

次三正则图最小极大匹配上界的改进

夏 晴*, 金利刚#

浙江师范大学, 浙江 金华

收稿日期: 2021年9月22日; 录用日期: 2021年10月15日; 发布日期: 2021年10月26日

摘 要

图 G 的边控制数是图中最大匹配的最小大小。众所周知, 这个参数计算起来很困难。Julien Baste根据正则图和非正则图的阶数及最大度给出了最优可能上界。研究了边支配数的上界和相关算法, 他给出了次三正则二部不含 T^* 图的最小极大匹配的上界。其中 T^* 是由爪形图的两条边恰好细分一次而形成的树。本文在此基础上, 改进了其中次三正则图边控制数的上界, 并作出一些推论。

关键词

边控制数, 最小极大匹配, 次三正则图

Improvement of Upper Bound of Minimum Maximal Matching in Subcubic Graphs

Qing Xia*, Ligang Jin#

Zhejiang Normal University, Jinhua Zhejiang

Received: Sep. 22nd, 2021; accepted: Oct. 15th, 2021; published: Oct. 26th, 2021

Abstract

The edge control number $\gamma(G)$ of graph G is the minimum size of a maximal match in the graph. This parameter is notoriously difficult to calculate. Julien Baste gives the optimal possible upper bound according to the order and maximum degree of regular graph and non-regular graph. In this paper, we study the upper bound and correlation algorithm of edge dominating numbers. He gives the upper bound of minimum maximal matching of subcubic bipartite T^* -free graph, where T^* is the tree formed by subdividing the two edges of the claw graph exactly once. On this basis, we improve the upper bound of the edge control numbers of the subcubic graphs, and make some inferences.

*第一作者。

#通讯作者。

Keywords

Edge Domination Number, Minimum Maximal Matchings, Subcubic Graphs

Copyright © 2021 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

我们考虑的是有限的、简单的且无向的图，并使用标准术语。设 G 是一个图， M 是图 G 的边集合， $V(M)$ 表示图 G 中与 M 中一条边相关联的顶点集合。若图 G 的最大次数不超过三次，则称图 G 是次三正则图，若图 G 的所有点的度数均为 3，则称其为三正则图。如果 M 中的边是成对不相交的，则集合 M 是图 G 中的一个匹配。图 G 中的匹配 M 是极大的即集合 $V(G) \setminus V(M)$ 是独立的。设图 G 的边支配数 $\gamma(G)$ 是图 G 中极大匹配的最小大小。在图 G 中极大匹配的大小为 $\gamma(G)$ 即为最小的极大匹配。

关于边支配数和最小的极大匹配的研究已经进行了很长的时间，Yannakakis 和 Gavril [1] 证明，即使对于最大次数为 3 的平面图或者二部图，寻找最小极大匹配也是 NP-hard。关于如何更便捷的得到一些图的最小极大匹配，一些学者研究了启发式算法和近似算法 [2] [3] [4]。

Julien Baste [5] 研究了边支配数的上界和相关算法，他给出了次三正则二部不含 T^* 图的最小极大匹配的上界。其中 T^* 是由爪形图 $K_{1,3}$ 的两条边恰好细分一次而形成的 [6]。回想一下，一个图是不含 T^* 的即它不包含 T^* 作为导出子图。

2. 主要结论及其证明

定理 1 若 G 是 n 个点的连通三正则二部图且不含 T^* ，则 $\gamma(G) \leq \frac{2n}{5} + \frac{3}{5}$ 。

定理 2 若 G 是点数为 n ，边数为 m 的次三正则二部图且不含 T^* ，使 G 无连通分量为三正则图，则：

$$\begin{cases} \gamma(G) = 6, \text{ 图 } G \text{ 为 I 类图} \\ \gamma(G) \leq \frac{7n}{10} - \frac{m}{5}, \text{ 其他} \end{cases}$$

