

# 球域上椭圆方程有效的有限元方法和误差分析

彭娜

贵州师范大学数学科学学院, 贵州 贵阳  
Email: pengna2526@163.com

收稿日期: 2020年12月14日; 录用日期: 2021年1月3日; 发布日期: 2021年1月19日

## 摘要

本文提出了一种有效的有限元方法来求解球域上的椭圆方程。首先, 利用球坐标变换和球谐函数展开, 将原问题化为一组等价的低维问题。其次, 通过引入带权的Sobolev空间, 建立了每个低维问题的弱形式和相应的离散形式。另外, 利用分片线性插值多项式的逼近性质证明了逼近解的误差估计。最后给出了算法的具体实现过程, 并通过数值例子验证了算法的有效性。

## 关键词

有限元法, 球域, 带权Sobolev空间, 降维格式, 误差估计

# An Effective Finite Element Method and Error Analysis for the Elliptic Equation in Spherical Domain

Na Peng

Department of Mathematical Science, Guizhou Normal University, Guiyang Guizhou  
Email: pengna2526@163.com

Received: Dec. 14<sup>th</sup>, 2020; accepted: Jan. 3<sup>rd</sup>, 2021; published: Jan. 19<sup>th</sup>, 2021

## Abstract

In this paper, an effective finite element method is proposed to solve the elliptic equation in spherical domain. Firstly, a series of one-dimensional problems equivalent to the original problem are derived by introducing spherical coordinate transformation and using spherical harmonic functions expansion. Secondly, we introduce a weighted Sobolev space and establish the weak form and the corresponding discrete scheme. In addition, by using the approximation properties of piece-

wise linear interpolation polynomials, the error estimates of approximation solutions are proved. Finally, the concrete process of implementing the algorithm is given, and the effectiveness of the algorithm is verified by numerical experiments.

## Keywords

Finite Element Method, Spherical Domain, Weighted Sobolev Space, Dimension Reduction Scheme, Error Estimation

Copyright © 2021 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

有限元方法是求解微分方程常用的数值方法之一，具有数值稳定性、通用性强的特点。其思想是利用变分原理，通过构造有限维空间中的分片多项式函数来逼近原问题的真解。计算机的出现，使得有限元法在很多方面得到广泛应用，例如：物理学、材料科学、生物学(参见文献[1]-[9])等。

关于求解二阶椭圆方程的数值方法有很多，主要包括弱有限元法，即在多边形或多面体网格区域上求解二阶椭圆问题(参见文献[10] [11] [12] [13])、有限体积法和谱方法(参见文献[12] [13] [14] [15])等。然而，却很少在于球域上研究椭圆方程，主要是直接在球域上通过网格剖分构造基函数比较复杂和困难。

因此，本文提出了一种有效的有限元方法来求解球域上的椭圆方程。首先，利用球坐标变换和球谐函数展开，将原问题化为一系列等价的一维问题。其次，通过引入带权的 Sobolev 空间，建立了每个一维问题的弱形式和相应的离散形式。另外，利用分片线性插值多项式的逼近性质证明了逼近解的误差估计。最后给出了算法的具体实现过程，并通过数值例子验证了算法的有效性。

最后，简要介绍本文接下来的工作安排。在第 2 节，我们推导了原问题的降维格式。在第 3 节，引入带权的 Sobolev 空间，推导原问题基于降维格式的弱形式和相对应的离散格式。在第 4 节，证明逼近解的误差估计。在第 5 节，给出了该算法的具体实现过程。在第 6 节，提供了一些数值例子验证算法的有效性。最后，在第 7 节，给出了一些结论性评注。

## 2. 降维格式

作为模型问题，我们考虑下面的二阶椭圆方程：

$$\begin{cases} -\Delta u + \alpha u = f, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.1)$$

其中， $\Omega = \{(x, y, z) \in R^3 : x^2 + y^2 + z^2 < R\}$ ， $n$  是边界  $\partial\Omega$  的单位外法向量。

