Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2021, 10(10), 3390-3398
Published Online October 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2021.1010356

几类IC-平面图的退化性

田鸿珲

浙江师范大学，数学与计算机科学学院，浙江 金华

收稿日期：2021年9月18日；录用日期：2021年10月14日；发布日期：2021年10月21日

摘 要

若图G的每一个子图H都有$\delta(H) \leq k$，则称G是k-退化的. 根据不含k-圈($k \in \{3,5,6\}$)的平面图是3-退化的，本文证明了不含k-圈的IC-平面图是4-退化的. 本文还进一步证明了3-圈与4-圈不相邻，3-圈与5-圈不相邻或4-圈与4-圈不相邻的IC-平面图也是4-退化的. 同时，本文给出了不含k-圈($k \in \{3,4,5,6\}$)且4-正则的IC-平面图的例子。

关键词

IC-平面图，退化性，权转移

Degeneracy of Some Classes of IC-Planar Graphs

Honghui Tian

Department of Mathematics, Zhejiang Normal University, Jinhua Zhejiang

Received: Sep. 18^{th}, 2021; accepted: Oct. 14^{th}, 2021; published: Oct. 21^{st}, 2021

Abstract

If every subgraph H of graph G has $\delta(H) \leq k$, then G is k-degenerate. A planar

文章引用: 田鸿珲. 几类IC-平面图的退化性[J]. 应用数学进展, 2021, 10(10): 3390-3398.
DOI: 10.12677/aam.2021.1010356

graph without k-cycles ($k \in \{3,5,6\}$) is 3-degenerate, this paper proves that an IC-planar graph without k-cycles is 4-degenerate. This paper is further proved that the IC-planar graph with 3-cycle not adjacent to 4-cycle, 3-cycle not adjacent to 5-cycle or 4-cycle not adjacent to 4-cycle is also 4-degenerate. And we give an example of 4-regular IC-planar graphs without k-cycles ($k \in \{3,4,5,6\}$).

Keywords

IC-Planar Graph, Degeneracy, Discharging

1. 引言

本文所讨论的图都是有限简单无向图. 文中未加说明的术语见文 [1]. $V(G)$, $E(G)$分别表示图G的顶点集和边集. 平面图是图在平面上的一种嵌入, 使得任意两条边仅在端点处相交. 若G是平面图, 我们用$F(G)$来表示图G的面集. 如果图G可以嵌入到平面上, 使得每条边最多被交叉一次, 则称其为1-平面图, 该平面嵌入称为1-平面嵌入. 1- 平面图是Ringel [2]于1965年研究平面图的点-面染色时提出的. 若图G是1-平面图且存在一种平面嵌入, 使得含交叉点的边组成的集合是图G的一个匹配(即任意两条被交叉边的四个端点都不重合), 则称图G是IC-平面图, 该平面嵌入称为IC-平面嵌入. IC-平面图是Alberson [3]在2008年提出来的, 并猜想每个IC-平面图都是5-可染的. 此猜想后来被Kral与Stacho [4]证明成立. 若图G的IC-平面嵌入满足其交叉点个数是所有IC-平面嵌入中最少的, 则称此IC-平面嵌入为最优IC-平面嵌入.

设G是IC-平面图且是最优IC-平面嵌入. 令$C(G)$是G中所有交叉点组成的集合, $E_0(G)$是G中不含交叉点的边组成的集合. 按如下方式定义G的关联平面图$G^\times$: $V(G^\times) = V(G) \cup C(G), E(G^\times) = E_0(G) \cup \{xz, yz | xy \in E(G) \setminus E_0(G)$, 且$z$是含在边$xy$上的交叉点$\}$. 则$G^\times$是平面图, 且对任意$z \in C(G)$, 有$d_{G^\times}(z) = 4$. 称$C(G)$中的点为假点, $V(G)$中的点为真点. 由IC-平面图的定义知任意两个假点在$G^\times$中不相邻, 且每一个真点至多与一个假点相邻. 若$G^\times$中的面f至少与一个假点关联, 则称f为假面; 不与假点关联的面称为真面.

令$v \in V(G)$, 称点v的所有邻点组成的集合为点v的邻域, 记作$N_G(v)$. 称$d_G(v) = |N_G(v)|$为v的度数. $\delta(G) = min\{d_G(v)|v \in V(G)\}$和$\Delta(G) = max\{d_G(v)|v \in V(G)\}$分别称作$G$的最小度和最大度. 设$G$是IC-平面图, $f \in F(G^\times)$. 称与面f相关联的边数为面f的度数(每条割边计算两次), 记为$d_{G^\times}(f)$. 设$v \in V(G)$, 如果$d_G(v) = k$, $\geq k$, 或$\leq k$, 则称v为k-点, k^+-点或k^--点. 类似地, 可

以定义k-面, k^+-面或k^--面. 令$f \in F(G^\times)$, 若f的边界点按顺时针方向依次为$v_1, v_2, v_3, \cdots, v_n$, 则可记作$f = [v_1v_2\cdots v_n]$. 用$d_k(f)$和$d_{k^+}(f)$分别表示与$f$关联的$k$-点与$k^+$-点的个数; 用$f_i(v)$, $f_{i^+}(v)$和$f_{i^-}(v)$ 分别表示$G^\times$中与v关联的i-面, i^+-面和i^--面的个数, 用$\alpha(v)$来表示与v关联的假3-面的个数.

