Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2021, 10(10), 3343-3350
Published Online October 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2021.1010351

Hans汉斯

基于凸二次规划的基金投资风格分析模型

杨　悦，张美丽

海军大连舰艇学院基础部数学教研室，辽宁 大连

收稿日期：2021年9月15日；录用日期：2021年10月8日；发布日期：2021年10月18日

摘　要

简要分析了基金风格划分常用的基于收益时间序列的回归法(RBSA法)和基于持仓数据的分析法(PBSA法)，重点讨论了RBSA方法，根据Sharpe的回归分析模型，解释RBSA方法不仅能合理构造基金业绩评价基准，还能客观展现基金经理的主动选择能力。作相关假设把回归模型转化为一个凸二次规划问题，利用最优化理论转化为求解局部极小值问题，并且介绍了一种降维算法，能有效快速地求解此类问题。

关键词

凸二次规划，基金投资风格分析，RBSA法，降维算法

The Fund Investment Style Analysis Model Based on Convex Quadratic Programming

Yue Yang, Meili Zhang

Department of Mathematics, Dalian Naval Academy, Dalian Liaoning

Received: Sep. 15th, 2021; accepted: Oct. 8th, 2021; published: Oct. 18th, 2021

Abstract

This paper briefly presents Portfolio-Based Style Analysis and Return-Based Style Analysis for fund investment and focuses on the latter. According to the regression model of Sharpe, merits of RBSA method have been explained, which can not only construct reasonable benchmark to evaluate fund performance, but also can show fund managers' abilities objectively. The regression model has been turned into a convex quadratic programming based on some assumptions, so the relevant optimization theory could be used. A dimension reduction algorithm has been introduced to solve such problems quickly and effectively.

文章引用: 杨悦, 张美丽. 基于凸二次规划的基金投资风格分析模型[J]. 应用数学进展, 2021, 10(10): 3343-3350.
DOI: 10.12677/aam.2021.1010351

Keywords

Convex Quadratic Programming, Fund Investment Style Analysis, RBSA Method, Dimension Reduction Algorithm

1. 引言

一般地，基金的投资风格决定着基金的收益表现风格，从而具有不同的风险收益特征，满足投资者不同的风险偏好，对基金风格的划分具有降低投资者的选择成本，便于评价基金的业绩，帮助基金经理监控风险头寸和改进投资流程等作用。据调查分析，长期来看风格因子对股票基金整体组合的风险贡献为 44.63%，行业因子的风险贡献为 13.77%，而残差项(也就是主动管理)的风险贡献为 41.61%。故而基金风格分析成为时下讨论的热门，有必要从理论和实务方面进行深入研究。

2. 基金投资风格的划分

根据不同的投资理念，基金风格可以划分为两类：主动型基金和消极型基金。主动型基金期望借助基金管理人专业分析和经验判断以及信息资源优势，识别出错误定价的股票，通过买入价值低估的，卖出价值高估的股票，获取超过市场基准组合的收益。而消极型基金则相反，不期望超额的收益，只是尽量复制市场的指数，以获得市场平均收益率，常作为避险套利的工具。也常称它们为一般股票型基金和指数型基金，前者采用主动的策略和积极的管理；而后者对应被动的策略和消极的管理在投资策略是消极被动的。

积极型基金和消极型基金的区分是一目了然的，所以基金风格研究一般都是针对积极型基金的不同特点进行的。此外，按照基金所投资股票市值的大小可划分为大、中、小盘型基金，按照基金所投资股票公司所处的发展阶段可分为成长型基金和价值型基金。成长型基金指那些投资于处在发展成长期公司股票的基金，价值型基金则是投资于处在发展成熟期公司的股票。

3. 基金投资风格判别方法

确定基金投资风格后，如何判断一只基金归属于哪一类是研究的重点。现在比较流行的两种判定方法有 PBSA 法和 RBSA 法，PBSA (Portfolio-Based Style Analysis)是基于投资组合特征的风格分析，RBSA (Return-Based Style Analysis)是基于收益的风格分析，主要通过回归分析，度量各个因素回归系数。两种方法各有利弊，下面做简要分析[1]。