其中 I 类图包含图 1(a) 和图 1(b)，如图 1 所示。

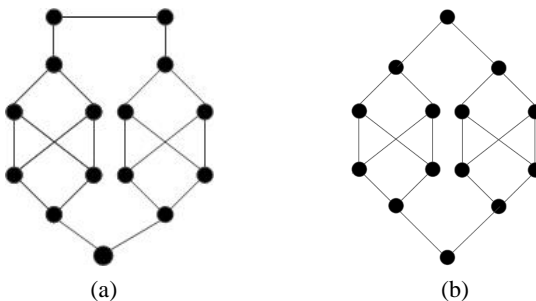


Figure 1. Two cases of graphs of class I. (a) $n = 15$, $m = 21$, $\gamma(G) = 6$; (b) $n = 14$, $m = 20$, $\gamma(G) = 6$

图 1. I 类图两种情况。(a) $n = 15$, $m = 21$, $\gamma(G) = 6$; (b) $n = 14$, $m = 20$, $\gamma(G) = 6$

证明 假设图 G 是定理 2 的一个反例, 它使 $|V(G)|$ 最小。我们通过一系列引理来描述图 G 的性质, 最终导致矛盾。在各种情况下, 我们将从图 G 中删除一些顶点并添加一些边, 然后对生成的子图进行归纳应用。我们将用 G', G'', \dots 表示图 G 的子图, n', n'', \dots 和 m', m'', \dots 分别表示对应子图的点数和边数。 M 表示图 G 的极大匹配, M', M'', \dots 表示对应子图的极大匹配。因为图 G 中不含 T^* , 故图 G 的子图必然不含 I 类图。

引理 1 图 G 的最小度为 2。

证明 为得到矛盾, 不妨假设 $d(u)=1$ 。设点 v 是点 u 的唯一邻居, 点 w 是点 v 的不同于点 u 的邻居。若令 $G' = G - \{u, v, w\}$, 则 $n - n' = 3$, $m - m' \leq 5$, $M := M' + \{vw\}$ 。于是在中图 G 有:

$$\gamma(G) \leq \frac{7n'}{10} - \frac{m'}{5} + 1 \leq \frac{7}{10}(n-3) - \frac{1}{5}(m-5) + 1 < \frac{7n}{10} - \frac{m}{5}$$

矛盾, 证明结束。

引理 2 图 G 中的 4 圈不含 2 度点。

证明 假设 uv_1v_2wu 是图 G 中的一个 4 圈, 其中 $d(u)=2$ 。显然 C_4 不是反例, 故不妨假设 $d(v_1)=3$ 。设点 w_1 是点 v_1 的邻居, 若令 $G' = G - \{u, v_1, v_2, w, w_1\}$, 则 $n - n' = 5$, $m - m' \leq 9$, $M := M' + \{v_1w_1, v_2w\}$ 。若 $m - m' \leq 7$, 我们会得到同引理 1 相同的矛盾。故 $8 \leq m - m' \leq 9$ 。先考虑 $m - m' = 8$ 的情况, 不妨假设 $d(w)=2$, $d(w_1)=d(v_2)=3$ 。设点 z_1, z'_1 是点 w_1 的邻居, 点 w_2 是点 v_2 的邻居。若令 $G'' = G - \{u, v_1, v_2, w, w_1, w_2\}$, 则 $n - n'' = 6$, $m - m'' \leq 10$, $M := M'' + \{v_1w_1, v_2w_2\}$ 。于是在图 G 中有:

$$\gamma(G) \leq \frac{7n''}{10} - \frac{m''}{5} + 2 \leq \frac{7}{10}(n-6) - \frac{1}{5}(m-10) + 2 < \frac{7n}{10} - \frac{m}{5}$$