若图G的每一个子图H都有$\delta(H) \le k$, 则称图G是k-退化的. 根据连通平面图的Euler公式和握手定理易得任意一个平面图都是5-退化的; 任意一个不含3-圈的平面图都是3-退化的. 2002年, Wang和Lih [5]两位学者证明了不含5-圈的平面图是3-退化的. 同年, Fijvaz等 [6]证明了不含6-圈的平面图是3-退化的. 本文利用上述结果, 证明了不含k-圈($k \in \{3,5,6\}$)的IC-平面图都是4-退化的. 并给出不含k-圈($k \in \{3,4,5,6\}$)且4-正则的IC-平面图. 同时, 本文进一步证明了3-圈和4-圈不相邻, 3-圈和5-圈不相邻或4-圈和4-圈不相邻的IC-平面图也是4-退化的.

2. 3-圈不与4-圈相邻的IC-平面图的退化性

定理 2.1. *不含k-圈($k \in \{3,5,6\}$)的IC-平面图都是4-退化的.*

证明. 设G是IC-平面图且已IC-平面嵌入, $E_0(G)$是G中不含交叉点的边组成的集合, $E_1(G)$是G中含交叉点的边组成的集合. 则由IC-平面图定义知, 由$E_0(G)$中的边导出子图G_1是平面图, 由$E_1(G)$中的边导出的子图是1-正则图. 由题意知G_1是不含k-圈($k \in \{3,5,6\}$)的平面图. 故G_1是3-退化的. 从而G是4-退化的. □

定理 2.2. *3-圈不与4-圈相邻的IC-平面图是4-退化的.*

证明. 设G是定理2.2的点数最小的极小反例图. 显然G是连通的, 设G是最优的IC-平面嵌入. 显然断言2.1成立.

断言2.1 $\delta(G) \ge 5$.

因为G是3-圈不与4-圈相邻的IC-平面图, 所以断言2.2成立.

断言2.2 真3-面与真3-面不相邻.

断言2.3 每一个5^+-点v至少关联2个4^+-面.

证明. 由v至多与一个假点邻知$\alpha(v) \le 2$. 当$\alpha(v) = 0$, 由断言2.2知$f_3(v) \le \lfloor \frac{d_G(v)}{2} \rfloor$. 故$v$关联的$4^+$-面个数$\ge d_G(v) - \lfloor \frac{d_G(v)}{2} \rfloor \ge 3$. 当$\alpha(v) = 1$时, 不妨设与$v$关联的假3-面为$f_1 = [vv_1v_2]$且$v_2$为假点. 则与$v$关联且以$vv_2$为边界的面必为$4^+$-面. 由断言2.2知$f_3(v) \le \lceil \frac{d_G(v)-2}{2} \rceil + 1 = \lceil \frac{d_G(v)}{2} \rceil$. 故$v$关联的$4^+$-面个数$\ge d_G(v) - \lceil \frac{d_G(v)}{2} \rceil \ge 2$. 当$\alpha(v) = 2$时, 由$v$至多相邻一个假点知, 与$v$关联的两个假3-面必为$f_1 = [vv_1v_2]$和$f_2 = [vv_2v_3]$且$v_2$为假点. 此时, 与$v$关联且以$vv_1$(或$vv_3$)为边界边的不同于$f_1$(或$f_2$)的面为$4^+$-面. 故$v$至少关联两个$4^+$-面. 综上, 每一个$5^+$-点至少关联2个$4^+$-面. □

断言2.4 每一个假点至多关联2个假3-面.

证明. 反证法. 设v是假点, 且其在$G^\times$中的4个邻点为v_1, v_2, v_3, v_4且在平面上依顺时针方向排列. 则$v_1v_3 \in E(G)$且$v_2v_4 \in E(G)$. 假设$f_1 = [vv_1v_2]$, $f_2 = [vv_2v_3]$及$f_3 = [vv_3v_4]$是3-面. 则G中含相邻的3-圈$v_1v_2v_3v_1$和4-圈$v_1v_3v_4v_2v_1$, 矛盾. 所以, 每一个假点至多关联2个假3-面. □

下面我们用权转移的方法完成定理2.2的证明. 对$v \in V(G^\times)$, 令$ch(v) = d_{G^\times}(v) - 6$; 对$f \in$

$F(G^{\times})$, 令$ch(f)=2d_{G^{\times}}(f)-6$. 结合欧拉公式$|V(G^{\times})|-|E(G^{\times})|+|F(G^{\times})|=2$和握手定理, 可以得到下面的恒等式:

$$\sum_{x\in V(G^{\times})\cup F(G^{\times})} ch(x)=\sum_{x\in V(G^{\times})}(d_{G^{\times}}(v)-6)+\sum_{x\in F(G^{\times})}(2d_{G^{\times}}(f)-6)=-12$$

下面定义适当的权转移规则, 且在权转移过程中, 总权和保持不变. 令$ch'(x)$是$x\in V(G^{\times})\cup F(G^{\times})$在经过权转移之后的最终权. 若能证明对所有的$x\in V(G^{\times})\cup F(G^{\times})$, 皆有$ch'(x)\geq 0$. 这样就与上面的恒等式形成矛盾, 从而完成定理2.2的证明. □

我们定义如下的权转移规则:

R1: 每一个4^{+}-面转权$\frac{2d_{G^{\times}}(f)-6}{d_{G^{\times}}(f)}$给关联的每一个点.