3.1. PBSA 方法

PBSA 方法通过直接分析一只基金实际持有成分的数据来判断它的资产组合情况，从而确定该基金的风格。该方法使用简单，首先获取基金所持有的投资组合信息，然后根据组合中的股票不同的特点进行分类，最后计算所有股票特征的加权平均，得到基金的总体特征，判断出该基金的投资风格。例如著名的美国晨星公司(Morning Star)就是采用 PBSA 方法来判定基金风格[2]。

3.1.1. PBSA 的优点

1) 该方法可以不受以往历史信息的干扰，仅需知道基金某一时刻的持仓数据便可提供关于投资风格的即时信息，清楚基金经理最新的投资计划与资产配置战略。2) 利用基金持仓数据，可判断基金的投资策略是否有效。分析发现，业绩落后基金在风格配置上存在比较严重的风险与收益不匹配的问题，而绩优基金展现了基金经理较强的主动管理能力，主要是选股能力。3) 可以及时观测基金风格的变动，通常变动可能跟基金业绩有关，越频繁其业绩越差的。

3.1.2. PBSA 的缺点

1) 基金投资组合的信息往往很难及时披露，并且耗费时间，分析成本高昂。2) PBSA 要求将基金持有的每只股票都确定为某一单一风格类别，但很多情况下该股票并不一定完全归于此类别，这就会导致判断存在偏差。

3.2. RBSA 方法

1990 年诺贝尔经济学奖得主 William Sharpe (1988, 1992)，在两篇非常有影响力的文章[3] [4]中，阐述了如何运用约束优化工具来判定一只基金投资风格的有效性，针对多因素模型提出了 RBSA 法，即基于收益时间序列的回归法。仅需要知道该基金的历史收益时间序列以及一些精心挑选的资产组合的同期收益时间序列，进行线性回归分析，然后根据回归系数和决定系数(R^2)的大小来判断基金的风格，也就是根据基金的收益波动对各种风格资产收益波动的敏感性大小来分类[5]。这些精心挑选的资产组合构建成一系列各种风格的基准组合，它们必须满足一定的特征才能保证回归分析方法的有效：1) 互斥性，这要求一只股票属于且只属于一个资产类；2) 不相关性，要求基准组合必须具有不同的风险收益特征，即要求资产类收益不相关；3) 完备性，即各种风格资产不能包含相同的股票。确定了基准组合，通过比较基金实际收益与哪种基准组合收益相近，从而认为该基金为此基准风格。

与 PBSA 法相比，RBSA 方法在业内使用更普遍，主要是因为简便实用。

3.2.1. RBSA 的优点

1) 分析成本低，仅根据历史收益数据即可，操作方便。2) RBSA 更容易作出正确的基金风格判断，因为该方法只分析基金的收益，不受其股票类型影响，真实收益和风险特征更容易被发现。3) 能更加客观和准确地评价基金经理的投资能力。基金经理的优秀投资能力主要是体现在 RBSA 模型中的残差项，它与风格收益共同决定基金收益。4) 能够有效地构造基金业绩评价基准(Benchmark)。Lehmann 和 Modest (1987) [6]的研究显示，设定基金基准是否恰当，直接关系到最终基金的业绩评价结果。只有在剔除了不可控的风格因素后，我们才能看到真正由基金经理个人能力所带来的超额收益。

3.2.2. RBSA 的缺点

1) 风格基准的准确划分直接影响 RBSA 方法的有效性。风格基准三个特征中的不相关性在现实问题中很难满足，若是不同风格基准之间的收益相关程度很高，这会导致回归分析中存在严重的多重共线性问题。

2) RBSA 对基金投资风格的变化反映不灵敏。由于 RBSA 使用的是某个时间段内的历史收益数据，算出的是该时间段内基金风格的平均状况。

3) 对未来的预测上，RBSA 不如 PBSA 有效。RBSA 对不同时间点的历史信息赋予相同权重，但显然距离现在时间点越远的数据对当前基金风格的解释力度越小，相关性减弱。Chan，Chen 和 Lakonishok (1999) [7]验证了 PBSA 对基金未来收益预测的偏差相对更小。