矛盾, 证明结束。

故 $d(w)=3$ 。若 $d(v_2)=2$, 则点 w_1 有两个邻居为点 z_1, z'_1 , 因为图 G 中不含 T^* , 故点 w 与点 w_1 有公共的邻居为点 z'_1 , 又因为图 G 为二部图, 则点 z_1 有一个邻居为点 z_2 , 图 G 不含 T^* , 则点 z'_1 与点 z_2 相互连接。若令 $G''' = G - \{u, v_1, v_2, w, w_1, z_1, z'_1, z_2\}$, 则 $n - n' = 8$, $m - m' \leq 12$, $M := M''' + \{uv_1, z_1z_2, z'_1w\}$ 于是在图 G 中有:

$$\gamma(G) \leq \frac{7n'''}{10} - \frac{m'''}{5} + 2 \leq \frac{7}{10}(n-8) - \frac{1}{5}(m-12) + 3 < \frac{7n}{10} - \frac{m}{5}$$

矛盾。

故 $d(v_2)=d(w)=3$ 。则点 v_2 的邻居是点 z_2 , 点 w 的邻居是点 z'_1 。因为图 G 中不含 T^* , 故点 z'_1 与点 z_2, w_1 相互连接且 $d(w)=2$ (否则有 T^*), 此时的图 G 是 $n=7$ 的图, 如图 2 所示, 可知图 G 并非反例。

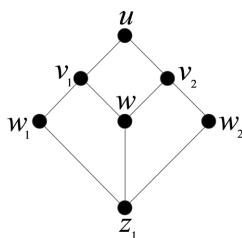


Figure 2. The graph G in the case that vertex z'_1 is adjacent to vertex z_2, w_1 and $d(w)=2$. Note that $\{uv_1, w_2z_2\}$ is a maximal matching of G , which implies $\gamma(G) < \frac{7n}{10} - \frac{m}{5}$

图 2. 图 G 在点 z'_1 与点 z_2, w_1 相互连接且 $d(w)=2$ 的情况下。 $\{uv_1, w_2z_2\}$ 是其一个极大匹配, 可知 $\gamma(G) < \frac{7n}{10} - \frac{m}{5}$

因此 $m - m' = 9$, 则 $d(w) = d(w_1) = d(v_2) = 3$. 设点 z_1, z'_1 是点 w_1 的邻居, 点 z 是点 w 的邻居. 因为图 G 是二部图, 则 $w \neq z, w_2 \neq z$, 由对称性知 $d(w_2) = 3$. 若点 z 不与点 w_1 相互连接, 则 $T^* := G[\{u, v_1, w_1, z, w, z_1\}]$, 矛盾. 故由对称性知, 点 z 与点 w_1, w_2 相互连接. 点 w_1 的邻居为点 z_1 , 若点 z_1 与点 w_2 相互连接, 因为图 G 不含 T^* , 则 $d(z_1) = 2$, $n = 8$, 如图 3 所示, 可知图 G 非反例.

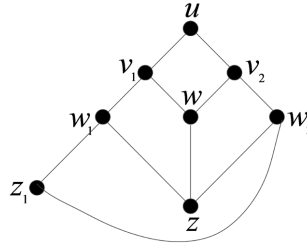


Figure 3. The graphs G in the case that $d(z_1) = 2$, $n = 8$. Note that $\{uv_1, wz, w_2z_1\}$ is a maximal matching of G , which implies $\gamma(G) < \frac{7n}{10} - \frac{m}{5}$

图 3. 图 G 在 $d(z_1) = 2$, $n = 8$ 的情况下. $\{uv_1, wz, w_2z_1\}$ 是其一个极大匹配, 可知 $\gamma(G) < \frac{7n}{10} - \frac{m}{5}$

故点 z_1 不与点 w_2 相互连接, 但在图 G 中有 $T^* := G[\{u, v_1, w_1, z, z_1, w_2\}]$, 矛盾, 证明结束.
证明定理 2

证明 令 $d(u) = 2$, 设点 u 的邻居为点 v_1, v_2 , 点 w_i 是点 v_i 的邻居 ($i \in [1, 2]$). 根据引理 2 可知, 点 v_1, v_2 只有一个公共的邻居为点 u . 若令 $G' = G - \{u, v_1, v_2, w_1, w_2\}$, 则 $m - m' \leq 10$. 因为在图 G' 的极大匹配中添加边集合 $\{v_1w_1, v_2w_2\}$ 会成为图 G 的极大匹配, 所以如果 $m - m' \leq 7$, 会得到同引理 1 中相同的矛盾, 故 $m - m' \geq 8$.

