Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2021, 10(10), 3574-3581**
Published Online October 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2021.1010377

Hans汉斯

半线性发展方程支配的微分博弈鞍点的通有唯一性

计　伟

贵州建设职业技术学院，信息管理学院，贵州　贵阳
Email: weiji2021@126.com

收稿日期：2021年9月25日；录用日期：2021年10月18日；发布日期：2021年10月27日

摘　要

应用集值分析方法，研究半线性发展方程支配的微分博弈鞍点的稳定性，证明了半线性发展方程支配的微分博弈关于控制系统右端函数发生扰动时，对应的鞍点具有通有唯一性，也就是在Baire纲分类意义下，大多数半线性发展方程支配的微分博弈的鞍点具有唯一解。

关键词

通有唯一性，半线性发展方程，微分博弈，集值映射，鞍点

Generic Uniqueness of Saddle Point for Differential Games Governed by Semi-Linear Evolution Equation

Wei Ji

School of Information and Management, Guizhou Polytechnic of Construction, Guiyang Guizhou
Email: weiji2021@126.com

Received: Sep. 25th, 2021; accepted: Oct. 18th, 2021; published: Oct. 27th, 2021

Abstract

In this paper, the generic uniqueness of saddle point for differential games governed by semi-linear evolution equation is studied. By employing the method of set-valued analysis, we prove that, the generic uniqueness of differential games governed by semi-linear evolution equation with respect to perturb function of the right-hand control system, that is, most of differential games governed by semi-linear evolution equation exist unique solution, in the sense of Baire's category.

文章引用: 计伟. 半线性发展方程支配的微分博弈鞍点的通有唯一性[J]. 应用数学进展, 2021, 10(10): 3574-3581.
DOI: 10.12677/aam.2021.1010377

Keywords

Generic Uniqueness, Semi-Linear Evolution Equation, Differential Games, Set-Valued Mapping, Saddle Point

1. 引言

微分博弈诞生于 20 世纪 50~60 年代，尤其以 Isaacs [1]于 1965 年出版的专著《Differential Games》为主要标志。Isaacs 在其专著中指出：微分博弈是指博弈参与人在进行博弈活动时，参与人从各自的控制集中选择控制策略，而策略间的相互作用需要通过的状态是由控制系统来确定。Friedman [2]于 1971 年出版的专著《Differential Games》奠定了微分博弈的数学理论，且该专著应用离散近似序列的方法建立了微分博弈的值与鞍点的存在性。张嗣瀛[3]于 1987 年出版的专著《微分对策》，是国内最早关于微分博弈的专著。李登峰[4]于 2000 年出版的专著《微分对策及其应用》，从数学角度详细、系统介绍了微分对策的概念、理论、方法及其应用。此外，华人学者雍炯敏[5]于 2015 年出版的专著《微分博弈简明教程》，对近年来关于二人零和微分博弈、无界控制微分博弈、追逃微分博弈、线性二次微分博弈和切换系统微分博弈等的研究进行了详细阐述。

无论是对一般微分博弈的研究，还是二人零和微分博弈的研究，不仅要研究平衡点的存在性，更要研究平衡点的稳定性。当我们获得解的存在性时，但其解不唯一时，我们就会面临解的选择性困惑。这就很难为决策者提供决策方案。甚至不同参与人选择不同平衡点时，就可能会得到非均衡点，更有可能走向新的博弈，博弈就变得永无止境。因此，对博弈稳定性的研究，变得更本质。

关于稳定性研究，一直以来备受关注，许多专家学者取得了大量研究成果。Fort [6]于 1950 年，为研究连续映射不动点的稳定性，引入本质不动点概念。吴文俊和江嘉禾[7]于 1962 年，对有限 N 人非合作博弈首次引入本质 Nash 均衡点概念。江嘉禾[8]于 1963 年，进一步对有限 N 人非合作博弈引入了 Nash 平衡点集本质连通区概念，并证明了对任何有限 N 人非合作博弈，其 Nash 均衡集至少存在一个本质连通区。Kohlberg 和 Mertens [9]于 1986 年，研究了均衡的策略稳定性，应用代数几何的方法证明了每个有限博弈的 Nash 平衡点集由有限个连通区组成，而且其中至少有一个是本质的。关于稳定性的研究还可参考俞建[10]于 2008 年出版的专著《博弈论与非线性分析》。

