

# 拟线性奇异摄动微分方程的自适应差分方法

李嘉懿, 张子懿, 周 澳, 王 雷, 申露丽

北方工业大学理学院, 北京

Email: jiyi1222@outlook.com, ziyizhang6741@outlook.com, 1456598484@qq.com, 417971239@qq.com, 651845910@qq.com

收稿日期: 2020年12月25日; 录用日期: 2021年1月19日; 发布日期: 2021年1月28日

---

## 摘 要

利用简单迎风差分格式和自适应网格方法相结合求解拟线性奇异摄动方程两点边值问题, 通过等分布弧长控制函数而产生自适应网格, 得到自适应差分格式的关于摄动参数 $\varepsilon$ 一致的一阶误差估计, 最后数值算例验证数值解的一阶一致收敛性, 表明该方法的可靠性与准确性。

## 关键词

奇异摄动问题, 自适应网格, 简单迎风差分格式, 一阶一致收敛性

---

# Adaptive Difference Method for Quasilinear Singularly Perturbed Differential Equations

Jiayi Li, Ziyi Zhang, Ao Zhou, Lei Wang, Luli Shen

College of Sciences, North China University of Technology, Beijing

Email: jiyi1222@outlook.com, ziyizhang6741@outlook.com, 1456598484@qq.com, 417971239@qq.com, 651845910@qq.com

Received: Dec. 25<sup>th</sup>, 2020; accepted: Jan. 19<sup>th</sup>, 2021; published: Jan. 28<sup>th</sup>, 2021

---

## Abstract

A simple upwind difference scheme and an adaptive grid method are combined to solve the quasilinear singularly perturbed two-point boundary value problem. The adaptive mesh is generated by equally distributing the arc-length control function. The first-order error estimate of the adaptive difference scheme uniform with respect to the perturbation parameter  $\varepsilon$  is obtained. Finally,

numerical examples are given to verify the uniform first-order convergence and show the reliability and accuracy of the method.

## Keywords

Singular Perturbation Problem, Adaptive Mesh, Simple Upwind Difference Scheme, Uniform First-Order Convergence

Copyright © 2021 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

奇异摄动问题在流体力学和地球物理学等领域中应用广泛。考虑拟线性守恒型奇异摄动方程的两点边值问题:

$$Tu(x) := -\varepsilon u''(x) + b(x, u(x))' = f(x), \quad x \in (0, 1) \quad (1.1)$$

$$u(0) = u(1) = 0 \quad (1.2)$$

其中  $\varepsilon$  是一个很小的摄动参数,  $0 < \varepsilon \ll 1$ 。假设  $b \in C^1([0, 1] * \mathbb{R})$ ,  $f \in C[0, 1]$ , 且存在常数  $\beta$  和  $\bar{\beta}$ , 使得  $0 < \beta < b_u(x, u) \leq \bar{\beta}$ ,  $\forall x \in [0, 1]$ ,  $\forall u \in \mathbb{R}$  成立。则问题(1.1) (1.2)存在唯一解  $u \in C^2[0, 1]$ 。解在边界  $x=1$  处有一个变化很剧烈的指数边界层, 用许多数值方法都不能有效逼近问题的准确解。因此我们使用自适应网格方法, 即采用等分布控制函数来自适应地生成网格, 进而在边界层区域处放置相对较多的网格点, 来保证计算出来的解是更好的近似解(见[1])。

文献[2]通过等分布数值解的弧长实现自适应移动网格, 证明了问题(1.1)在这种自适应移动网格下的简单迎风格式求解结果是一阶收敛的。文献[3]讨论了在 Sakhvalov-Shishkin 网格上求解比问题(1.1)更一般的拟线性奇异摄动方程, 建立带权的混合差分格式, 估计解误差和导数误差, 最终得到二阶收敛的解和导数及其误差估计。文献[4]采用一阶和二阶差分格式离散了问题(1.1), 得到依赖于数值解差商的后验误差估计。文献[5]在此基础上提出了一种可调节控制函数的自适应方法, 数值实验结果验证了方法的可行性。对于非守恒型线性奇异摄动方程, 文献[6]中利用误差校正方法将高阶不稳定格式和标准迎风格式差分格式联合起来, 改进了其精度。文献[7]又对文献[6]进行改进, 利用 Richardson 外推技术得到了一个更精确的逼近解。文献[8]讨论了自适应网格方法求解齐次线性非守恒型奇异摄动方程。