设经过R1之后, 每一个5^{+}-点v的权为$\beta(v)$.

R2: 每一个5^{+}-点将权$\max\{0,\beta(v)\}$转给与它相邻的假点.

由R1可得断言2.5成立.

断言2.5 1) 每个4-面转权$\frac{1}{2}$给所关联的点.

2) 每个4-面转权$\frac{4}{5}$给所关联的点.

3) 每个6^{+}-面转权1给所关联的点.

下面验证对于$\forall x\in V(G^{\times})\cup F(G^{\times})$, 都有$ch'(x)\geq 0$.

设$f\in F(G^{\times})$. 若$d_{G^{\times}}(f)=3$, 则$ch'(f)=ch(f)=2d_{G^{\times}}(v)-6=0$. 若$d_{G^{\times}}(f)\geq 4$, 则由R1知, $ch'(f)=ch(f)-\frac{2d_{G^{\times}}(f)-6}{d_{G^{\times}}(f)}\times d_{G^{\times}}(f)=0$.

设$v\in V(G^{\times})$. 若$d_{G^{\times}}(v)\geq 5$, 则由权转移规则知, 只要验证$\beta(v)\geq 0$. 由断言2.3, 断言2.5和R1可以得到$\beta(v)\geq d_{G^{\times}}(v)-6+2\times\frac{1}{2}\geq 0$. 下面设$d_{G^{\times}}(v)=4$. 由断言2.1知$v$为假点. 设$v$在$G^{\times}$中的4个邻点为$v_1,v_2,v_3,v_4$且在平面上依顺时针方向排列. 令$f_i$是以$vv_i$,$vv_{i+1}$为边界的面, $i=1,2,3,4$且$v_5=v_1$. 由断言2.1知$d_{G^{\times}}(v_i)\geq 5$, $i=1,2,3,4$. 由IC-平面图的定义知, v_i在$G^{\times}$中的邻点(除v外)全为真点.

情况1: v不与假3-面关联

由断言2.5知, $ch'(v)\geq d_{G^{\times}}(v)-6+\frac{1}{2}\times 4=0$.

情况2: v与一个假3-面关联

不妨设$d_{G^{\times}}(f_1)=3$, 即$f_1=[vv_1v_2]$. 则与v_3和v_4相邻的点都是真点. 由断言2.2知, $f_3(v_3)\leq\lceil\frac{d_{G^{\times}}(v_3)-2}{2}\rceil$. 故$v_3$至少与$d_{G^{\times}}(v_3)-f_3(v_3)\geq d_{G^{\times}}(v_3)-\lceil\frac{d_{G^{\times}}(v_3)-2}{2}\rceil\geq 3$个$4^{+}$-面邻. 从而$\beta(v_3)\geq d_{G^{\times}}(v_3)-6+\frac{1}{2}\times 3=\frac{1}{2}$. 由R2知$v_3$至少转权$\frac{1}{2}$给$v$. 故由断言2.5知, $ch'(v)\geq d_{G^{\times}}(v)-6+\frac{1}{2}\times 3+\frac{1}{2}=0$.

情况3: v与两个假3-面关联

设$f_1=[vv_1v_2]$且$f_2=[vv_2v_3]$. 则由3-圈不与4-圈邻且v_1,v_2,v_3的邻点全为真点知, 以v_1v_2为边界边且不同于f_1的面为5^{+}-面. 同理, 以v_2v_3为边界边且不同于f_2的面为5^{+}-面. 由断言2.5知,

$\beta(v_2) \geq d_{G^\times}(v_2) - 6 + \frac{4}{5} \times 2 = \frac{3}{5}$. 故由R2知$v_2$至少转权$\frac{3}{5}$给$v$. 由断言2.2知$f_3(v_4) \leq \lceil \frac{d_{G^\times}(v_4)-2}{2} \rceil$. 所以$v_4$至少与$d_{G^\times}(v_4) - f_3(v_4) \geq d_{G^\times}(v_4) - \lceil \frac{d_{G^\times}(v_4)-2}{2} \rceil \geq 3$个$4^+$-面邻. 从而由断言2.5知$\beta(v_4) \geq d_{G^\times}(v_4)-6+\frac{1}{2}\times 3 = \frac{1}{2}$, 且由R2知$v_4$至少转权$\frac{1}{2}$给$v$. 故由断言2.5知$ch'(v) \geq d_{G^\times}(v)-6+\frac{3}{5}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times 2 = \frac{1}{10}$.