首先假设 $d(v_1) = d(v_2) = 2$. 则点 w_i 有两个邻居为点 z_i, z'_i ($i \in [1, 2]$). 因为图 G 是二部图, 故点 z_1, z'_1 不能与点 z_2, z'_2 相互连接. 由引理 1 可设点 z_1 的邻居是点 z_3 , 因为图 G 不含 T^* , 故点 z'_1 与点 z_3 相互连接. 由引理 2 可知, 点 z_1 有一个邻居为点 z'_3 . 因为图 G 不含 T^* , 则点 z'_1 与点 z_3 相互连接. 又根据引理 2 可知, 点 z_3 有一个邻居为点 x , 因为图 G 中不包含 T^* , 则点 z'_3 与点 x 相互连接. 同理, 由定理 2 和图 G 不包含 T^* 可知, 点 z_2 有两个邻居为点 z_4, z'_4 , 点 z'_2 也与点 z'_4 相互连接, 且点 z_4, z'_4 有公共的邻居为点 x' . 若令 $G' = G - \{u, v_1, v_2, w_1, w_2, z_1, z'_1, z_2, z'_2, z_3, z'_3, z_4, z'_4, x, x'\}$, 则 $n - n' = 15$, $m - m' < 22$. 在图 G 中有 $M := M' + \{v_1w_1, v_2w_2, z_1z_3, z_2z_4, z'_3x, z'_4x'\}$, 于是在图 G 中有:

$$\begin{aligned} \gamma(G) &\leq \frac{7n'}{10} - \frac{m'}{5} + 6 \leq \frac{7}{10}(n - 15) - \frac{1}{5}(m - 22) + 6 \\ &< \frac{7n}{10} - \frac{m}{5} \end{aligned}$$

矛盾.

现在不妨令 $d(v_1) = 3, d(v_2) = 2$, 则设点 v_1 的邻居是点 w'_1 , 点 v_2 的邻居是点 w_2 . 若 $d(w_1) = 3$, 则设点 w_1 的邻居是点 z_1, z'_1 , 因为图 G 不包含 T^* , 则点 w'_1 与点 z_1, z'_1 互为邻居. 根据引理 2 可知, 点 z_1 有一个邻居为点 x . 因为图 G 不包含 T^* , 则点 z'_1 与点 x 相互连接. 若 $d(w_2) = 2$, 则设点 w_2 的邻居为点 z_2 . 如果点 z_2 与点 x 相互连接, 则图 G 如下所示(图 4), 可知图 G 并非反例.

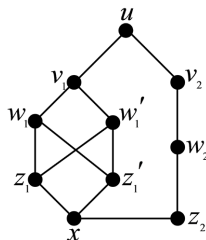


Figure 4. The graphs G in the case that vertex z_2 is adjacent to vertex x . Note that

$\{uv_1, w_1z_1, z_1x, v_2w_2\}$ is a maximal matching of G , which implies $\gamma(G) < \frac{7n}{10} - \frac{m}{5}$

图 4. 图 G 在点 z_2 与点 x 相互连接的情况下。 $\{uv_1, w_1z_1, z_1x, v_2w_2\}$ 是其一个极大匹

配, 可知 $\gamma(G) < \frac{7n}{10} - \frac{m}{5}$

故点 z_2 不与点 x 相互连接, 根据引理 2 知, 点 x 有一个邻居为点 y 。若令:

$G'' = G - \{u, v_1, v_2, w_1, w_1', w_2, z_1, z_1', x, y\}$, 则有: $n - n'' = 10$, $m - m'' \leq 15$,

$M := M'' + \{v_1w_1, v_2w_2, w_1'z_1', xy\}$ 。于是在图 G 中有:

$$\gamma(G) \leq \frac{7n''}{10} - \frac{m''}{5} + 4 \leq \frac{7}{10}(n-10) - \frac{1}{5}(m-15) + 4 = \frac{7n}{10} - \frac{m}{5}$$