4. RBSA 的优化模型

在信息不易获得或者是信息已过时的时候，RBSA 不妨为一个省时省钱的方法，因为它只需要知道历史收益，这都是易得的公开信息。首先，收集历史数据，由 RBSA 模型进行回归分析，求出各个风格的回归系数，从而确定该基金的风格。然后，计算某个时间点该基金风格收益，并作为基准组合的收益；最后，将该期间的真实收益与基准组合收益作差，体现基金经理的管理能力(股票选择能力和市场时机选择能力)。下面介绍 RBSA 方法的优化模型。

假设，R_t 为模型考虑的窗口期内 t 时期某个投资组合(基金)的收益，该基金通常是共同基金，$t=1,\cdots,T$。再令 F_{it} 表示 t 时期基准组合中风格指数(某个基准资产) i 的收益，$i=1,\cdots,n$，$t=1,\cdots,T$，作回归分析 R_t 可以表示成：

$$R_t=\omega_{1t}F_{1t}+\omega_{2t}F_{2t}+\cdots+\omega_{nt}F_{nt}+\varepsilon_t=F_t\omega_t+\varepsilon_t,\ t=1,\cdots,T. \tag{1}$$

在式(1)中，参数 ω_{it} 表示基金对 n 个基准资产构成的风格基准组合中第 i 个指数的敏感度或相关程度，ε_t 是非因素部分的收益，与风格指数收益无关，这里通常假设 $\varepsilon_t,t=1,\cdots,T$ 是不相关的。我们引用记号 $\omega_t=[\omega_{1t},\cdots,\omega_{nt}]^{\mathrm{T}}$，$F_t=[F_{1t},\cdots,F_{nt}]$。

Sharpe 认为基金的收益是各基准资产收益的加权之和，其对应权重为 ω_{it}，在他最先的文章中，基准资产被分为六类：价值(Value)、增长(Growth)、大盘(Large)、中盘(Medium)和小盘(Small)的组合。Sharpe 在 1992 年的文章中又给出了 12 种风格基准组合[4]，由历史收益进行回归分析，基金风格取决于回归系数显著的风格基准，基金业绩与基金风格的关系还可以通过相关系数来分析。

R_t 与基准组合收益 $F_t\omega_t$ 的差 ε_t 是基金经理进行积极投资，主动择时购买股票产生的额外收益，当然有时它也可能是负的。与多因素模型不同，对于基准市场组合的收益 $F_t\omega_t$ 是由基金的投资风格所决定的，也就是不可控的，我们还应慎重选择 ω_{it}，在不允许卖空的基础上，它们均不为负，且加和为 1。有了这些约束 Sharpe 给出了求解 ω_{it} 使得非因素部分收益方差最小化的模型，这里为了处理简单，假设 ω_{it} 与时间 t 无关，用 $\omega=[\omega_1,\cdots,\omega_n]^{\mathrm{T}}$ 表示与时间无关的指数权重。

$$\begin{aligned}&\min_{\omega\in\Re^n} Var(\varepsilon_t)=Var(R_t-F_t\omega)\\ &\text{s.t.}\quad \sum_{i=1}^{n}\omega_i=1\\ &\qquad\ \ \omega_i\ge 0,i=1,\cdots,n.\end{aligned} \tag{2}$$

目标函数是最小化非因素部分收益 ε_t 的方差，这里做出说明。本质上，我们要计算的是一个追踪问题，ε_t 相当于是追踪误差，为什么这里不是求 ε_t 的绝对值而是求它的方差呢？因为 Sharpe 的模型把残差项 ε_t 解释为基金经理始终如一的贡献，目标是确定一个基准组合使得基金的收益与基准组合的收益的差额近乎为一个常数(这时方差为 0)。显然这里的最优值是使得 ε_t 变成常数的指数权重，它使得基金收益线跟基准收益线处于平行关系，也就是基金经理的基金管理水平保持稳定一致。这样上述模型几乎等价于求回归模型(1)的可决系数 $R^2=1-\dfrac{Var(\varepsilon_t)}{Var(R_t)}$ 的最大值，R^2 也可以用来解释基金的资产配置对基金收益的贡献度，但这种等价显然不够精确，因为模型(2)有约束条件，这样会导致 ε_t 和 R_t 存在一定的相关性。