为了有效地求解该问题，我们将利用球坐标变换和球谐函数展开，将原问题化为一系列等价的一维问题。定义如下的微分算子：

$$\mathcal{L}v = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \Delta_s v \quad (2.2)$$

其中

$$\Delta_s = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

由格林公式可知, (2.1)的弱形式为: 找  $u \in H_0^1(\Omega)$ , 使得

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla \bar{v} dx dy dz + \alpha \int_{\Omega} u \bar{v} dx dy dz = \int_{\Omega} f \bar{v} dx dy dz, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad (2.3)$$

其中  $\bar{v}$  是  $v$  的复共轭。则由球坐标变化  $x = r \sin \theta \cos \phi, y = r \sin \theta \sin \phi, z = r \cos \theta$  可得到(2.1)在球坐标系下的方程为:

$$-\mathcal{L}\varphi + \alpha\varphi = g, (r, \theta, \phi) \in D \quad (2.4)$$

$$\varphi(R, \theta, \phi) = 0 \quad (2.5)$$

其中  $\varphi(r, \theta, \phi) = u(x, y, z)$ ,  $g(r, \theta, \phi) = f(x, y, z)$ ,  $D = (0, R) \times [0, \pi] \times [0, 2\pi]$ 。

由(2.3)可得到(2.4), (2.5)的弱形式为:

$$a(\varphi, \psi) = (g, \psi) \quad (2.6)$$

其中

$$a(\varphi, \psi) = \int_0^R \int_S r^2 \mathcal{L}\varphi \bar{\psi} dr dS + \alpha \int_0^R \int_S r^2 \varphi \bar{\psi} dr dS$$

$$(g, \psi) = \int_0^R \int_S r^2 g \bar{\psi} dr dS$$

其中  $S$  是单位球面。令  $\varphi(r, \theta, \phi) = \sum_{|m|=0}^{\infty} \sum_{|l|=0}^m \varphi_m^l Y_m^l$ ,  $g(r, \theta, \phi) = \sum_{|m|=0}^{\infty} \sum_{|l|=0}^m g_m^l Y_m^l$ , 其中  $Y_m^l$  表示球调和函数, 且具

有如下性质:

$$\Delta_s Y_m^l = -m(m+1)Y_m^l, \quad m \geq 0, \quad |l| \leq m, \quad \int_S Y_m^l Y_m^{l'} dS = \sigma_{mm'} \sigma_{ll'} \quad (2.7)$$

令  $l_m v = \frac{1}{r^2} (r^2 v_r)_r - \frac{m(m+1)}{r^2} v$ , 则由球调和函数的性质(2.7)可知(2.4)和(2.5)

等价于如下的一系列一维问题:

$$-l_m \varphi_m + \alpha \varphi_m = g_m(r), \quad r \in (0, R) \quad (2.8)$$

$$\varphi_m^l(R) = 0 \quad (2.9)$$

令  $r = Rt$ ,  $u_m^l(t) = \varphi_m^l(Rt)$ ,  $F_m^l(t) = g_m^l(Rt)$ ,  $\mathcal{L}_m v = \frac{1}{t^2} (t^2 v_t)_t - \frac{m(m+1)}{t^2} v$ , 则(2.8)~(2.9)等价于:

$$-\mathcal{L}_m u_m^l + \alpha R^2 u_m^l = R^2 F_m^l, \quad t \in (0, 1) \quad (2.10)$$

$$u_m^l(1) = 0 \quad (2.11)$$

### 3. 弱形式和离散格式

首先, 我们引入通常的带权 Sobolev 空间:

$$L_{\omega}^2(I) := \left\{ f : \int_I \omega f_m^2 dt < \infty \right\}$$

相应的内积和范数分别为:

$$(f_m, g_m)_{\omega} = \int_I \omega f_m g_m dt, \quad \|f_m\|_{\omega} = \left( \int_I \omega f_m^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