矛盾。

若 $d(w_1) = d(w_2) = 3$, 则根据图 G 不含 T^* 和引理 2 可知, 点 w_2 有两个邻居为点 z_2, z_2' , 点 z_2 有两个邻居为点 z_3, z_3' , 其中点 z_2' 与点 z_3, z_3' 相互连接, 点 z_3 有邻居点 z_4 , 点 z_3' 则与点 z_4 相互连接。如果点 x 与点 z_4 相互连接, 则图 G 为 I 类图中的图 b 。若点 x 不与点 z_4 相互连接, 根据引理 2 可知, 点 x 有一个邻居为点 x' , 点 z_4 有一个邻居为点 z_4' 。现在考虑点 x' 和点 z_4' 的度数。由于对称性, 有以下三种情形。

情形 1 $d(x') = d(z_4') = 2$

设点 x' 的邻居是点 a_1 , 点 z_4' 的邻居是点 b_1 。若令:

$G' = G - \{u, v_1, v_2, w_1, w_1', w_2, z_1, z_1', x, x', a_1, z_2, z_2', z_3, z_3', z_4, z_4', b_1\}$ 则 $n - n' = 18$, $m - m' < 27$,

$M := M' + \{v_1w_1, w_1'z_1', x'a_1, z_2z_3, z_2'z_3', z_4b_1\}$, 在图 G 中有:

$$\gamma(G) \leq \frac{7n'}{10} - \frac{m'}{5} + 7 \leq \frac{7}{10}(n-18) - \frac{1}{5}(m-27) + 7 < \frac{7n}{10} - \frac{m}{5}$$

矛盾。

情形 2 $d(x') = 3$ 或 $d(z_4') = 3$

点 x', z_4' 中有一个为 3 度点, 不妨假设 $d(x') = 3$ 。设点 x' 有两个邻居点 a_1, a_1' , 点 z_4' 有邻居点 b_1 。因为图 G 中不包含 T^* , 点 a_1 或者点 a_1' 不能与点 b_1 相互连接。由引理 1 可知, 点 a_1 有邻居点 a_2 。因为图 G 不包含 T^* , 故点 a_1' 与点 a_2 邻接。由引理 2 知, 点 a_1 有邻居点 a_2' , 因为图 G 不包含 T^* , 故点 a_1' 与点 a_2' 相互连接。又根据引理 2 知, 点 a_2 有一个邻居为点 a_3 。因为图 G 不含 T^* , 则点 a_2' 与点 a_3 相互连接。因为图 G 为二部图, 则点 a_3 不与点 z_4' 相互连接。又由引理 2 可知, 点 a_3 有一个邻居为点 a_3' 。若令

$G'' = G - \{u, v_1, v_2, w_1, w_1', z_1, z_1', x, x', a_1, a_1', a_2, a_2', a_3, a_3', w_2, z_2, z_2', z_3, z_3', z_4, z_4', b_1\}$, 则图 G 与图 G'' 的点数、边数和极大匹配数目存在以下关系: $n - n'' = 23$, $m - m'' \leq 35$,

$M := M'' + \{v_1w_1, w_1'z_1', x'a_1, a_1'a_2', a_3a_3', z_2z_3, z_2'z_3', z_4b_1\}$ 。于是在图 G 中有:

$$\gamma(G) \leq \frac{7n''}{10} - \frac{m''}{5} + 9 \leq \frac{7}{10}(n-23) - \frac{1}{5}(m-35) + 9 < \frac{7n}{10} - \frac{m}{5}$$