设 $R=[R_1,\cdots,R_n]^{\mathrm{T}},\omega=[\omega_1,\cdots,\omega_n]^{\mathrm{T}},e=[1,\cdots,1]^{\mathrm{T}}$，

$$F=(F_1,\cdots,F_T)^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}F_{11}&\cdots&F_{n1}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ F_{1T}&\cdots&F_{nT}\end{pmatrix}.$$

要求的目标函数为：

$$
\begin{aligned}
Var\left(R_t-F_t\omega\right) &= E\left[\left(R_t-F_t\omega\right)^2\right]-\left[E\left(R_t-F_t\omega\right)\right]^2 \\
&= \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(R_t-F_t\omega\right)^2-\left[\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(R_t-F_t\omega\right)\right]^2 \\
&= \frac{1}{T}\left\|R-F\omega\right\|^2-\left(\frac{e^{\mathrm{T}}\left(R-F\omega\right)}{T}\right)^2 \\
&= \left(\frac{\left\|R\right\|^2}{T}-\frac{\left(e^{\mathrm{T}}R\right)^2}{T^2}\right)-2\left(\frac{R^{\mathrm{T}}F}{T}-\frac{e^{\mathrm{T}}R}{T^2}e^{\mathrm{T}}F\right)\omega \\
&\quad +\omega^{\mathrm{T}}\left(\frac{1}{T}F^{\mathrm{T}}F-\frac{1}{T^2}F^{\mathrm{T}}ee^{\mathrm{T}}F\right)\omega.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

其中，所有的变量均看作是离散时间变量，这个关于 ω 的二次函数的凸性易证明，注意到

$$
\frac{1}{T}F^{\mathrm{T}}F-\frac{1}{T^2}F^{\mathrm{T}}ee^{\mathrm{T}}F=\frac{1}{T}F^{\mathrm{T}}\left(1-\frac{1}{T}ee^{\mathrm{T}}\right)F, \tag{4}
$$

令式(4)右边中出现的对称矩阵 $M=1-\frac{1}{T}ee^{\mathrm{T}}$，求它的特征根，$\left|M-\lambda I\right|=\left|\left(1-\lambda\right)I-\frac{ee^{\mathrm{T}}}{T}\right|=0$，可得 $\lambda=1$（$T-1$ 重根)，或 $\lambda=0$，知 $\lambda\geq 0$，所以 M 是半正定的，从而 $F^{\mathrm{T}}MF$ 也是半正定的，由凸函数的判定定理知 ε_t 的方差是一个关于 ω 的凸二次函数，则问题(2)变成了一个凸二次规划问题，对于凸规划问题，它的任一局部最优解也就是整体最优解[8]。

5. 凸二次规划的求解算法

对于这样的凸二次规划问题，内点法是十分实用并且有效的方法，关键是找到可行的下降方向和适当的步长。这里对一般等式约束二次规划常用的 Lagrange 解法进行改进，以解决 Lagrange 解法的不足之处：1) 构建线性方程组的方程个数多，占用内存大，增加计算量；2) 需要计算矩阵的逆。该方法主要是通过降维来减少计算量，节省存储空间，提高运算速度。

考虑下面的规划问题：

$$
\text{(P)}\quad\begin{cases}\min f\left(x\right)\\ \text{s.t.}\quad h\left(x\right)=0\end{cases} \tag{5}
$$

其中，$f\left(x\right)$ 是二次连续可微实值函数，$h\left(x\right):\Re^n\rightarrow\Re^m$ 是二次可微函数，$m\leq n$。

引理 4.1 [9]

若 $\exists\bar{x}\in\Re^n,\lambda=\left(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\right)^{\mathrm{T}}$ 满足：

1) $h\left(\bar{x}\right)=0$；

2) $\nabla f\left(\bar{x}\right)+\lambda^{\mathrm{T}}\nabla h\left(\bar{x}\right)=0$；

3) 矩阵 $L\left(\bar{x}\right)=\nabla^2 f\left(\bar{x}\right)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\nabla^2 h_i\left(\bar{x}\right)$ 在子空间 $T=\left\{x\in\Re^n:h\left(\bar{x}\right)x=0\right\}$ 上正定。