设$f_1 = [vv_1v_2]$且$f_3 = [vv_3v_4]$. 则v_i与4-圈$v_1v_2v_3v_4v_1$关联, $i = 1,2,3,4$. 由3-圈与4-圈不邻知, 以v_1v_2为边界边且不同于f_1的面为4^+−面. 同理, 以v_3v_4为边界边且不同于f_3的面为4^+−面. 故由断言2.2知, $f_3(v_i) \leq 1+\lceil \frac{d_{G^\times}(v_i)-3}{2} \rceil = \lceil \frac{d_{G^\times}(v_i)-1}{2} \rceil$, $i = 1,2,3,4$. 从而v_i至少与$d_{G^\times}(v_3) - \lceil \frac{d_{G^\times}(v_3)-1}{2} \rceil \geq 3$个$4^+$−面关联. 从而由断言2.5知, $\beta(v_i) \geq d_{G^\times}(v_i) - 6 + \frac{1}{2} \times 3 = \frac{1}{2}$. 由R2知, $v_i(i = 1,2,3,4)$至少转权$\frac{1}{2}$给v. 故$ch'(v) \geq d_{G^\times}(v) - 6 + \frac{1}{2} \times 4 = 0$. □

由定理2.2可得以下推论.

推论 2.3. 不含4-圈的IC-平面图是4-退化的.

由定理2.1和推论2.3可得以下推论.

推论 2.4. 不含k-圈$(k \in \{3,4,5,6\})$的IC-平面图是4-退化的.

下面我们给出例子说明推论2.4的结论是紧的. 图 1是不含3-圈与5-圈的4-正则的IC-平面图. 正十二面体图的线图是不含4-圈的4-正则IC-平面图. K_5是不含6-圈的4-正则IC-平面图.

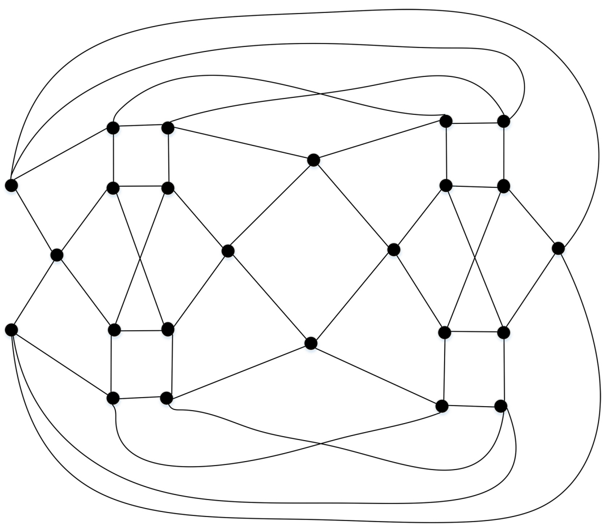

Figure 1. 4-regular Bipartite IC-planar graph

图 1. 4-正则的二部IC-平面图

3. 3-圈不与5-圈相邻的IC-平面图的退化性

定理 3.1. 3-圈不与5-圈相邻的IC-平面图是4-退化的.

证明. 设G是定理3.1的点数极小的反例图. 显然G是连通的, 设G是最优的IC-平面嵌入. 显然断言3.1成立.

断言3.1 $\delta(G) \geq 5$.

设$v \in V(G^{\times})$是一个真点. 令$v_1, v_2, \cdots, v_d$是v在$G^{\times}$且中的邻点且在平面上依顺时针方向排列. 令f_i 是以vv_i, vv_{i+1}为边界边的面, 其中$i = 1, 2, \cdots, d$且$v_{d+1} = v_1$. 令f_i, f_{i+1}, f_{i+2}为相继的三个面. 由3-圈不与5-圈邻知f_i, f_{i+1}, f_{i+2}中必有一个4^+-面或假3-面. 故断言3.2成立.

断言3.2 每一个真点v不与三个相继的真3-面关联.

断言3.3 每个5^+-点v至少关联2个4^+-面.

证明. 由v至多与一个假点邻知$\alpha(v) \le 2$. 当$\alpha(v) = 0$, 由断言3.2知$f_3(v) \le \lfloor \frac{2d_G(v)}{3} \rfloor$. 故$v$至少关联$d_{G^{\times}}(v) - f_3(v) \ge d_{G^{\times}}(v) - \lfloor \frac{2d_G(v)}{3} \rfloor \ge 2$个$4^+$-面. 当$\alpha(v) = 1$时, 不妨设与$v$关联的假3-面为$f_1 = [vv_1v_2]$且$v_2$为假点. 则以$vv_2$为边界边且不同于f的面为$4^+$-面. 由断言3.2知$f_3(v) \le \lceil \frac{2(d_G(v)-1)}{3} \rceil$. 故$v$至少关联$d_{G^{\times}}(v) - f_3(v) \ge d_{G^{\times}}(v) - \lfloor \frac{2(d_G(v)-1)}{3} \rfloor \ge 2$个$4^+$-面. 当$\alpha(v) = 2$时, 由$v$至多相邻一个假点知, 与$v$关联的两个假3-面必为$f_1 = [vv_1v_2]$和$f_2 = [vv_2v_3]$, 且$v_2$为假点. 令$f_3$, f_4分别以vv_3为边界边且不同于f_2的面和以vv_1为边界边且不同于f_1的面. 若$d_{G^{\times}}(f_3) \ge 4$且$d_{G^{\times}}(f_4) \ge 4$, 则$v$至少关联两个$4^+$-面. 若$d_{G^{\times}}(f_3) = 3$, 即$f_3 = [vv_3v_4]$, 则由3-圈不与5-圈邻知以$vv_4$为边界边且不同于$f_3$的面及$f_4$为$4^+$-面. 故$v$至少关联两个$4^+$-面. 综上, 每一个$5^+$-点至少关联2个$4^+$-面. □

下面我们用权转移规则完成定理3.1的证明.