其中  $I = (0, 1)$ ,  $\omega = x^2$  为权函数。然后定义非一致带权 Sobolev 空间:

$$H_{0,\omega,0}^1(I) := \{u_0^l : \partial_t^k u_0^l \in L_\omega^2(I), u_0^l(1) = 0, k = 0, 1\}, m = 0;$$

$$H_{0,\omega,m}^1(I) := \{u_m^l : \partial_t^k u_m^l \in L_{\omega^k}^2(I), u_m^l(1) = 0, k = 0, 1\}, m \geq 1$$

其相对应的内积和范数分别为:

$$(f_0^l, g_0^l)_{1,\omega,0} = \sum_{k=0}^1 (\partial_t^k f_0^l, \partial_t^k g_0^l)_\omega, \|f_0^l\|_{1,\omega,0} = (f_0^l, f_0^l)_{1,\omega,0}^{\frac{1}{2}};$$

$$(f_m^l, g_m^l)_{1,\omega,m} = \sum_{k=0}^1 (\partial_t^k f_m^l, \partial_t^k g_m^l)_{\omega^k}, \|f_m^l\|_{1,\omega,m} = (f_m^l, f_m^l)_{1,\omega,m}^{\frac{1}{2}}$$

则方程(2.10)~(2.11)的弱形式为: 找  $u_m^l \in H_{0,\omega,m}^1(I)$ , 使得

$$a_m(u_m^l, v) = F_m(v), \quad \forall v \in H_{0,\omega,m}^2(I) \quad (3.1)$$

其中:

$$a_m(u_m^l, v) = \int_I t^2 (u_m^l)' v' + m(m+1)u_m^l v dt + \alpha R^2 \int_I t^2 u_m^l v dt,$$

$$F_m(v) = R^2 \int_I t^2 F_m^l v dt.$$

取逼近空间  $X_{mh} = U_h \cap H_{0,\omega,m}^1(I)$ , 其中  $U_h$  是由分段线性插值基函数组成的空间, 则(3.1)相对应的离散格式为: 找  $u_{mh}^l \in X_{mh}$ , 使得

$$a_m(u_{mh}^l, v_{mh}^l) = F_m(v_{mh}^l), \quad \forall v_{mh}^l \in X_{mh} \quad (3.2)$$

#### 4. 误差估计

为了简洁起见, 我们使用表达式  $a \lesssim b$  或  $a \gtrsim b$  来表示存在一个正常数  $C$  使得  $a \leq Cb$  或  $a \geq Cb$ 。

**定理 1.** 双线性形式  $a_m(u_m^l, v)$  在  $H_{0,\omega,m}^1(I) \times H_{0,\omega,m}^1(I)$  上是有界且正定的, 即:

$$|a_m(u_m^l, v)| \lesssim \|u_m^l\|_{0,\omega,m} \|v\|_{0,\omega,m},$$

$$a_m(u_m^l, u_m^l) \gtrsim \|u_m^l\|_{0,\omega,m}^2.$$

证明: 由 Cauchy-Schwarz 不等式我们可得:

$$\begin{aligned} |a_m(u_m^l, v)| &= \left| \int_I t^2 (u_m^l)' v' + m(m+1)u_m^l v dt + \alpha R^2 \int_I t^2 u_m^l v dt \right| \\ &\lesssim \int_I t^2 \left| (u_m^l)' v' \right| + m(m+1)|u_m^l v| + t^2 |u_m^l v| dt \\ &\lesssim \left[ \int_I t^2 \left[ (u_m^l)' \right]^2 + t^2 (u_m^l)^2 + m(m+1)(u_m^l)^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \int_I t^2 (v')^2 + t^2 v^2 + m(m+1)v^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\lesssim \|u_m^l\|_{0,\omega,m} \|v\|_{0,\omega,m} \\ a_m(u_m^l, u_m^l) &= \int_I t^2 \left[ (u_m^l)' \right]^2 + m(m+1)(u_m^l)^2 dt + \alpha R^2 \int_I t^2 (u_m^l)^2 dt \gtrsim \|u_m^l\|_{0,\omega,m}^2 \end{aligned}$$

