Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2021, 10(1), 299-304
Published Online January 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2021.101034

基于不同约束条件的地图符号定义的数学定义

钟业勋[1*]，郑红波[2]，叶　彤[1]，焦晨晨[3]

[1]海军工程大学导航工程系，湖北 武汉
[2]浙江工业大学计算机科学与技术学院，浙江 杭州
[3]中国地质大学地理与信息工程学院，湖北 武汉
Email: gxzyxun@163.com, 1078257034@qq.com

收稿日期：2020年12月25日；录用日期：2021年1月19日；发布日期：2021年1月28日

摘　要

地图符号$qgf(x)$是制图对象x在f、g、q三重拓扑映射下的象。根据制图对象在现实中存在与否定义了模拟与虚拟地图符号；根据地图符号与地图比例尺相关、无关或半相关的质，定义了依比例符号、不依比例符号和半依比例符号；根据地图符号定位部的几何特征定义了点状符号、线状符号和面状符号。

关键词

拓扑映射，等势，地图符号的数学定义，约束条件

Mathematical Definitions of Map Symbols Based on Different Bind Conditions

Yexun Zhong[1*], Hongbo Zheng[2], Tong Ye[1], Chenchen Jiao[3]

[1]Department of Navigation Engineering, Naval University of Engineering, Wuhan Hubei
[2]School of Computer Science and Technology, ZheJiang University of Technology, Hangzhou Zhejiang
[3]School of Information and Engineering, China University of Geosciences, Wuhan Hubei
Email: gxzyxun@163.com, 1078257034@qq.com

Received: Dec. 25th, 2020; accepted: Jan. 19th, 2021; published: Jan. 28th, 2021

Abstract

Map symbol $qgf(x)$ is a image of mapping object x under three times topological mapping f, g, q. According to mapping object is in actuality existence or not the authors have defined the imitative

*第一作者。

文章引用: 钟业勋, 郑红波, 叶彤, 焦晨晨. 基于不同约束条件的地图符号定义的数学定义[J]. 应用数学进展, 2021, 10(1): 299-304. DOI: 10.12677/aam.2021.101034

and virtual map symbol; according to map symbol with map scale relate, not relate or semi-relate have defined the scale symbol, non-scale symbol and semi-scale symbol; according to the geometry character of map symbol location part defined gave the point map symbol, Line map symbol and area map symbol.

Keywords

Topological Mapping, Equipollence, Mathematieal Definition of Map Symbol, Bind Condition

1. 引言

在科学思维中，概念思维方式极为活跃，具有突出的创造性和科学发现的力量。科学概念经过数学操作和处理而获得确定性[1]。概念是反映事物本质属性的思维形式，概念中对象的本质属性的总和，称为概念的内涵。反映适合于该概念的一切个别对象，称为概念的外延。定义是揭示概念内涵的一种逻辑方法。用一种外延较广的概念来定义外延较窄的概念，一般是指出被下定义的概念最邻近的属概念和能使它与其它对象区别的本质属性(通常叫种差)，公式是：

被下定义的概念 = 属概念 + 种差[2]。

在定义地图符号的基础上，给定不同的约束条件，可以推导出不同形式的地图符号的数学定义。本文推导了模拟与虚拟地图符号，依比例符号、不依比例符号和半依比例符号，点状地图符号、线状地图符号、面地图符号等基于不同约束条件的地图符号数学定义，每种具体地图符号的外延都被地图符号的外延所包含，而每种具体的地图符号的内涵又都比地图符号的内涵丰富。

2. 函数、基数和等势

2.1. 函数

[定义1] 映射　设f是X到Y的关系，$f \subset X \times Y$，如果$\forall x \in X$，存在唯一的$y \in Y$，使得$(x, y) \in f$，则称f是从X到Y的映射(函数)，记作$f: X \to Y$，而称X是f的定义域。若$(x, y) \in f$，则用$y = f(x)$表示，并称y是在f之下的像或值[3]。