我们采用与定理2.2相同的初始权函数及权转移规则. 接下来, 我们需要证明对所有的$x \in V(G^{\times}) \cup F(G^{\times})$, 皆有$ch'(x) \ge 0$. 推出与定理2.2一样的矛盾, 从而完成对定理3.1的证明.

由R1可得断言3.4成立.

断言3.4 1) 每个4-面转权$\frac{1}{2}$给所关联的点.

2) 每个4-面转权$\frac{4}{5}$给所关联的点.

3) 每个6^+-面转权1给所关联的点.

下面验证对于$\forall x \in V(G^{\times}) \cup F(G^{\times})$, 都有$ch'(x) \ge 0$.

设$f \in F(G^{\times})$. 若$d_{G^{\times}}(f) = 3$, 则$ch'(f) = ch(f) = 2d_{G^{\times}}(v) - 6 = 0$. 若$d_{G^{\times}}(f) \ge 4$, 则由R1知, $ch'(f) = ch(f) - \frac{2d_{G^{\times}}(f)-6}{d_{G^{\times}}(f)} \times d_{G^{\times}}(f) = 0$.

设$v \in V(G^{\times})$. 若$d_{G^{\times}}(v) \ge 5$, 则由权转移规则知, 只要验证$\beta(v) \ge 0$. 通过断言3.3, 断言3.4和R1可知$\beta(v) \ge d_{G^{\times}}(v) - 6 + 2 \times \frac{1}{2} \ge 0$. 下设$d_{G^{\times}}(v) = 4$. 由断言3.1知$v$为假点. 设$v$在$G^{\times}$中的4个邻点为$v_1, v_2, v_3, v_4$且在平面上依顺时针方向排列. 令$f_i$是以$vv_i$,$vv_{i+1}$为边界的面, $i = 1, 2, 3, 4$且$v_5 = v_1$.由断言3.1知$d_{G^{\times}}(v_i) \ge 5$, $i = 1, 2, 3, 4$. 由IC-平面图的定义知, v_i在$G^{\times}$中的邻点(除v外)全为真点, $i = 1, 2, 3, 4$.

情况1：v与四个假3-面关联

则$f_1 = [vv_1v_2]$, $f_2 = [vv_2v_3]$, $f_3 = [vv_3v_4]$且$f_4 = [vv_4v_1]$.由v_1只与一个假点相邻知v_1在$G^{\times}$中除v外的其余邻点皆为真点.令f'是以v_1v_2为边界边且不同于f_1的面,f''是以v_4v_1为边界边且不同于f_4的面.令$f' = [v_1v_2x_1 \cdots x_k]$.若$d_{G^{\times}}(f') = 3$,即$f' = [v_1v_2x_1]$, 则$G$中含相邻的3-圈$v_1v_2x_1v_1$和5-圈$v_1x_1v_2v_3v_4v_1$,矛盾.若$d_{G^{\times}}(f') = 4$,即$f' = [v_1v_2x_1x_2]$,由IC-平面图的定义知$x_1$与$x_2$为真点.由$\delta(G) \ge 5$知$x_1, x_2 \notin \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, 则$G$中含相邻的3-圈$v_1v_2x_1v_1$和5-圈$v_1x_2x_1v_2v_3v_1$, 矛盾. 故$d_{G^{\times}}(f') \ge 5$.由对称性, $d_{G^{\times}}(f'') \ge 5$.从而由断言3.4知, $\beta(v) \ge d_{G^{\times}}(v) - 6 + \frac{4}{5} \times 2 = \frac{3}{5}$.由R2知, v_1至少转

权$\frac{3}{5}$给v.由对称性, v_2, v_3, v_4 各至少转权$\frac{3}{5}$给v.因此, $ch'(v) \geq d_{G^\times}(v) - 6 + 4 \times \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$.

情况2： v与三个假3-面关联.

不妨设$f_1 = [vv_1v_2]$, $f_2 = [vv_2v_3]$与$f_3 = [vv_3v_4]$. 下证$d_{G^\times}(f_4) \geq 6$. 事实上, 如果$d_{G^\times}(f_4) = 4$, 即$f_4 = [vv_4xv_2]$, 则由断言3.1知$x \notin \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, 故$G$中含相邻的的3-圈$v_1v_2x_1v_1$和5-圈$v_1v_2v_3v_4xv_1$, 矛盾. 如果$d_{G^\times}(f_4) = 5$, 即$f_4 = [vv_4x_1x_2v_2]$, 那么由断言3.1知$x_1, x_2 \notin \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, 所以$G$中含相邻的的3-圈$v_1v_2x_1v_1$和5-圈$v_1v_3v_4x_1x_2v_1$, 矛盾. 所以, $d_{G^\times}(f_4) \geq 6$. 由断言3.3和3.4知, $\beta(v_1) \geq d_{G^\times}(v_1) - 6 + \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$. 由R2知, v_1至少转权$\frac{1}{2}$给v. 同理, v_4 至少转权$\frac{1}{2}$给v. 因此, $ch'(v) \geq d_{G^\times}(v) - 6 + 1 + \frac{1}{2} = 0$.