**定理 2.** 如果  $F_m(t) \in L_\omega^2(I)$ , 则  $F_m(v)$  为  $H_{0,\omega,m}^1(I)$  上的有界线性泛函, 即:

$$|F_m(v)| \lesssim \|v\|_{0,\omega,m}.$$

证明：由 Cauchy-Schwarz 不等式有

$$\begin{aligned} |F_m(v)| &= \left| \int_I t^2 F_m' v dx \right| = \left| \int_I (tF_m')(tv) dt \right| \lesssim \left[ \int_I (tF_m')^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \int_I (tv)^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\lesssim \left[ \int_I (tv)^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} \lesssim \left[ \int_I (tv')^2 + (tv)^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} = \|v\|_{0,\omega,m} \end{aligned}$$

则由定理 1, 定理 2 和 Lax-milgram 定理我们有下面的定理:

**定理 3.** 若  $F_m' \in L^2_\omega(I)$ , 方程(3.1) 和(3.2)分别存在唯一解  $u_m^l \in H^1_{0,\omega,m}(I)$  和  $u_{mh}^l \in X_{mh}$ 。

定义区间  $I$  上的插值投影  $I_h u_m^l: H^1_{0,\omega,m}(I) \rightarrow U_h$ , 由文献[16]中的分段线性插值理论可得如下引理。

**引理 1.** 对于  $u_m^l \in H^1_{0,\omega,m}(I)$ , 若  $u_m^l(x)$  在区间  $I$  上有连续导数, 则成立:

$$\|I_h u_m^l - u_m^l\|_{0,\omega,m} \lesssim h。$$

**定理 4.** 假设  $u_m$  和  $u_{mh}$  分别是方程(3.1)和(3.2)的解, 则下列不等式成立:

$$\|u_m^l - u_{mh}^l\|_{0,\omega,m} \lesssim h。$$

证明：由(3.1) 和(3.2)我们可得

$$a_m(u_m^l, v_h) = F_m(v_h), \quad \forall v_h \in X_{mh} \quad (4.1)$$

$$a_m(u_{mh}^l, v_h) = F_m(v_h), \quad \forall v_h \in X_{mh} \quad (4.2)$$

因此

$$a_m(u_m^l - u_{mh}^l, v_h) = 0 \quad (4.3)$$

结合定理 1 和(4.3)可得

$$\begin{aligned} \|u_m^l - u_{mh}^l\|_{0,\omega,m}^2 &\lesssim a_m(u_m^l - u_{mh}^l, u_m^l - u_{mh}^l) \\ &= a_m(u_m^l - u_{mh}^l, u_m^l + v_h - v_h - u_{mh}^l) \\ &= a_m(u_m^l - u_{mh}^l, u_m^l - v_h) \\ &\lesssim \|u_m^l - u_{mh}^l\|_{0,\omega,m} \|u_m^l - v_h\|_{0,\omega,m} \end{aligned}$$

则有

$$\|u_m^l - u_{mh}^l\|_{0,\omega,m} \lesssim \inf_{v_h \in X_{mh}} \|u_m^l - v_h\|_{0,\omega,m} \quad (4.4)$$

结合(4.4)和引理 1 可得

$$\|u_m^l - u_{mh}^l\|_{0,\omega,m} \lesssim h。$$

## 5. 算法的有效实施

为了更好的验证我们算法的有效性, 我们构造满足边值条件的基函数如下:

$$\varphi_0(t) = \begin{cases} 1 - \frac{t-t_0}{h_1}, & t_0 \leq t \leq t_1, \\ 0, & \text{其它,} \end{cases} \quad (5.1)$$

$$\varphi_i(t) = \begin{cases} 1 + \frac{t-t_i}{h_i}, & t_{i-1} \leq t \leq t_i, \\ 1 - \frac{t-t_i}{h_{i+1}}, & t_i \leq t \leq t_{i+1}, \\ 0, & \text{其它,} \end{cases} \quad (5.2)$$