Kenderov [11]于 1984 年，讨论了大多数优化问题具有唯一解。Ribarska 和 Kenderov [12]于 1988 年，讨论了在 Baire 纲分类意义下，大多数二人零和微分博弈具有唯一解。陈国强等[13]于 1995 年，应用集值分析方法，讨论了一般二元函数鞍点具有通有唯一性，也就是在 Baire 纲分类意义下，大多数二元函数的鞍点具有唯一解。俞建等[14]于 1998 年，通过 Baire 纲定理讨论了微分包含解的通有唯一性，也就是在 Baire 纲分类意义下，大多数微分包含都具有唯一解。此外，2011 年、2012 年、2013 年、2017 年，俞建等应用集值映射理论，构造完备度量空间，在 Baire 纲分类意义下，分别在文献([15] [16] [17] [18])中讨论了均衡点的通有唯一性、一类向量 Ky Fan 不等式解的通有唯一性、通有唯一性定理及应用，以及大多数单调变分不等式具有唯一解。

特别地，近年来应用非线性分析理论研究微分博弈均衡点的稳定性，已取得了一些比较好的研究成

果。俞建等[19]于 2014 年，研究了经典最优控制关于状态方程右端函数扰动时的通有稳定性。邓红勇等([20] [21])于 2015 年，先后研究了具有一阶等度连续的非线性最优控制的通有稳定性，以及半线性发展方程支配的目标泛函为二次型时，最优控制问题的通有稳定性。俞建等[22]于 2020 年，讨论了非合作微分博弈平衡点集的通有稳定性。

受到以上文献的启发，我们基于文献[23]证明了半线性发展方程支配的无限维微分博弈鞍点的存在性，通过对控制系统关于右端函数发生扰动时构造相应的问题空间，引入恰当度量，从而得到一个完备度量空间，在完备度量空间框架下，引入集值映射，并证明了集值映射是一个上半连续紧映射。然后，应用集值分析方法，在 Baire 纲分类意义下，证明了半线性发展方程支配的微分博弈的鞍点具有通有唯一性。

2. 模型和预备知识

根据文献[23]，我们构造如下的博弈模型。设状态空间 E 是 Hilbert 空间，参与人 1 和 2 的控制取值集 U 和 V 是紧度量空间，设 $-A:D(A)\subset E\to E$ 是 E 上的有界线性算子生成的 C_0 半群 $\{S(t)\}$。设 $0\le s<t\le T$，

$$U^*[s,t]=\{u(\cdot)\,|\,u(\cdot):[s,t]\to U\text{可测}\},$$

$$V^*[s,t]=\{v(\cdot)\,|\,v(\cdot):[s,t]\to V\text{可测}\}。$$

函数 $u(\cdot)\in U^*[s,t]$ 和 $v(\cdot)\in V^*[s,t]$ 分别叫做参与人 1 和 2 的控制过程。我们考虑如下的状态方程：

$$\begin{cases}\mathrm{d}X(t)=\left[-AX(t)+f\left(t,X(t),u(t),v(t)\right)\right]\mathrm{d}t, & t_0\le t\le T,\\ X(t_0)=x_0,\end{cases}\tag{1}$$

其中，$f:[0,T)\times E\times U\times V\to E$ 是给定的映射，$(t_0,x_0)\in[0,T)\times E$，$u(\cdot)\in U^*[t_0,T]$，$v(\cdot)\in V^*[t_0,T]$。显然，状态方程等价于如下形式的积分方程：

$$X(t)=S(t-t_0)x_0+\int_{t_0}^{t}S(t-\tau)f\left(\sigma,X(\sigma),u(\sigma),v(\sigma)\right)\mathrm{d}\sigma。\tag{2}$$