矛盾。

情形 3 $d(x') = d(z'_4) = 3$

设点 x' 的邻居是点 a_1, a'_1 , 点 z'_4 的邻居是点 b_1, b'_1 。因为图 G 中不含 T^* , 故点 a_1, a'_1 不能与 b_1, b'_1 相互连接。由引理 1 可知, 点 a_1 有一个邻居为点 a_2 , 点 b_1 有一个邻居为点 b_2 , 由图 G 不包含 T^* 和引理 2 可知, 点 a'_1 与点 a_2, a'_2 相互连接, 点 a_2, a'_2 有公共的邻居点 a_3 , 点 a_3 有邻居点 a'_3 , 点 b'_1 与点 b_2, b'_2 相互连接, 点 b_2, b'_2 有公共的邻居点 b_3 。由引理 1 知, 点 b_3 有一个邻居为点 b'_3 。若令:

$G''' = G - \{u, v_1, v_2, w_1, w'_1, z_1, z'_1, x, x', a_1, a'_1, a_2, a'_2, a_3, a'_3, w_2, z_2, z'_2, z_3, z'_3, z_4, z'_4, b_1, b'_1, b_2, b'_2, b_3, b'_3\}$ 则 $n - n''' = 28$, $m - m''' \leq 43$, $M := M''' + \{uv_2, w_1z_1, w'_1z'_1, x'a_1, a'_1a_2, a_3a'_3, z_2z_3, z'_2z'_3, z'_4b_1, b'_1b_2, b_3b'_3\}$ 。于是在图 G 有:

$$\gamma(G) \leq \frac{7n'''}{10} - \frac{m'''}{5} + 11 \leq \frac{7}{10}(n - 28) - \frac{1}{5}(m - 43) + 11 < \frac{7n}{10} - \frac{m}{5}$$

矛盾。

说明了 $d(v_1) = d(v_2) = 3$ 。设点 v_1 的邻居是点 w'_1 , 点 v_2 的邻居是点 w'_2 , 点 w_1 的邻居是点 z_1 , 点 w_2 的邻居是点 z_2 。若 $m - m' = 8$, 则说明 $d(w_1) = d(w_2) = 2$ 。因为图 G 中不包含 T^* , 则点 w'_1 与点 z_1 相互连接, 点 w'_2 与点 z_2 相互连接, 在四圈 $v_1w_1z_1w'_1v_1, v_2w_2z_2w'_2v_2$ 中, 点 w_1 与点 w_2 均为 2 度点, 与引理 2 矛盾。故 $m - m' \geq 9$, 于是 $d(v_i) = d(w_i) = 3 (i \in [1, 2])$ 。设点 v_i 的邻居为点 w_i, w'_i , 点 w_i 的邻居为点 z_i, z'_i 。因为图 G 中不含 T^* , 故点 w'_i 与点 z_i, z'_i 相互连接。又根据引理 2 可知, 点 z_i 与点 z'_i 有公共的邻居点 x 。由引理 1, 设点 x 的邻居为点 y , 设点 w_2 的邻居为点 z_2 , 因为图 G 不包含 T^* , 则点 w'_2 与点 z_2 相互连接。根据引理 2 可设点 w_2 的邻居为 z'_2 , 因为图 G 中不含 T^* , 故点 w'_2, z'_2 相互连接, 而且点 z_2, z'_2 均与点 y 不同。由上述可知, 点 z_2, z'_2 也有公共的邻居点 x' , 点 x' 也有邻居点 y' 。若 $y = y'$, 则图 G 为 I 类图中的图 b 。又因为图 G 不含 T^* , 则 $d(y) \neq 3$ 。因此 $y \neq y'$, 现在考虑点 y, y' 的度数。由对称性, 有以下三种情形。

情形 1 $d(y) = d(y') = 2$

在此情况下, 若令 $G' = G - \{u, v_1, v_2, w_1, w'_1, w_2, w'_2, z_1, z'_1, z_2, z'_2, x, x', y, y'\}$, 有 $n - n' = 15$, $m - m' \leq 22$, $M := M' + \{v_1w'_1, w_1z_1, xy, v_2w_2, w'_2z'_2, x'y'\}$, 则在图 G 中有:

$$\gamma(G) \leq \frac{7n'}{10} - \frac{m'}{5} + 6 \leq \frac{7}{10}(n - 15) - \frac{1}{5}(m - 22) + 6 < \frac{7n}{10} - \frac{m}{5}$$