情况3： v与两个假3-面关联.

先设$f_1 = [vv_1v_2]$与$f_2 = [vv_2v_3]$. 下证$d_{G^\times}(f_3) \geq 5$. 事实上, 如果$d_{G^\times}(f_3) = 4$, 即$f_3 = [vv_3xv_4]$, 则由断言3.1知$x \notin \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, 故$G$中含相邻的的3-圈$v_1v_2v_3v_1$和5-圈$v_1v_3xv_4v_2v_1$, 矛盾. 故$d_{G^\times}(f_3) \geq 5$. 由对称性,$d_{G^\times}(f_4) \geq 5$. 由断言3.3和3.4知, $\beta(v_3) \geq d_{G^\times}(v_1) - 6 + \frac{1}{2} + \frac{4}{5} = \frac{3}{10}$. 由R2知,$v_3$至少转权$\frac{3}{10}$给$v$. 由对称性,$v_4$ 至少转权$\frac{3}{10}$给v. 因此, 由断言3.4知$ch'(v) \geq d_{G^\times}(v) - 6 + 2 \times \frac{4}{5} + 2 \times \frac{3}{10} = \frac{1}{5}$.

再设$f_1 = [vv_1v_2]$和$f_3 = [vv_3v_4]$. 若$d_{G^\times}(f_2) \geq 5$或$d_{G^\times}(f_4) \geq 5$, 不妨设$d_{G^\times}(f_2) \geq 5$, 则由断言3.3和3.4知, $\beta(v_2) \geq d_{G^\times}(v_1) - 6 + \frac{1}{2} + \frac{4}{5} = \frac{3}{10}$. 由R2知, v_2至少转权$\frac{3}{10}$给v. 同理, v_3 至少转权$\frac{3}{10}$给v. 那么由断言3.4知$ch'(v) \geq d_{G^\times}(v) - 6 + 2 \times \frac{4}{5} + 2 \times \frac{3}{10} = \frac{1}{5}$. 下设$d_{G^\times}(f_2) = d_{G^\times}(f_4) = 4$, 即$f_2 = [vv_2xv_3]$和$f_4 = [vv_4yv_1]$. 由断言3.1知$x, y \notin \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$. 令$f'$是以$v_2x$为边界边且不同于$f_2$的面, 且$f' = [v_2xz_1 \cdots z_k]$. 若$d_{G^\times}(f') = 3$, 则$G$中含相邻的3-圈$v_2xz_1v_2$和5-圈$v_2z_1xv_3v_4v_2$,矛盾. 故$d_{G^\times}(f') \geq 4$. 类似可以证明以$v_1v_2$为边界边且不同于$f_1$的面为$4^+$-面. 由断言3.4知, $\beta(v_1) \geq d_{G^\times}(v_1) - 6 + \frac{1}{2} \times 3 = \frac{1}{2}$. 由对称性, 有$\beta(v_i) \geq \frac{1}{2}$, $i = 2, 3, 4$. 由R2知, $v_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 至少转权$\frac{1}{2}$给v. 因此, 由断言3.4知$ch'(v) \geq d_{G^\times}(v) - 6 + 2 \times \frac{1}{2} + 4 \times \frac{1}{2} = 1$.

情况4： v与一个假3-面关联.

不妨设$d_{G^\times}(f_1) = 3$, 即$f_1 = [vv_1v_2]$. 由断言3.2知, $f_3(v_3) \leq \lceil \frac{2(d_{G^\times}(v_3)-2)}{3} \rceil$. 从而$v_3$至少关联$d_{G^\times}(v_3) - f_3(v_3) \geq d_{G^\times}(v_3) - \lceil \frac{2(d_{G^\times}(v_3)-2)}{3} \rceil \geq 3$个$4^+$-面. 由断言3.4知, $\beta(v_3) \geq d_{G^\times}(v_3) - 6 + \frac{1}{2} \times 3 = \frac{1}{2}$. 由R2知, v_3 至少转权$\frac{1}{2}$给v. 因此, 由断言3.4知$ch'(v) \geq d_{G^\times}(v) - 6 + 3 \times \frac{1}{2} + \times \frac{1}{2} = 0$.

情况5： v不与假3-面关联

故由断言3.4知,$ch'(v) \geq d_{G^\times}(v) - 6 + \frac{1}{2} \times 4 = 0$. □

4. 4-圈不与4-圈相邻的IC-平面图的退化性

定理 4.1. 4-圈不与4-圈相邻的IC-平面图是4-退化的.

证明. 设G是定理4.1的点数极小的反例图. 显然G是连通的, 设G是最优的IC-平面嵌入. 显然断言4.1成立.

断言4.1 $\delta(G) \geq 5$.