映射、变换、函数或者对应，都是函数的同义词。

2.2. 双一一函数

[定义 2]　双一一函数　设$f: X \to Y, x, x' \in X$，如果

$$x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x') \tag{1}$$

则称f是x到y内的单函数或一一函数。如果f既是x到y上的满函数，又是单函数，则f叫做x到y上的双一一函数。

2.3. 基数和势

[定义 3] 基数　对于每个集合A，给它一个记号$cardA$，使得当且仅当集合$B \sim A$时，才有

$$cardA = cardB$$

那么，$cardA$ 就叫做集合 A 的基数或势，也即 A 的元素的个数。

单位区间 $I = [0,1]$ 的基数称为连续统的势，记为 $card = c$。任何非退化区间都具有连续统的势，即其基数均为 c。

2.4. 等势

[定义 4] 等势　设 A 与 B 表示任意两个集合，如果存在着 A 到 B 上的双一一函数，我们就说集合 A 与集合 B 等势，记作 A~B [4]。

3. 地图符号生成的拓扑学原理

生成地图符号的拓扑映射

地图表示的对象(制图对象) x 是制图区域 D 中的事物，D 为地理空间 X 中的一个子集，即 $x \in D \in X$。由于制图对象存在空间定位的问题，即需要投影到地球椭球面 S 上，获得以经纬度表示的位置信息，故存在从三维空间 X 到地球椭球面 S 的映射 $f: X \to S$。

制图对象 x 及其在地球椭球面上的投影 $f(x)$ 的属性特征、数量特征、形状特征等相关知识，被制图者获取和认识，是对其进行地图表示的前提。因此，存在着从 S 到主体认知结构 Y 的映 $g: S \to Y$。主体关于制图对象的知识，是以观念形态存在于主体大脑中的，看不见摸不着而又确实存在，具有非空性，即 $\forall x \in D \in X$，在 f 映射下 $f(x) \in f(D) \in S$，由于 X 与 S 为物质系统，

$$x \neq \varnothing \Rightarrow f(x) \neq \varnothing, \quad x = \varnothing \Rightarrow f(x) = \varnothing, \quad \forall x \neq \varnothing \vee x = \varnothing \Rightarrow gf(x) \in gf(D) \in Y \wedge gf(x) \neq \varnothing \tag{2}$$

(2)式表明，现实中存在或不存在(已消亡或未产生)的事物，其相关知识可以存在于主体认知结构 Y 中。$gf(x) \neq \varnothing | x \neq \varnothing \vee x = \varnothing$ 表达了这样一个事实，现实中存在的事物(如一栋正在使用的建筑物)或现实中已消亡的事物(如某城市过去的历史)，其相关知识和信息依然存在于认识主体的认知结构中，这种“虚”中存在的表达。大量的历史事实，现现中已不存在，但记录其过去存在的历史文献，作为非物质文化遗产，却能通过传承而被后人了解和认识。这种非物质的科学和文化知识的可积累性和可传承性，是人们间接获得前人认知成果和历史知识的必由之路[5] [6] [7] [8]。

主体认识结构 Y 中的信息，包括现实存在事物的知识，已消亡实体的知识(历史知识)和主体对未来的规划、预测和种种创新构想，都可以用文字描述或用地图符号表示，使之成为可视化信息。从隐形信息可显化的必然性，可知存在着从主体认知结构 Y 到二维平面 Z 的映射 $q: Y \to Z$。

任何制图区域都是有限区域，即属非退化区间。根据非退化区间都具有连续统的势的定理，可知 $D, f(D), gf(D)$ 和 $qgf(D)$ 为等势集合，即

$$D \sim f(D) \sim gf(D) \sim qgf(D) \tag{3}$$

(3)式也可从另一角度推出。制图区域内的制图对象，在一定的专题，一定比例尺条件下被制图主体选取、分类、概括之后，一一对应地被以点、线、面地图符号表示到地图上。实地一点上，原本具有多种属性的，如可以是高程，人口，气温等等。但是，在一定专题和一定比例尺条件下，它的属性被唯一地确定了，这种实地与地图的一一对应性(有条件的一一对应)显而易见。点、线、面地图符布满全图，任一点上，不属构成图形的点线符号，就属于构成背景的面状符号，二者必居其一，其满射特点一目了然。根据双一一函数的定义，可见任何地图都是制图区域在一定专题，一定地图比例尺和确定的制图时刻下的双一一函数。根据具有双一一函数的集合等势的原理，也可推出(3)式。

[定义 5] 地图符号　设 $x \in D \in X$ 为三维空间 X 中制图区域 D 内的的制图物体，存在三维空间 X 到地球椭球面的映射 $f: X \to S$，椭球面 S 到主体认知结构 Y 的映射 $g: S \to Y$ 以及 Y 到二维平面 Z 的映射 $q: Y \to Z$，x 在 f, g, q 三重拓扑映射下的平面象

$$qgf(x) \in qgf(D) \in Z \tag{4}$$

称为 x 的地图符号[9]。

4. 几种地图符号的数学定义

4.1. 模拟与虚拟地图符号

[定义 6]　模拟地图符号　若地图符号 $qgf(x)$ 在 $t = t_k$ 时刻满足条件：

$$x \neq \varnothing \wedge f(x) \neq \varnothing \wedge gf(x) \neq \varnothing \Rightarrow qgf(x) \neq \varnothing \tag{5}$$