矛盾。

情形 2 $d(y) = 3$ 或 $d(y') = 3$

点 y, y' 中有一个点度数为 3, 不妨假设 $d(y) = 3$ 。设点 y 的邻居为点 a_1, a'_1 。因为图 G 中不含 T^* , 故点 a_1, a'_1 不与点 y' 相互连接。由引理 1 知, 点 a_1 有一个邻居为点 a_2 。因为图 G 中不含 T^* , 则点 a'_1 与点 a_2 相互连接。由引理 2 和图 G 不包含 T^* 可知, 点 a_1 有邻居点 a'_2 且点 a'_1 与点 a'_2 相互连接。由图 G 不含 T^* 及引理 2 可知, 点 a'_2 与点 a'_1 有公共的邻居点 a_3 。若令

$G'' = G - \{u, v_1, v_2, w_1, w'_1, w_2, w'_2, z_1, z'_1, z_2, z'_2, x, x', y, y', a_1, a'_1, a_2, a'_2, a_3\}$, 有 $n - n'' = 20$, $m - m'' \leq 30$, $M := M'' + \{v_1w'_1, w_1z_1, xy, a'_1a'_2, a_2a_3, v_2w_2, w'_2z'_2, x'y'\}$, 则在图 G 中有:

$$\gamma(G) \leq \frac{7n''}{10} - \frac{m''}{5} + 8 \leq \frac{7}{10}(n - 20) - \frac{1}{5}(m - 30) + 8 + \frac{7n}{10} - \frac{m}{5}$$

矛盾。

情形 3 $d(y) = d(y') = 3$

设点 y 的邻居为点 a_1, a'_1 , 点 y' 的邻居为点 b_1, b'_1 。因为图 G 中不含 T^* , 故点 a_1, a'_1 不与点 b_1, b'_1 相互连接。根据引理 2 知, 点 a_1 有邻居点 a_2 , 点 b_1 有邻居点 b_2 , 由图 G 不含 T^* 及引理 2 可知, 点 a'_1 与点 a_2, a'_2

相互连接, 点 b'_1 与点 b_2, b'_2 相互连接, 点 a_2, a'_2 有公共的邻居为点 a_3 , 点 b_2, b'_2 有公共的邻居点为 b_3 。根据引理 2 可知, 点 a_3, b_3 有邻居分别为点 a_4, b_4 。根据点 a_4, b_4 的度数有以下两种情形。

情形 3.1 点 a_4, b_4 中至少有一个为 2 度点

不妨假设 $d(a_4) = 2$, 设点 a_4 的邻居为点 a_5 , 若令

$G''' = G - \{u, v_1, v_2, w_1, w'_1, z_1, z'_1, x, y, a_1, a'_1, a_2, a'_2, a_3, a_4, a_5, w_2, w'_2, z_2, z'_2, x', y', b_1, b'_1, b_2, b'_2, b_3, b_4\}$ 则有 $n - n''' = 28$, $m - m''' \leq 43$, $M := M''' + \{uv_1, w_1 z_1, z'_1 x, a_1 a_2, a'_1 a'_2, a_4 a_5, w'_2 z'_2, w_2 z_2, y' b'_1, b_1 b_2, b_3 b_4\}$, 则在图 G 中有:

$$\gamma(G) \leq \frac{7n'''}{10} - \frac{m'''}{5} + 11 \leq \frac{7}{10}(n-28) - \frac{1}{5}(m-43) + 11 = \frac{7n}{10} - \frac{m}{5}$$