考虑拟线性守恒型奇异摄动方程的两点边值问题(1.1), 鉴于自适应差分方法克服了层适应差分方法需要预知准确解情况的缺点, 本文通过简单迎风格式与等分布数值解弧长相结合求得数值解, 证明该方法是一阶收敛的且关于摄动参数是一致的, 数值算例验证一阶一致收敛性, 表明该方法的可靠性与准确性。

## 2. 自适应差分方法及其误差估计

### 2.1. 自适应简单迎风格式

为了离散求解拟线性两点边值问题(1.1), 设

$$Av = -\varepsilon v'(x) + b(x, v(x)), \quad v \in C^2[0,1] \tag{2.1}$$

则(1.1)可写成

$$(Au)' = -\varepsilon u'' + b(x, u(x))' = f \tag{2.2}$$

定义任意网格函数  $\{v_i\}$  的离散算子  $A^N$ ，将(2.1)离散化，可以得到

$$A^N v_i = -\varepsilon D^+ v_i + b(x_i, v_i) \tag{2.3}$$

其中  $i=1,2,3,\dots,N-1$  且  $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N = 1$

将原方程(1.1)离散化可以得到

$$T^N u_i^N := D^-(A^N u_i^N) = f_i, \quad i=1,2,\dots,N-1 \tag{2.4}$$

$$u_0^N = u_N^N = 0$$

其中  $\{u_i^N\}$  是在网格  $\{x_i\}$  上计算的数值解。

在自适应网格时，除了  $x_0$  和  $x_N$  以外的  $N-1$  个节点，每一个点处都可以列出两个式子：

- i) 此节点上的差分格式；
- ii) 此节点左右两个弧长相等的式子；

联立这  $2N-2$  个式子，就可以得到自适应的  $x_i$  和  $u_i^N$ 。

## 2.2. 线性守恒型两点边值问题的稳定性

考虑(1.1)的线性情况

$$Lu = -\varepsilon u''(x) + (pu(x))' = f(x) \tag{2.5}$$

$$u(0) = u(1) = 0$$

其中

$$(i) \quad 0 < \beta \leq p(x) \leq \bar{\beta} \tag{2.6a}$$

$$(ii) \quad f \in C[0,1] \tag{2.6b}$$

**引理 2.1** 设(2.5)中的  $f(x) = F'(x) \in C[0,1]$ ，则方程中存在一个唯一解  $u \in C^2[0,1]$ ，使得

$$\|u\|_\infty \leq \frac{2}{\beta} \|Lu\|_*$$

其中， $\|v\|_*$  表示  $\|v\|_* = \min_{v'=v} \|V\|_\infty$ 。

**证明** (2.5)两边同时对  $x$  积分可得

$$u' - \frac{pu}{\varepsilon} = -\frac{F(x) + C_1}{\varepsilon}$$

可以解出

$$u(x) = Ce^{\int_x^1 \frac{p(t)}{\varepsilon} dt} + e^{-\int_x^1 \frac{p(t)}{\varepsilon} dt} \int_x^1 \frac{F(s) + C_1}{\varepsilon} e^{\int_s^1 \frac{p(t)}{\varepsilon} dt} ds$$

由于  $u(1) = 0$ ，可以解出  $C = 0$ ，则有

$$u(x) = \int_x^1 \frac{F(s)}{\varepsilon} e^{-\int_x^s \frac{p(t)}{\varepsilon} dt} ds + C_1 \int_x^1 \frac{1}{\varepsilon} e^{-\int_x^s \frac{p(t)}{\varepsilon} dt} ds \quad (2.7)$$

