由定理 2.4 知，$d_n(x)$ 只有实根。由(2.1)式知其特征多项式为

$$\lambda^2-(e+x)\lambda-hx=0.$$

则可得到 $d_n(x)$ 的 Binet 形式如下，

$$d_n(x)=\frac{\lambda_1^{n+1}-\lambda_2^{n+1}}{\lambda_1-\lambda_2},$$

这里

$$\lambda_{1,2}=\frac{e+x\pm\sqrt{(e+x)^2+4hx}}{2} \tag{2.2}$$

是特征方程 $\lambda^2-(e+x)\lambda-hx=0$ 的特征根且 $\lambda_1+\lambda_2=e+x,\lambda_1\lambda_2=-hx$。我们对 n 进行讨论，因为 n 为偶数与 n 为奇数的情况结果相同，现只对 n 为偶数进行分析。由引理 2.7 知，$n+1$ 为奇数时，有

$$\lambda_1^{n+1}-\lambda_2^{n+1}=(\lambda_1-\lambda_2)\prod_{k=1}^{\frac{n}{2}}\left[(\lambda_1+\lambda_2)^2-4\lambda_1\lambda_2C_k^2\right],$$

其中 $C_k=\cos\dfrac{k\pi}{n+1}$。所以

$$d_n(x)=\frac{\lambda_1^{n+1}-\lambda_2^{n+1}}{\lambda_1-\lambda_2}=\prod_{k=1}^{\frac{n}{2}}\left[(e+x)^2+4hxC_k^2\right].$$

不难得到

$$\left[x+\left(\sqrt{e+hC_k^2}+\sqrt{h}C_k\right)^2\right]\left[x+\left(\sqrt{e+hC_k^2}-\sqrt{h}C_k\right)^2\right]=(e+x)^2+4hxC_k^2,$$

即

$$d_n(x)=\prod_{k=1}^{\frac{n}{2}}\left[x+\left(\sqrt{e+hC_k^2}+\sqrt{h}C_k\right)^2\right]\left[x+\left(\sqrt{e+hC_k^2}-\sqrt{h}C_k\right)^2\right].$$

因为 $C_{n+1-k}=-C_k$，故

$$d_n(x)=\prod_{k=1}^{n}\left[x+\left(\sqrt{e+hC_k^2}+\sqrt{h}C_k\right)^2\right].$$

则 $d_n(x)$ 的 n 个根为

$$r_{n,k}=-\left(\sqrt{e+hC_k^2}+\sqrt{h}C_k\right)^2, k=1,2,\cdots,n.$$

设 $f(x)=-\left(\sqrt{e+hx^2}+\sqrt{h}x\right)^2,(x\in\mathbb{R})$。

因为 $f'(x)=-\dfrac{2\sqrt{h}\left(\sqrt{e+hx^2}+\sqrt{h}x\right)^2}{\sqrt{e+hx^2}}<0$，所以 $f(x)$ 是严格递减函数。根 $r_{n,k}$ 中 C_k 的值随着 k 的增大而减小，从而 $r_{n,k}$ 的值逐渐增大，即

$$r_{n,1}<r_{n,2}<r_{n,3}<\cdots<r_{n,n}.$$

由定理 2.4 知 $d_{n-1}(x)\preceq d_n(x)$，即 $r_{n,1}<r_{n-1,1}<r_{n,2}<\cdots<r_{n,n-1}<r_{n-1,n-1}<r_{n,n}$。故 $d_n(x)$ 的最大根随着 n 增大而增大，最小根随着 n 的增大而减小。

$$\lim_{n\to+\infty} r_{n,1}=-\left(\sqrt{e+h}+\sqrt{h}\right)^2,$$

而

$$\lim_{n\to+\infty} r_{n,n}=-\left(\sqrt{e+h}-\sqrt{h}\right)^2.$$

所以 $d_n(x)$ 的根在区间 $\left(-\left(\sqrt{e+h}+\sqrt{h}\right)^2,-\left(\sqrt{e+h}-\sqrt{h}\right)^2\right)$。下证在闭区间稠密，只需证明对于任意的 $x\in\left[-\left(\sqrt{e+h}+\sqrt{h}\right)^2,-\left(\sqrt{e+h}-\sqrt{h}\right)^2\right]$ 都是序列 $\left(d_n(x)\right)_{n\geq 0}$ 的根的极限为使得 $|\lambda_1(x)|=|\lambda_2(x)|$ 成立的那些 x，即

$$\left|e+x+\sqrt{(e+x)^2+4hx}\right|=\left|e+x-\sqrt{(e+x)^2+4hx}\right|.$$

所以 $\sqrt{(e+x)^2+4hx}\leq 0$，即

$$-\left(\sqrt{e+h}+\sqrt{h}\right)^2\leq x\leq-\left(\sqrt{e+h}-\sqrt{h}\right)^2,$$

故任意的 $x\in\left[-\left(\sqrt{e+h}+\sqrt{h}\right)^2,-\left(\sqrt{e+h}-\sqrt{h}\right)^2\right]$ 都是 $\left(d_n(x)\right)_{n\geq 0}$ 的根的极限。□

3. 结论

本文应用刘丽和王毅给出的判断实多项式的根的交替性的方法，结合递归关系(2.1)证明了 Delannoy 类矩阵的行多项式的实根性。并利用 Beraha 等人给出的不恒为零多项式序列 $\left(f_n(x)\right)_{n>0}$ 的零点的极限判断定理，证明了 Delannoy 类矩阵的行多项式的根都在区间 $\left(-\left(\sqrt{e+h}+\sqrt{h}\right)^2,-\left(\sqrt{e+h}-\sqrt{h}\right)^2\right)$ 内，且在闭区间 $\left[-\left(\sqrt{e+h}+\sqrt{h}\right)^2,-\left(\sqrt{e+h}-\sqrt{h}\right)^2\right]$ 上稠密。

参考文献

[1] Mu, L.L. and Zheng, S.N. (2017) On the Total Positivity of Delannoy-Like Triangles. *Journal of Integer Sequences*, **20**,

Article 17.1.6.

[2] Su, X.T. and Wang, Y. (2018) Onunimodality Problems in Pascal's Triangle. *Electronic Journal of Combinatorics*, **15**, Research Paper 113, 12 p.

[3] 郑赛男. 组合矩阵的解析性质[D]: [博士学位论文]. 大连: 大连理工大学, 2019.

[4] Liu, L.L. and Wang, Y. (2007) A Unified Approach to Polynomial Sequences with Only Real Zeros. *Advances in Applied Mathematics*, **38**, 542-560. https://doi.org/10.1016/j.aam.2006.02.003

[5] Beraha, S., Kahane, J. and Weiss, N. (1978) Limits of Zeros of Recursively Defined Families of Polynomials. In: Rota, G., Ed., *Studies in Foundations and Combinatorics*, Advances in Mathematics, Supplementary Studies, Vol. 1, Academic Press, New York, 213-232.

[6] Wang, Y. and Zhu, B.X. (2011) On the Unimodality of Independence Polynomials of Some Graphs. *European Journal of Combinatorics*, **32**, 10-20. https://doi.org/10.1016/j.ejc.2010.08.003