其中  $i=1, \dots, N-1$ 。则逼近空间可取为:

$$X_h(m) = \text{span}\{\varphi_0(t), \varphi_1(t), \dots, \varphi_{N-1}(t)\}。$$

设

$$a_{ij}^m = \int_I t^2 \varphi_j' \varphi_i' dt, \quad b_{ij}^m = m(m+1) \int_I \varphi_j \varphi_i dt,$$

$$c_{ij}^m = \alpha R^2 \int_I t^2 \varphi_j \varphi_i dt, \quad f_{ij}^m = R^2 \int_I t^2 F_m^l \varphi_j dt$$

令

$$u_{mh} = \sum_{i=0}^{N-1} u_i^m \varphi_i(t) \quad (5.3)$$

将(5.3)式代入(3.2)式，把  $v_{mh}$  取遍逼近空间  $X_h(m)$  中的所有基函数，即可得如下的线性系统:

$$(A + B + C)U^m = G^m \quad (5.4)$$

其中

$$A = (a_{ij}^m), \quad B = (b_{ij}^m), \quad C = (c_{ij}^m), \quad G = (f_{ij}^m), \quad U^m = (u_0^m, u_1^m, \dots, u_{N-1}^m)^T。$$

由分片线性插值基函数的性质知，(5.4)中的质量矩阵和刚度矩阵都是稀疏矩阵。

## 6. 数值案例

在这一节，我们将在 MATLAB 2015a 平台上进行编程计算，令  $u_{Mh}(x, y, z)$  为精确解  $u(x, y, z)$  的逼近解为， $r = Rt$ ，则有

$$u(x, y, z) = \tilde{u}(t, \theta, \phi) = \sum_{|m|=0}^{\infty} \sum_{|l|=0}^m u_m^l(t) Y_m^l, \quad u_{Mh}(x, y, z) = \tilde{u}_h(t, \theta, \phi) = \sum_{|m|=0}^M \sum_{|l|=0}^m u_{mh}^l(t) Y_m^l。$$

定义精确解和数值解的误差如下:

$$e(u_{Mh}(x, y, z), u(x, y, z)) = \|u_{Mh}(x, y, z) - u(x, y, z)\|_{L^\infty(\Omega)} = \|\tilde{u}_{Mh}(t, \theta, \phi) - \tilde{u}(t, \theta, \phi)\|_{L^\infty(D)}。$$

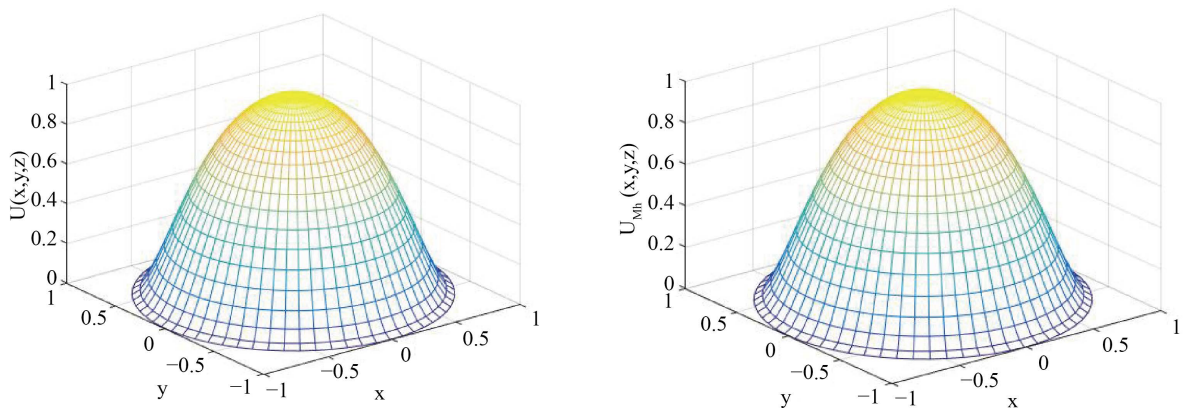
**例** 取  $\alpha = R = 1$  且  $u = (x^2 + y^2 + z^2 - 1)^2 e^{x^2 + y^2 + z^2}$ ，显然  $u$  满足边值条件，将  $u$  代入(2.1)便可得到  $f$ 。利用第 5 节中提出的算法，对于不同的  $M$  和  $N$ ，我们在表 1 中给出了数值解与精确解之间的误差  $e(u_{Mh}(x, y, z), u(x, y, z))$ 。另外，为了更直观地表明算法的有效性，我们还在图 1 中分别给出数值解与精确解的图像，最后，为了验证该算法的有效性，我们呈现出了近似解的误差图在图 2。