设

$$W(x) = \int_x^1 \frac{F(s)}{\varepsilon} e^{-\int_x^s \frac{p(t)}{\varepsilon} dt} ds \quad (2.8)$$

$$V(x) = \int_x^1 \frac{1}{\varepsilon} e^{-\int_x^s \frac{p(t)}{\varepsilon} dt} ds \quad (2.9)$$

则有

$$u(x) = W(x) + C_1 V(x)$$

将  $u(0) = 0$  代入, 可以解出  $C_1 = -\frac{W(0)}{V(0)}$ , 则有

$$u(x) = W(x) - \frac{W(0)}{V(0)} V(x)$$

由(2.7)和(2.8)可得

$$|w(x)| \leq \|F(x)\|_{\infty} V(x) \quad (2.10)$$

$$0 \leq V(x) \leq \int_x^1 \frac{1}{\varepsilon} e^{-\int_x^s \frac{\beta}{2} dt} ds \leq \int_x^1 \frac{1}{\beta} e^{-\frac{\beta}{\varepsilon}(s-x)} ds \frac{(s-x)\beta}{\varepsilon} \leq \frac{1}{\beta}$$

由(2.10)有

$$|W(0)| \leq \|F(x)\|_{\infty} V(0) \quad (2.11)$$

则有

$$\begin{aligned} |u(x)| &\leq |W(x)| + \frac{|W(0)|}{V(0)} V(x) \leq |W(x)| + \|F(x)\|_{\infty} V(x) \\ &\leq 2\|F(x)\|_{\infty} V(x) \leq \frac{2}{\beta} \|F(x)\|_{\infty} \end{aligned} \quad (2.12)$$

由(2.12)和(2.5)可得引理 2.1, 证毕。

### 2.3. 离散格林函数与弧长有界性

定义算子  $T^N$  的标准线性化  $\tilde{T}^N$ , 其中  $\tilde{A}^N u_i^N = \varepsilon D^- u_i^N + p^i u_i^N$ ,  $p^i = \int_{s=0}^1 b_u(x_i, sy_i) ds$ 。则对于  $i = 1, 2, \dots, N-1$  有

$$\tilde{T}^N u_i^N = \tilde{T}^N (u_i^N - \bar{0}) = T^N u_i^N - T^N \bar{0} = f_i - (T^N \bar{0})_i, \quad u_0^N = u_N^N = 0 \quad (2.13)$$

由(1.1)满足  $0 < \beta < b_u(x, u) \leq \bar{\beta}$  知  $p^i \geq \beta$ , 容易验证  $\tilde{T}^N$  的系数矩阵是一个  $M$  矩阵。现在定义关于点  $x_j$  的离散格林函数  $G(x_i, x_j)$

$$\tilde{T}^N G(x_i, x_j) = \frac{\delta_{ij}}{h_{i+1}}, \quad G(0, x_j) = G(1, x_j) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N-1 \quad (2.14)$$

其中  $\tilde{T}^N$  作用于变量  $i$ , 克罗内克函数  $\delta_{ij}$  的值当  $i = j$  时得 1, 当  $i \neq j$  时得 0。则对于每个  $i$ , 我们都有

$$u_i^N = \sum_{j=1}^{N-1} h_{j+1} G(x_i, x_j) \left[ f_j - (T^N \bar{0})_j \right] \tag{2.15}$$

现在引入格林函数的一些性质(见[2]):

**引理 2.2** 对于  $i=1, 2, \dots, N$  且  $j=1, 2, \dots, N-1$  有

$$0 \leq G(x_i, x_j) \leq \frac{1}{\beta}$$

**引理 2.3** 对于每个  $j \in \{1, 2, \dots, N-1\}$ , 有

$$\sum_{i=1}^{N-1} \left| G(x_i, x_j) - G(x_{i-1}, x_j) \right| \leq \frac{2}{\beta}$$