则称 $qgf(x)$ 为 x 在 t_k 时刻的模拟地图符号，也就是现实存在物的地图符号。

[定义 7]　虚拟地图符号　若地图符号在 $t = t_k$ 时刻满足条件：

$$x = \varnothing \wedge f(x) = \varnothing \wedge gf(x) \neq \varnothing \Rightarrow qgf(x) \neq \varnothing \tag{6}$$

则称 $qgf(x)$ 为 x 的虚拟地图符号，也就是现实并不存在的事物的地图符号[10]。

比较(5)、(6)式可知，模拟与虚拟地图符号的本质差异在于地图符号 $qgf(x)$ 表示的对象 x 在现实世界中是否有实体对应。而在主体认知结构中的关于 x 和 $f(x)$ 的相关知识却是始终存在的，表现为 $gf(x) \neq \varnothing$。

4.2. 依比例符号、不依比例符号和半依比例符号

[定义 8] 依比例符号　设地图比例尺为 $1:M$，$qgf(x)$ 为 x 的地图符号，若下列条件满足：

$\forall p \in qgf(x)$，$\exists P_\alpha \in qgf(x)$，使得

$$MP_\alpha = (qg)^{-1}(P_\alpha) \Big| \alpha \in \left[0^\circ, 360^\circ\right] \tag{7}$$

则称 $qgf(x)$ 为 x 的依比例符号。

(7)式中 α 的任意性，使得地图符号内任意方向的线段与比例尺分母 M 的乘积，恒等于该线段在地球椭球面上的逆象，这是依比例符号的本质特征。如依比例表示的湖泊，林地等均属此列。

[定义 9] 不依比例符号　设地图比例尺为 $1:M$，$qgf(x)$ 为 x 的地图符号，若下列条件满足：

$\forall p \in qgf(x)$，$\exists P_\alpha \in qgf(x)$，使得

$$MP_\alpha > (qg)^{-1}(P_\alpha) \Big| \alpha \in \left[0^\circ, 360^\circ\right] \tag{8}$$

则称 $qgf(x)$ 为 x 的不依比例符号。

(8)式表明，在不依比例符号内，任意方向的线段 p_α 与地图比例尺分母的乘积，恒大于该线段在椭球面上的逆象，这是由于地图符号的面积已作了放大，其放大倍率随地物的不同(如三角点和庙宇)、方向的不同、比例尺的不同而千差万别。这也是其与地图比例尺不相关和定名的依据。(8)式是不依比例符号应满足的充要条件。控制点、独立符号等即属此列。

[定义 10] 半依比例符号　设地图比例尺为 $1:M$，$qgf(x)$ 为 x 的地图符号，若下列条件满足：

$\forall p \in qgf(x)$，$\exists P_\alpha, p_{\alpha'} \in qgf(x)$，使得

$$MP_\alpha = (qg)^{-1}(P_\alpha) \wedge Mp_{\alpha'} > (qg)^{-1}(P_{\alpha'}) \Big| \alpha' = \alpha + 90^\circ, \alpha \in \left[0^\circ, 360^\circ\right] \tag{9}$$

则称 $qgf(x)$ 为 x 的半依比例符号，其中 α 为依比例方向而 α' 为不依比例方向。

(9)式中，α 的任意性和 p_α 与 $p_{\alpha'}$ 的相互垂直，使其能表达任意弯曲特征的线状地物[11] [12] [13]。地图符号与地图比例尺的半相关性，也是其获得此名的根据。如道路，境界线等即属此列。

4.3. 点状地图符号、线状地图符号、面状地图符号

[定义 11] 点状地图符号　存在平面点 $p \in Z$，若地图符号 $qgf(x)$ 以 p 为定位中心定位，则称 $qgf(x)$ 为 x 的点状地图符号。

点状地图符号一般又具有非比例符号的性质。

[定义 12] 线状地图符号　设 $l \in Z$ 为平面 Z 上的线段、折线、曲线或多种线的组合，$\forall p, p' \in l \Rightarrow N_p \cap N_{p'} \neq \varnothing$。若地图符号 $qgf(x)$ 以 $l \in qgf(x)$ 为定位中心定位，则称 $qgf(x)$ 为 x 的线状地图符号。