从表 1 可看出当  $N \geq 20, M = 6$  时，误差  $e(u_{Mh}(x, y, z), u(x, y, z))$  达到  $10^{-6}$  左右的精度。同时，从图 1 和图 2 可看出我们算法是收敛的。

**Table 1.** The error  $e(u_{Mh}(x,y,z),u(x,y,z))$  between numerical solution and exact solution

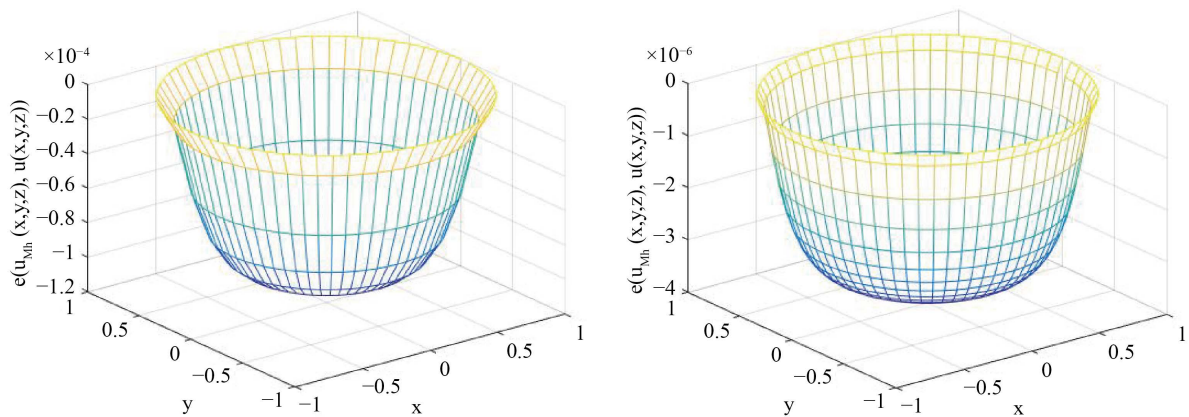
**表 1.** 数值解与精确解的误差  $e(u_{Mh}(x,y,z),u(x,y,z))$

$N$	$M = 2$	$M = 4$	$M = 6$	$M = 8$
10	1.0289e-04	1.0289e-04	1.0278e-04	1.0019e-04
15	2.3553e-05	2.3553e-05	2.3553e-05	2.3553e-05
20	8.0489e-06	8.0489e-06	8.0489e-06	8.0489e-06
25	3.4570e-06	3.4570e-06	3.4570e-06	3.4570e-06



**Figure 1.** When  $N = 20, m = 12$ , the figures of the exact solution (left) and the numerical solution (right) are shown below

**图 1.** 当  $N = 20, m = 12$  时, 精确解(左)和数值解(右)的图像分别如下所示



**Figure 2.** The error figures between exact solution and numerical solution with  $N = 10, m = 6$  (left) and  $N = 25, m = 10$  (right), respectively

**图 2.** 当  $N = 10, m = 6$  (左)和  $N = 25, m = 10$  (右)时, 精确解和数值解的误差图

## 7. 总结

本文提出了一种有效的有限元法求解球域上的二阶问题, 亮点在于通过引入球坐标变化和球谐函数展开, 将问题转化为一系列等价的一维问题, 从而克服有限元在球域上剖分的困难, 使得原问题更加容易解决。同时, 并对这一系列一维问题进行了相应的误差分析。最后, 我们提出的算法可应用到球域上更复杂的问题。