**引理 2.4** 令  $\{u_i^N\}$  为任意网格  $\{x_i\}$  上关于(2.4)的解,  $L^N$  为  $\{u_i^N\}$  函数曲线的总弧长, 则有

$$1 \leq L^N \leq C_2$$

其中,  $C_2 = 1 + \frac{2}{\beta} \|f - T^N \bar{0}\|_\infty$ 。

**证明** 首先,  $L^N \geq \sum_{i=1}^N h_i = 1$ . 其次, 由(2.15)和引理 2.3 有

$$L^N = \sum_{i=1}^N h_i \sqrt{1 + (D^- u_i^N)^2} \leq \sum_{i=1}^N h_i \left[ 1 + |D^- u_i^N| \right] = 1 + \sum_{i=1}^N |u_i^N - u_{i-1}^N| \tag{2.16}$$

因此可得

$$\begin{aligned} L^N &\leq 1 + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{N-1} h_{j+1} \left| f_j - (T^N \bar{0})_j \right| \cdot \left| G(x_i, x_j) - G(x_{i-1}, x_j) \right| \\ &\leq 1 + \|f - (T^N \bar{0})\|_\infty \sum_{j=1}^{N-1} h_{j+1} \sum_{i=1}^N \left| G(x_i, x_j) - G(x_{i-1}, x_j) \right| \\ &\leq 1 + \frac{2}{\beta} \|f - T^N \bar{0}\|_\infty \end{aligned} \tag{2.17}$$

证毕。

#### 2.4. 后验误差估计和等分布弧长及误差估计

**定理 2.5** (后验误差估计) 设  $f(x) \in C^1[0,1]$ , 则存在一个常数  $C$ , 使后验界满足

$$\|u^N - u\|_\infty \leq \frac{2}{\beta} \max_i \left\{ \bar{\beta} |u_i^N - u_i^{N-1}| + Ch_i \right\}$$

**证明** 因为  $Tu^N - Tu = L(u^N - u)$ , 故由引理 2.1 可知

$$\|u^N - u\|_\infty \leq \frac{2}{\beta} \|Tu^N - Tu\|_* \tag{2.18}$$

因此, 只需证

$$\frac{2}{\beta} \|Tu^N - Tu\|_* \leq \frac{2}{\beta} \max_i \left\{ \bar{\beta} |u_i^N - u_i^{N-1}| + Ch_i \right\} \tag{2.19}$$

即可。

又因为

$$\|Tu^N - Tu\|_* = \|Tu^N - f\|_* = \left\| (Au^N - F - a)' \right\|_* \tag{2.20}$$

其中  $a$  为常数。

令

$$F_i^N = \sum_{j=1}^i h_j f_j = \sum_{j=1}^i (A^N u_j^N - A^N u_{j-1}^N) = A^N u_i^N - A^N u_0^N \tag{2.21}$$

$$a = A^N u_0^N = A^N u_i^N - F_i^N$$

则有

$$\|Tu^N - Tu\|_* = \|Au^N - A^N u_i^N + F_i^N - F\|_* \leq \|Au^N - A^N u_i^N + F_i^N - F\|_\infty$$

令  $\bar{\eta} = Au^N - A^N u_i^N, \tilde{\eta} = F_i^N - F, \eta = \bar{\eta} + \tilde{\eta}$ , 对于  $x \in (x_{i-1}, x_i)$ , 有

$$|\tilde{\eta}| \leq C_1 h_i \tag{2.22}$$

还有

$$\begin{aligned} \sup_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} |\bar{\eta}| &= \sup_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} \left| (-\varepsilon D^+ u_i + b(x, u_i^N)) - (-\varepsilon D^+ u_i + b(x_i, u_i^N)) \right| \\ &= \sup_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} \left| b(x, u_i^N) - b(x_i, u_i^N) \right| = \sup_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} \left| \int_x^{x_i} \frac{d[b(x, u^N(x))]}{dx} dx \right| \\ &\leq \sup_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} \int_x^{x_i} \left( |b_x(x, u^N(x))| + |b_u(x, u(x)^N)| |D^- u_i| \right) dx \\ &\leq h_i \sup_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} \left( |b_x(x, u^N(x))| + \bar{\beta} |u_i^N - u_{i-1}^N| \right) \\ &\leq C_2 h_i + \bar{\beta} |u_i^N - u_{i-1}^N| \end{aligned} \tag{2.23}$$