线状地图符号又具有半依比例符号性质。

[定义 13]　面状地图符号　设 $F \in Z$ 为平面 Z 上的一个连通有界面，$\forall p, p' \in l \Rightarrow N_p \cap N_{p'} \neq \varnothing$。若地图符号 $qgf(x)$ 以 F 定位并指代 F 上的属性特征，则称 $qgf(x)$ 为 x 的面状地图符号[14] [15]。

面状地图符号一般又具有依比例符号的性质。

5. 结语

根据制图物体需要进行地球椭球面定位，其位置特征、属性和数量、形状信息及与其他相关地物的邻接、相离、包含等关系，需要被制图者了解和认识，以及制图者可将其对制图物体的认识，以地图语言表达的可能，阐释了地图符号生成的拓扑学原理。在推出地图符号定义的基础上，根据制图对象在制图时刻是否现实存在而导出了模拟和虚拟地图符号；根据地图符号与地图比例尺相关、无关或半相关条件，导出了依比例符号、不依比例符号和半依比例符号；根据地图符号定位部的几何特征，分别导出了点状地图符号、线状地图符号和面状地图符号。从几种地图符号的约束条件及其表达形式的异同中，揭示了其本质特征和内在联系。这种基于不同约束条件的地图符号的数学定义，既是对地图符号体系的数学表达和概括，又能对具体的地图符号进行合理的解释。

基金项目

国家自然科学基金项目(41671459)；国家自然科学基金青年项目(61702455)。

参考文献

[1] 周昌忠, 科学思维学[M]. 上海: 上海人民出版社, 1988.

[2] 谷超豪, 主编. 数学词典[M]. 上海: 上海辞书出版社, 1992.

[3] 程吉树, 陈水利. 点集拓扑学[M]. 北京: 科学出版社, 2008.

[4] 李考传, 陈玉清. 一般拓扑学导引[M]. 北京: 高等教育出版社, 1982.

[5] 钟业勋, 朱重光, 魏文展. 地图空间认知的数学原理[J]. 测绘科学, 2005, 30(5): 11-12. http://dx.chinadoi.cn/10.3771/j.issn.1009-2307.2005.05.002

[6] 钟业勋, 边少锋, 李松林, 胡宝清, 洪锋. 主体意图的表达, 变换及实现的数学模型[J]. 南宁师范大学学报(自然科学版), 2019, 36(4): 45-49. http://dx.chinadoi.cn/10.16601/j.cnki.issn2096-7330.2019.04.008

[7] 钟业勋, 边少锋, 胡宝清, 李松林. 主体观念模型修改完善的数学模型[J]. 测绘科学, 2020, 45(10): 198-202. http://dx.chinadoi.cn/10.16251/j.cnki.1009-2307.2020.10.028

[8] 钟业勋, 金立新, 叶彤, 胡宝清, 李明辉. 基于物质空间到认知空间映射的思维创新阐释[J]. 南宁师范大学学报(自然科学版), 2020, 37(3): 44-50. http://dx.chinadoi.cn/10.16601/j.cnki.issn2096-7330.2020.03.009

[9] 钟业勋, 胡宝清. 数理地图学[M]. 北京: 测绘出版社, 2017.

[10] 钟业勋. 模拟与虚拟地图符号及地理虚拟空间的数学定义[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2005, 30(6): 557-559. http://dx.chinadoi.cn/10.3969/j.issn.1671-8860.2005.06.021

[11] 黄鹄, 钟业勋. 依比例符号、不依比例符号和半依比例符号数学定义的改进[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2006, 31(3), 244-246. http://dx.chinadoi.cn/10.3969/j.issn.1671-8860.2006.03.014

[12] 钟业勋, 胡宝清, 郑红波. 地图符号的基本结构和功能[J]. 桂林理工大学学报, 2011, 31(2): 229-232. http://dx.chinadoi.cn/10.3969/j.issn.1674-9057.2011.02.011

[13] 钟业勋, 魏文展, 彭月英, 郑红波. 地图符号数学定义的研究[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2001, 26(5): 465-468. http://dx.chinadoi.cn/10.3969/j.issn.1671-8860.2001.05.017

[14] Wei, W.Z., Zhong, Y.X., Peng, Y.Y. and Zheng, H.B. (2003) Mathematical Definitions of point, Line and Area Symbols in Cartography. *Geo-Spatial Information Science*, **6**, 62-65. https://doi.org/10.1007/BF02826895

[15] 黄鹄, 钟业勋. 点线面地图图符号定义的简化与统一[J]. 测绘科学, 2005, 30(6): 69-70. http://dx.chinadoi.cn/10.3771/j.issn.1009-2307.2005.06.023