则 $\bar{x}$ 是(P)的严格局部极小点。

记 $p=n-m$，

$$P(x)=\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1},\frac{\partial f(x)}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial f(x)}{\partial x_p}\right)^{\mathrm{T}},\ Q(x)=\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_{p+1}},\frac{\partial f(x)}{\partial x_{p+2}},\cdots,\frac{\partial f(x)}{\partial x_n}\right)^{\mathrm{T}},$$

$$N(x)=\begin{pmatrix}\frac{\partial h_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial h_1(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial h_1(x)}{\partial x_p}\\ \frac{\partial h_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial h_2(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial h_2(x)}{\partial x_p}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial h_m(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial h_m(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial h_m(x)}{\partial x_p}\end{pmatrix},\ M(x)=\begin{pmatrix}\frac{\partial h_1(x)}{\partial x_{p+1}} & \frac{\partial h_1(x)}{\partial x_{p+2}} & \cdots & \frac{\partial h_1(x)}{\partial x_n}\\ \frac{\partial h_2(x)}{\partial x_{p+1}} & \frac{\partial h_2(x)}{\partial x_{p+2}} & \cdots & \frac{\partial h_2(x)}{\partial x_n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial h_m(x)}{\partial x_{p+1}} & \frac{\partial h_m(x)}{\partial x_{p+2}} & \cdots & \frac{\partial h_m(x)}{\partial x_n}\end{pmatrix}.$$

定理 4.1 若 $\overline{x}\in\Re^n$ 是方程组

$$\begin{cases}P(x)=\left[M(x)^{-1}N(x)\right]^{\mathrm{T}}Q(x)\\ h(x)=0\end{cases}\tag{6}$$

的解，使得

1) $M(\overline{x})$ 非奇异；

2) 矩阵 $L(\overline{x})$ 在子空间 T 上正定。

则 $\overline{x}$ 是(P)的严格局部极小点。文献[10]中给出了上述定理的详细证明，由证明过程可知，方程组(6)的解必是(P)的一个 KKT 点，且对应的 Lagrange 乘子为 $\lambda=-\left[M(\overline{x})^{-1}\right]^{\mathrm{T}}Q(\overline{x})$，对于可微凸规划而言，KKT 点必是极小点,。

第三部分已经给出了 RBSA 方法划分基金投资风格的凸二次规划模型(2)，这里考虑一般含等式约束的二次规划问题：

$$(\mathrm{QP})\quad\begin{cases}\min\ f(x)=\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}Gx+g^{\mathrm{T}}x\\ \text{s.t.}\quad Ax=b\end{cases}\tag{7}$$

其中 $G=(g_{ij})_{n\times n}$ 为对称矩阵， $A=(a_{ij})_{m\times n}$， $g=(g_i)_{n\times 1}$， $b=(b_i)_{m\times 1}$，

令 $h(x)=Ax-b$，则 $\nabla h(x)=A$，

$$\nabla f(x)=Gx+g\tag{8}$$

假设矩阵 A 的秩为 m，则 A 中能找到一个 m 阶的非奇异子块 M，设 $M=\begin{pmatrix}a_{1,i_1} & \cdots & a_{1,i_m}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m,i_1} & \cdots & a_{m,i_m}\end{pmatrix}$，则 A 中剩余的元素构成子块 $N=\begin{pmatrix}a_{1,j_1} & \cdots & a_{1,j_p}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m,j_1} & \cdots & a_{m,j_p}\end{pmatrix}$，

由(8)式得

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_j}=\sum_{k=1}^{n}x_k g_{jk}+g_j,\quad j=1,\cdots,n.\tag{9}$$

从而由前面定义知

$$P(x)=\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_{j_1}},\frac{\partial f(x)}{\partial x_{j_2}},\cdots,\frac{\partial f(x)}{\partial x_{j_p}}\right)^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} g_{j_1,1} & \cdots & g_{j_1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{j_p,1} & \cdots & g_{j_p,n} \end{pmatrix}x+\begin{pmatrix} g_{j_1} \\ \vdots \\ g_{j_p} \end{pmatrix}=G_p x+g_p^*$$

$$Q(x)=\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_{i_1}},\frac{\partial f(x)}{\partial x_{i_2}},\cdots,\frac{\partial f(x)}{\partial x_{i_m}}\right)^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} g_{i_1,1} & \cdots & g_{i_1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{i_m,1} & \cdots & g_{i_m,n} \end{pmatrix}x+\begin{pmatrix} g_{i_1} \\ \vdots \\ g_{i_m} \end{pmatrix}=G_m x+g_m^*$$