由(2.22)和(2.23)就有

$$\|\eta\|_\infty \leq \max_i \left\{ \bar{\beta} |u_i^N - u_{i-1}^N| + C h_i \right\}$$

则

$$\frac{2}{\beta} \|Tu^N - Tu\|_* \leq \frac{2}{\beta} \max_i \left\{ \bar{\beta} |u_i^N - u_{i-1}^N| + C h_i \right\}$$

证毕。

又因为

$$\begin{aligned} &\frac{2}{\beta} \max_i \left\{ \bar{\beta} |u_i^N - u_{i-1}^N| + C h_i \right\} \\ &\leq C \max_i \sqrt{(u_i^N - u_{i-1}^N)^2 + h_i^2} \\ &= C \max_i h_i \sqrt{1 + (D^- u_i^N)^2} \end{aligned} \tag{2.24}$$

故由引理 2.5 和(2.24)有

$$\|u^N - u\|_\infty \leq C \max_i h_i \sqrt{1 + (D^- u_i^N)^2} \tag{2.25}$$

其中不等式右侧为分段线性函数曲线从  $(x_{i-1}, u_{i-1}^N)$  到  $(x_i, u_i^N)$  的最长线段长度，为了得到更精确的近似解，应使其值尽可能小。由此引入分段线性插值  $u^N$  的等分布弧长控制函数

$$M^N(x) := \sqrt{1 + \left( (u^N)'(x) \right)^2} \tag{2.26}$$

令

$$M_i = \sqrt{1 + (D^- u_i^N)^2}, \quad i = 1, 2, \dots, N \tag{2.27}$$

用等分布控制函数来自适应生成网格，设  $h_i$  为网格的宽度， $i = 1, 2, \dots, N$ ，则有

$$h_i M_i = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N h_j M_j, \quad i = 1, 2, \dots, N \tag{2.28}$$

**定理 2.6** (误差估计) 设  $\{u_i^N\}$  是在满足(2.28)的自适应网络上通过方程(1.1)的离散化形式(2.4)计算而得的解，则对某常数  $C$ ，有

$$\|u - u^N\|_\infty \leq CN^{-1}$$

**证明** 由  $l_i = \frac{L^N}{N}, i = 1, 2, \dots, N$ ，其中局部弧长  $l_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (u_i^N - u_{i-1}^N)^2}$ ，总弧长  $L^N = \sum_{i=1}^N l_i$ 。又由引理 2.4，有  $l_i = \frac{L^N}{N} \leq \frac{C_2}{N}$ ，再结合(2.25)，就有  $\|u - u^N\|_\infty \leq CN^{-1}$  成立。证毕。

### 3. 数值算例

例 1. 考虑拟线性奇异摄动问题

$$\begin{cases} Tu(x) := -\varepsilon u''(x) - (e^u)' + \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi x}{2} e^{2u} = 0, & x \in (0, 1), \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

此方程的准确解为  $u(x) = u_A(x) + O(\varepsilon)$ ，其中

$$u_A(x) = -\ln \left[ \left( 1 + \cos \frac{\pi x}{2} \right) \left( 1 - \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2\varepsilon}} \right) \right].$$

对于不同的  $\varepsilon$  和  $N$ ，得到相应的误差  $e := \|u_A - u^N\|$  和收敛阶  $r := \log_2 \frac{\max |u_i - u_i^N|}{\max |u_i - u_i^{2N}|}$ ，如表 1。

例 2. 考虑线性奇异摄动问题

$$\begin{cases} Tu(x) := -\varepsilon u''(x) - \left( u + \frac{x}{4} u^2 \right)' = f(x, \varepsilon), & x \in (0, 1) \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