矛盾。

情形 3.2 $d(a_4) = d(b_4) = 3$

设点 a_4 的邻居为点 a_5, a'_5 , 点 b_4 的邻居为点 b_5, b'_5 , 由图 G 不含 T^* 和引理 2 可知, 点 a_5 有邻居点 a_6, a'_6 , 点 a'_5 与点 a'_6 相互连接, 且点 a_6 与点 a'_6 有公共的邻居为点 a_7 。同理, 点 b_5 有两个邻居为点 b_6, b'_6 , 其中点 b'_5 与点 b'_6 相互连接, 且点 b_6 与点 b'_6 有公共的邻居为点 b_7 。又由引理 2 可知, 点 a_7, b_7 的邻居分别为点 a_8, b_8 。若令:

$$G''' = G - \{u, v_1, v_2, w_1, w'_1, z_1, z'_1, x, y, a_1, a'_1, a_2, a'_2, a_3, a_4, a_5, a'_5, a_6, a'_6, a_7, a'_7, a_8, w_2, w'_2, z_2, z'_2, x', y', b_1, b'_1, b_2, b'_2, b_3, b_4, b_5, b'_5, b_6, b'_6, b_7\},$$

则有 $n - n''' = 38$, $m - m''' = 58$,

$M := M''' + \{uv_1, w'_1 z'_1, z_1 x, a_1 a_2, a'_1 a'_2, a_4 a'_5, a_5 a_6, a_7 a_8, w'_2 z'_2, w_2 z_2, y' b'_1, b_1 b_2, b_3 b_4, b'_5 b'_6, b_6 b_7\}$ 则在图 G 中有:

$$\gamma(G) \leq \frac{7n'''}{10} - \frac{m'''}{5} + 15 \leq \frac{7}{10}(n-38) - \frac{1}{5}(m-58) + 15 = \frac{7n}{10} - \frac{m}{5}$$

矛盾。

3. 定理 1 的证明

证明 设 uv 是图 G 的任意一条边。令 $G' = G - \{u, v\}$, n' 和 m' 是图 G 的点数和边数。则有: $n - n' = 2$, $m - m' = \frac{3n}{2} - 5$ 。因为在图 G' 的极大匹配中添加边 $\{uv\}$ 会成为图 G 的极大匹配, 而且图 G' 中没有是三正则图的连通分量, 由定理 2 有:

$$\gamma(G) \leq \frac{7}{10}(n-2) - \frac{1}{5}\left(\frac{3n}{2} - 5\right) + 1 = \frac{2n+3}{5}。$$

基金项目

国家自然科学基金 NSFC (Grant number: 11801522)。

参考文献

- [1] Yannakakis, M. and Gavril, F. (1980) Edge Dominating Sets in Graphs. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **38**, 364-372. <https://doi.org/10.1137/0138030>
- [2] Matsumoto, Y., Kamiyama, N. and Imai, K. (2011) An Approximation Algorithm Dependent on Edge-Coloring Number for Minimum Maximal Matching Problem. *Information Processing Letters*, **111**, 465-468. <https://doi.org/10.1016/j.ipl.2011.02.006>
- [3] Cardoso, D.M., Cerdeira, J.O., Delorme, C. and Silva, P.C. (2008) Efficient Edge Domination in Regular Graphs. *Discrete Applied Mathematics*, **156**, 3060-3065. <https://doi.org/10.1016/j.dam.2008.01.021>

- [4] Orlovich, Y., Finke, G., Gordon, V. and Zverovich, I. (2007) Approximability Results for the Maximum and Minimum Maximal Induced Matching Problems. *Discrete Optimization*, **5**, 584-593. <https://doi.org/10.1016/j.disopt.2007.11.010>
- [5] Baste, J., Fürst, M., Henning, M.A., Mohr, E. and Rautenbach, D. (2021) Bounding and Approximating Minimum Maximal Matchings in Regular Graphs. *Discrete Mathematics*, **344**, Article ID: 112243. <https://doi.org/10.1016/j.disc.2020.112243>
- [6] Song, W.Y., Miao, L.Y., Wang, H.C. and Zhao, Y.C. (2014) Maximal Matching and Edge Domination in Complete Multipartite Graphs. *International Journal of Computer Mathematics*, **91**, No. 5. <https://doi.org/10.1080/00207160.2013.818668>