设$v \in V(G^\times)$是一个真点. 令$v_1, v_2, \text{ḍ}ots, v_d$是$v$在$G^\times$且中的邻点且在平面上依顺时针方向

排列. 令f_i 是以vv_i, vv_{i+1}为边界边的面, 其中$i = 1, 2, \cdots, d$且$v_{d+1} = v_1$. 由4-圈不与4-圈邻知f_i,f_{i+1},f_{i+2}中必有一个4^+-面或假3-面. 故断言4.2成立.

断言4.2 每一个真点v不与三个相继的真3-面关联.

类似断言3.3的证明, 可得断言4.3成立.

断言4.3 每个5^+-点v至少关联2个4^+-面.

断言4.4 每一个假点至多关联3个假3-面.

证明. 设v是假点, 且其在$G^\times$中的4个邻点为v_1, v_2, v_3, v_4并且在平面上依顺时针方向排列. 则$v_1v_3 \in E(G)$且$v_2v_4 \in E(G)$. 令f_i是以vv_i和vv_{i+1}为边界边的面, 其中$i = 1, 2, 3, 4$且$v_5 = v_1$. 我们假设$f_1 = [vv_1v_2]$, $f_2 = [vv_2v_3]$, $f_3 = [vv_3v_4]$且$f_4 = [vv_4v_1]$. 则G中含相邻的4-圈$v_1v_2v_3v_4v_1$和4-圈$v_1v_3v_4v_2v_1$, 矛盾. 所以, 每一个假点至多关联3个假3-面. □

下面我们用权转移规则完成定理4的证明.

我们采用与定理2.2相同的初始权函数及权转移规则. 接下来, 我们需要证明对所有的$x \in V(G^\times) \cup F(G^\times)$, 皆有$ch'(x) \geq 0$. 从而推出与定理2.2一样的矛盾, 从而完成对定理4.1的证明.

由R1可得断言4.5成立.

断言4.5 1) 每个4-面转权$\frac{1}{2}$给所关联的点.

2) 每个4-面转权$\frac{4}{5}$给所关联的点.

3) 每个6^+-面转权1给所关联的点.

下面验证对于$\forall x \in V(G^\times) \cup F(G^\times)$, 都有$ch'(x) \geq 0$.

设$f \in F(G^\times)$. 若$d_{G^\times}(f) = 3$, 则$ch'(f) = ch(f) = 2d_{G^\times}(v) - 6 = 0$. 若$d_{G^\times}(f) \geq 4$, 则由R1知, $ch'(f) = ch(f) - \frac{2d_{G^\times}(f)-6}{d_{G^\times}(f)} \times d_{G^\times}(f) = 0$.

设$v \in V(G^\times)$.若$d_{G^\times}(v) \geq 5$,由权转移规则知,需验证$\beta(v) \geq 0$.由断言4.3,断言4.4和R1知$\beta(v) \geq d_{G^\times}(v) - 6 + 2 \times \frac{1}{2} \geq 0$. 下设$d_{G^\times}(v) = 4$. 由断言4.1知$v$为假点. 令$v$在$G^\times$中的4个邻点为$v_1, v_2, v_3, v_4$且在平面上依顺时针方向排列. 则$v_1v_3 \in E(G)$且$v_2v_4 \in E(G)$.令$f_i$是以$vv_i$,$vv_{i+1}$为边界的面, $i = 1, 2, 3, 4$且$v_5 = v_1$. 由断言4.4知, v至多关联3个假3-面. 由断言4.1知$d_{G^\times}(v_i) \geq 5$, $i = 1, 2, 3, 4$. 由IC-平面图的定义知, v_i在$G^\times$中的邻点(除v外)全为真点, $i = 1, 2, 3, 4$.

情况1：v与三个假3-面关联.

不妨设$f_1 = [vv_1v_2]$, $f_3 = [vv_3v_4]$与$f_4 = [vv_4v_1]$. 下证$d_{G^\times}(f_2) \geq 5$. 事实上,若$d_{G^\times}(f_2) = 4$, 即$f_4 = [vv_2xv_3]$, 则由断言4.1知$x \notin \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$. 故$G$中含相邻的的4-圈$v_1v_2xv_3v_1$和4-圈$v_1v_2v_4v_3v_1$, 矛盾. 所以$d_{G^\times}(f_2) \geq 5$. 令$f'$是以$v_1v_2$为边界边且不同于$f_1$的面. 若$d_{G^\times}(f') = 3$, 即$f' = [v_1v_2y_1]$, 由断言4.1知$y_1 \notin \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$. 故$G$中含相邻的4-圈$v_1y_1v_2v_4v_1$和4-圈$v_1v_2v_4v_3v_1$, 矛盾. 若$d_{G^\times}(f') = 4$, 即$f' = [v_1v_2y_1y_2]$, 由断言4.1知$y_1, y_2 \notin \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$,$y_1, y_2$是真点, 故$G$中含相邻的4-圈$v_1v_2y_1y_2v_1$和4-圈$v_1v_2v_4v_3v_1$, 矛盾. 故$d_{G^\times}(f') \geq 5$, 从而由断言4.5知, $\beta(v_2) \geq d_{G^\times}(v_2) - 6 + \frac{4}{5} \times 2 = \frac{3}{5}$. 由R2知, v_2 至少转权$\frac{3}{5}$给v. 由对称性, v_3 至少转权$\frac{3}{5}$给v. 由断言4.5知$ch'(v) \geq d_{G^\times}(v) - 6 + \frac{4}{5} + 2 \times \frac{3}{5} = 0$.