令 $B=M^{-1}N$，则方程组(6)变成

$$\begin{cases}\left(G_p-B^{\mathrm{T}}G_m\right)x=B^{\mathrm{T}}g_m^*-g_p^* \\ Ax=b\end{cases}\tag{10}$$

对增广矩阵 $[A,b]$ 实施行的初等变换得到与 $Ax=b$ 等价的线性方程组 $A^*x=b^*$，设 A^* 的秩为 $r(r\le m)$，则 A^* 中存在一个 r 阶的单位矩阵 I_r，并取 $M=I_r$，$p=n-r$，注意到 $B=M^{-1}N=N$，则方程组(10)可化为

$$\begin{cases}\left(G_p-N^{\mathrm{T}}G_r\right)x=N^{\mathrm{T}}g_r^*-g_p^* \\ A^*x=b^*\end{cases}\tag{11}$$

令 $A_1=G_p-N^{\mathrm{T}}G_r$，$B_1=N^{\mathrm{T}}g_r^*-g_p^*$，$U=\begin{pmatrix}A_1\\A^*\end{pmatrix}$，$V=\begin{pmatrix}B_1\\b^*\end{pmatrix}$，则方程组(11)可以写成

$$Ux=V\tag{12}$$

这时我们可用 Gauss 列主元消去法解方程(12)，若(12)的解是 x^*，则由定理 4.1 知 x^* 是(QP)的极小点，当矩阵 G 是半正定时，(QP)是一个凸二次规划问题，x^* 即为全局极小点。

6. 结论

本文基于不同的基金投资风格，即基金在构建投资组合和选择股票的过程中所采取的投资战略，从而表现出的风格。对基金风格的划分比较常用的是基于收益率的回归法(RBSA 法)和基于持仓数据的分析法(PBSA 法)，两种方法各有利弊。本文重点讨论的是 RBSA 方法，利用最优化理论把回归分析转化为一个凸二次规划问题，主要通过回归分析，度量各个因素回归系数，并且介绍了一种降维的快速算法求解此类问题。对于这样的凸二次规划问题，内点法是十分实用并且有效的方法，关键是找到可行的下降方向和适当的步长。这里对一般等式约束二次规划常用的 Lagrange 解法进行改进，以解决 Lagrange 解法的不足之处：(1) 构建线性方程组的方程个数多，占用内存大，增加计算量；(2) 需要计算矩阵的逆。该方法主要是通过降维来减少计算量，节省存储空间，提高运算速度。

参考文献

[1] 吕兆德. 投资基金风格分析体系之构建研究[J]. 现代财经, 2007, 27(2): 34-36+43.

[2] Morning Star. New Style Box Methodology. https://www.morningstar.com/

[3] Sharpe, W.F. (1988) Determining a Fund's Effective Asset Mix. *Investment Management Review*, 59-69.

[4] Sharpe, W.F. (1992) Asset Allocation: Management Style and Performance Measurement. *Journal of Portfolio Management*, **18**, 7-19. https://doi.org/10.3905/jpm.1992.409394

[5] 曾晓洁, 黄嵩, 储国强. 基金投资风格于基金分类的实证研究[J]. 金融研究, 2004(3): 66-78.

[6] Lehmann, B.N. and Modest, D.M. (1987) Mutual Fund Performance Evaluation: A Comparison of Benchmarks and Bench-

mark Comparisons. *The Journal of Finance*, **42**, 233-265. https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1987.tb02566.x

[7] Chan, L.K.C., Chen, H.L. and Lakonishok, J. (2002) On Mutual Fund Investment Styles. *Review of Financial Studies*, **15**, 1407-1437. https://doi.org/10.1093/rfs/15.5.1407

[8] 袁亚湘, 孙文瑜. 最优化理论与方法[M]. 北京: 科学出版社, 1999.

[9] 胡毓达. 非线性规划[M]. 北京: 高等教育出版社, 1990.

[10] 童东付, 李泽民. 二次规划问题的降维算法[J]. 重庆建筑大学学报, 1999, 21(5): 64-68.