## 参考文献

- [1] Arnold, D.N. and Brezzi, F. (1991) Mixed and Nonconforming Finite Element Methods: Implementation, Post-Processing and Error Estimates. *Esaim Mathematical Modelling & Numerical Analysis*, **19**, 7-32. <https://doi.org/10.1051/m2an/1985190100071>
- [2] Arnold, D.N., Brezzi, F., Cockburn, B. and Marini, L.D. (2002) Unified Analysis of Discontinuous Galerkin Methods for Elliptic Problems. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **39**, 1749-1779. <https://doi.org/10.1137/S0036142901384162>
- [3] Arnold, D.N. and Wintber, A.R. (2002) Mixed Finite Elements for Elasticity. *Numerische Mathematik*, **92**, 401-419. <https://doi.org/10.1007/s002110100348>
- [4] Brezzi, F.F. and Fortin, M. (1991) Mixed and Hybrid Finite Elements. Springer, New York, 177-199. [https://doi.org/10.1007/978-1-4612-3172-1\\_5](https://doi.org/10.1007/978-1-4612-3172-1_5)
- [5] Chou, S.I. and Wang, C.C. (1979) Error Estimates of Finite Element Approximations for Problems in Linear Elasticity Part 1. Problems in Elastostatics. *Archive for Rational Mechanics & Analysis*, **72**, 41-60. <https://doi.org/10.1007/BF00250736>
- [6] Dziuk, G. and Elliott, C.M. (2007) Surface Finite Elements for Parabolic Equations. *Journal of Computational Mathematics*, **25**, 385-407.
- [7] Eriksson, K. and Johnson, C. (1993) Adaptive Streamline Diffusion Finite Element Methods for Stationary Convection-Diffusion Problems. *Mathematics of Computation*, **60**, 167-188. <https://doi.org/10.1090/S0025-5718-1993-1149289-9>
- [8] MacDonald, G., Mackenzie, J.A., Nolan, M. and Insall, R.H. (2016) A Computational Method for the Coupled Solution of Reaction Diffusion Equations on Evolving Domains and Manifolds: Application to a Model of Cell Migration and Chemotaxis. *Journal of Computational Physics*, **309**, 207-226. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2015.12.038>
- [9] Lacitignola, D., Bozini, B., Frittelli, M. and Sgura, I. (2017) Turing Pattern Formation on the Sphere for a Morphochemical Reaction-Diffusion Model for Electrodeposition. *Communications in Nonlinear Science & Numerical Simulation*, **48**, 484-508. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2017.01.008>
- [10] Cockbur, B., Gopalakrishnan, J. and Lazarov, R. (2009) Unified Hybridization of Discontinuous Galerkin, Mixed, and Continuous Galerkin Methods for Second Order Elliptic Problems. *Siam Journal on Numerical Analysis*, **47**, 1319-1365. <https://doi.org/10.1137/070706616>
- [11] Wang, J. and Ye, X. (2013) A Weak Galerkin Finite Element Method for Second-Order Elliptic Problems. *Journal of Computational & Applied Mathematics*, **241**, 103-115. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2012.10.003>
- [12] Wang, J. and Ye, X. (2014) A Weak Galerkin Mixed Finite Element Method for Second-Order Elliptic Problems. *Mathematics of Computation*, **83**, 2101-2126. <https://doi.org/10.1090/S0025-5718-2014-02852-4>
- [13] Zhang, H.Q., Xu, Y.X., Xu, Y., et al. (2016) Weak Galerkin Finite Element Method for Second Order Parabolic Equations. *International Journal of Numerical Analysis & Modeling*, **13**, 525-544.
- [14] Li, R. and Zhu, P. (1982) Generalized Difference Methods for Second Order Elliptic Partial Differential Equations (I) Triangle Grids. *Numerical Mathematics: A Journal of Chinese Universities*, **2**, 140-152.
- [15] 祝丕琦, 李荣华. 二阶椭圆偏微分方程的广义差分法(I)——三角网情形[J]. 高校计算数学学报, 1982, 12(4): 360-375.
- [16] 李荣华. 偏微分方程数值解法[M]. 第2版. 北京: 高等教育出版社, 2010: 90-92.