情况2： v与两个假3-面关联.

先设$f_3=[vv_3v_4]$且$f_4=[vv_4v_1]$. 先证f_1和f_2中至少有一个5^+-面. 事实上, 若$f_1=[vv_1xv_2]$且$f_2=[vv_2yv_3]$, 由断言4.1知$x\neq y$且$x,y\notin\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$,此时$G$中含相邻的4-圈$v_1xv_4v_2v_1$和4-圈$v_2yv_3v_4v_2$,矛盾. 故$f_1$和$f_2$中至少有一个是$5^+$-面. 由断言4.2知, $f_3(v_2)\leq\lceil\frac{2(d_{G^\times}(v_2)-2)}{3}\rceil$. 故$v_2$至少与$d_{G^\times}(v_2)-f_3(v_2)\geq d_{G^\times}(v_2)-\lceil\frac{2(d_{G^\times}(v_2)-2)}{3}\rceil\geq 3$ 个4^+-面邻. 由断言4.5知, $\beta(v_2)\geq d_{G^\times}(v_2)-6+\frac{1}{2}\times 2+\frac{4}{5}=\frac{4}{5}$. 由R2知, v_2 至少转权$\frac{4}{5}$给v. 由断言4.5知$ch'(v)\geq d_{G^\times}(v)-6+\frac{1}{2}+\frac{4}{5}+\frac{4}{5}=\frac{1}{10}$.

再设$f_1=[vv_1v_2]$和$f_3=[vv_3v_4]$. 下证$d_{G^\times}(f_2)\geq 5$且$d_{G^\times}(f_4)\geq 5$. 事实上, 由对称性不妨设$f_2=[vv_2xv_3]$. 由断言4.1知$x\neq y$且$x,y\notin\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$, 但$G$中含相邻的的4-圈$v_2xv_3v_4v_2$和4-圈$v_1v_2v_4v_3v_1$, 矛盾. 故$d_{G^\times}(f_2)\geq 5$且$d_{G^\times}(f_4)\geq 5$. 由断言4.5知, $\beta(v_i)\geq d_{G^\times}(v_i)-6+\frac{1}{2}+\frac{4}{5}=\frac{3}{10}$, $i=1,2,3,4$. 由R2知,v_i 至少转权$\frac{3}{10}$给v,$i=1,2,3,4$. 由断言4.5知$ch'(v)\geq d_{G^\times}(v)-6+4\times\frac{3}{10}+2\times\frac{4}{5}=\frac{4}{5}$.

情况3： v与一个假3-面关联.

不妨设$d_{G^\times}(f_1)=3$, 即$f_1=[vv_1v_2]$. 由断言4.2知, $f_3(v_3)\leq\lceil\frac{2(d_{G^\times}(v_3)-2)}{3}\rceil$. 故$v_3$至少与$d_{G^\times}(v_3)-f_3(v_3)\geq d_{G^\times}(v_3)-\lceil\frac{2(d_{G^\times}(v_3)-2)}{3}\rceil\geq 3$个$4^+$-面关联. 由断言4.5知, $\beta(v_3)\geq d_{G^\times}(v_3)-6+\frac{1}{2}\times 3=\frac{1}{2}$. 由R2知, v_3 至少转权$\frac{1}{2}$给v. 因此, 由断言4.5知$ch'(v)\geq d_{G^\times}(v)-6+3\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=0$.

情况4： v不与假3-面关联

故由断言4.5知, $ch'(v)\geq d_{G^\times}(v)-6+\frac{1}{2}\times 4=0$. □

参考文献

[1] Bondy, J.A. and Murty, U.S.R. (1976) Graph Theory with Applications. North-Holland, New York.

[2] Ringel, G. (1965) Ein Sechsfarben problem auf der Kugel. *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, **29**, 107-117. (In German) https://doi.org/10.1007/BF02996313

[3] Alberson, M. (2008) Chromatic Number, Independent Ratio, and Crossing Number. *Ars Mathematica Contemporanea*, **1**, 1-6. https://doi.org/10.26493/1855-3974.10.2d0

[4] Kral, D. and Stacho, L. (2010) Coloring Plane Graphs with Independent Crossings. *Journal of Graph Theory*, **64**, 184-205. https://doi.org/10.1002/jgt.20448

[5] Wang, W. and Lih, K.W. (2002) Choosability and Edge Choosability Planar Graphs without Five Cycles. *Applied Mathematics Letters*, **15**, 561-565. https://doi.org/10.1016/S0893-9659(02)80007-6

[6] Fijavz, G., Juvan, M., Mohar, B. and Skrekovski, R. (2002) Planar Graphs without Cycles of Specific Lengths. *European Journal of Combinatorics*, **23**, 377-388. https://doi.org/10.1006/eujc.2002.0570