等式右边的  $f(x, \varepsilon)$  是由下面的准确解  $u$  所决定的：

$$u(x) = \frac{(e-1)e^{-\frac{x}{\varepsilon}} - e + e^{-\frac{1}{\varepsilon}}}{1 - e^{-\frac{1}{\varepsilon}}} + e^x.$$

通过表 1 和表 2 中的数值结果可以发现, 收敛阶  $r$  随着  $N$  的增大在逐渐趋于 1, 所以选取适当的初值, 在自适应网络上简单迎风差分格式求得的近似解和准确解之间的误差满足一阶收敛的估计, 并且与  $\varepsilon$  的取值无关。

**Table 1.** Numerical results of Example 1 using the adaptive simple upwind difference method

**表 1.** 用自适应简单迎风差分方法求解例 1 的数值结果

$N$	$\varepsilon = 10^{-5}$		$\varepsilon = 10^{-8}$	
	$e$	$r$	$e$	$r$
8	0.1706	0.6849	0.1706	0.6850
16	0.1061	0.8653	0.1061	0.8589
32	0.0582	0.9230	0.0585	0.9298
64	0.0307	0.9300	0.0307	0.9313
128	0.0160	0.9555	0.0161	0.9565
256	0.0083	0.9685	0.0083	0.9719
512	0.0042	0.9724	0.0042	0.9792
1024	0.0022		0.0021	

**Table 2.** Numerical results of Example 2 using the adaptive simple upwind difference method

**表 2.** 用自适应简单迎风差分方法求解例 2 的数值结果

$N$	$\varepsilon = 10^{-5}$		$\varepsilon = 10^{-8}$		
	$\ u_i^N - u\ _\infty$	$r$	$N$	$\ u_i^N - u\ _\infty$	$r$
8	0.1779	0.9249	8	0.1779	0.9249
16	0.0937	0.6987	16	0.0937	0.6987
32	0.0577	0.9137	32	0.0577	0.9137
64	0.0306	0.7068	64	0.0306	0.7066
128	0.0188	0.9937	128	0.0188	0.9937
256	0.0094	0.9897	256	0.0094	0.9899
512	0.0047	0.9693	512	0.0047	0.9695
1024	0.0024			0.0024	

## 致 谢

本文得到北京市大学生创新创业训练计划项目支持, 感谢项目指导教师郑权教授的悉心指导。

## 参考文献

- [1] Roos, H.-G., Stynes, M. and Tobiska, L. (2008) Robust Numerical Methods for Singularly Perturbed Differential Equations. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.



- 
- [2] Kopteva, N. and Stynes, M. (2002) A Robust Adaptive Method for a Quasi-Linear One-Dimensional Convection-Diffusion Problem. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **39**, 1446-1467. <https://doi.org/10.1137/S003614290138471X>
- [3] Zheng, Q., Li, X.-Z. and Gao, Y. (2015) Uniformly Convergent Hybrid Schemes for Solutions and Derivatives in Quasilinear Singularly Perturbed BVPs. *Applied Numerical Mathematics*, **91**, 46-59. <https://doi.org/10.1016/j.apnum.2014.12.010>
- [4] Kopteva, N. (2001) Maximum Norm a Posteriori Error Estimates for a One-Dimensional Convection-Diffusion Problem. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **39**, 423-441. <https://doi.org/10.1137/S0036142900368642>
- [5] Linß, T. (2001) Uniform Pointwise Convergence of Finite Difference Schemes Using Grid Equidistribution. *Computing*, **66**, 27-39. <https://doi.org/10.1007/s006070170037>
- [6] 杨继明, 陈艳萍. 自适应迎风格式求解奇异摄动两点边值问题的高精度算法(一) [J]. 浙江大学学报(理学版), 2005, 32(5): 513-518.
- [7] 杨继明, 陈艳萍. 自适应迎风格式求解奇异摄动两点边值问题的高精度算法(二) [J]. 高等学校计算数学学报, 2009, 31(3): 277-288.
- [8] 孙力楠, 王安涛. 自适应网格下齐次奇异摄动问题的一致收敛性分析[J]. 兰州理工大学学报, 2011, 37(5): 131-136.