下面，关于函数 f 和半群 $\{S(t)\}$，我们引入如下假设。

[A1]函数 f 是一致连续并且存在常数 $K>0$，使得对任意的 $t\in[0,T]$，$x,y\in E$ 和 $u\in U$，$v\in V$，

$$\|f(t,x,u,v)-f(t,y,u,v)\|\le K\|x-y\|,$$

$$\|f(t,x,u,v)\|\le K。$$

[A2]半群 $\{S(t)\}$ 是紧并且是解析，存在常数 $\omega\ge 0$ 和 $C\ge 0$ 使得

$$\|S(t)\|\le C\mathrm{e}^{\omega t}。$$

显然，在假设[A1]下，对初始对 $(t_0,x_0)\in[t_0,T)\times E$，$u(\cdot)\in U^*[t_0,T]$，$v(\cdot)\in V^*[0,T]$，状态方程(1)存在唯一解，不妨定义为 $\phi(\cdot,t_0,x_0,u(\cdot),v(\cdot))$。

现在，我们定义参与人的控制策略。对时间区间 $[t_0,T)$ 进行如下剖分，即设

$$\Pi_n=\{t_0<t_1<\cdots<t_p=T\},$$

且满足 $\|\Pi_n\|\to 0(n\to\infty)$。参与人 1 的策略定义为 $\Gamma=\{\Gamma_n\}$，其中第 n 阶段的策略 $\{\Gamma_n\}$ 是一个 p 元对 $(\Gamma_{n1},\Gamma_{n2},\cdots,\Gamma_{np})$，且 $\Gamma_{n1}\in U^*[t_0,t_1]$，对 $2\le j\le p$，Γ_{nj} 满足

$$\Gamma_{nj}: U^*\left[t_0, t_{j-1}\right) \times V^*\left[t_0, t_{j-1}\right) \to U^*\left[t_{j-1}, t_j\right)。$$

同样，我们对时间区间$[t_0, T)$也可以进行如下剖分，即设

$$\bar{\Pi}_n = \left\{t_0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_q = T\right\},$$

且满足$\|\bar{\Pi}_n\| \to 0 (n \to \infty)$。参与人 2 的策略定义为$\Delta = \{\Delta_n\}$，其中第 n 阶段的策略$\{\Delta_n\}$是一个 q 元对$\left(\Delta_{n1}, \Delta_{n2}, \cdots, \Delta_{nq}\right)$，且$\Delta_{n1} \in V^*[s_0, s_1]$，对$2 \le j \le q$，$\Delta_{nj}$满足

$$\Delta_{nj}: U^*\left[s_0, s_{j-1}\right) \times V^*\left[s_0, s_{j-1}\right) \to V^*\left[s_{j-1}, s_j\right)。$$

第 n 阶段策略对(Γ_n, Δ_n)按如下方式决定控制对$(u_n(\cdot), v_n(\cdot)) \in U^*[t_0, T] \times V^*[t_0, T]$。设剖分$\Pi_n$和$\bar{\Pi}_n$的细分为

$$\hat{\Pi}_n = \{t_0 = r_0 < r_1 < \cdots < r_k = T\},$$

控制对$u_n(\cdot)$和$v_n(\cdot)$分别由 k 元对$(u_{n1}(\cdot), u_{n2}(\cdot), \cdots, u_{nk}(\cdot))$和$(v_{n1}(\cdot), v_{n2}(\cdot), \cdots, v_{nk}(\cdot))$决定。其中

$$u_{nj}(\cdot) \in U^*\left[r_{j-1}, r_j\right], v_{nj}(\cdot) \in V^*\left[r_{j-1}, r_j\right]。$$

设$u_n^j(\cdot), v_n^j(\cdot)$分别是$(u_n(\cdot), v_n(\cdot))$在区间上$\left[r_0, r_j\right)$的限制。在$[r_0, r_1)$上，设$u_{n1}(\cdot) = \Gamma_{n1}$和$v_{n1}(\cdot) = \Delta_{n1}$。设$1 \le j \le k-1$，若$r_j = t_i$，则在$\left[r_j, r_{j+1}\right)$上取

$$u_{n,j+1}(\cdot) = \Gamma_{n,j+1}\left(u_n^j(\cdot), v_n^j(\cdot)\right),$$

$$v_{n,j+1}(\cdot) = \Delta_{n,j+1}\left(u_n^{j'}(\cdot), v_n^{j'}(\cdot)\right)。$$

其中，l 是使得$s_l \le r_j$和$s_l = r_{j'}$的最大整数。若$r_j = s_m$，则在$\left[r_j, r_{j+1}\right)$上取

$$u_{n,j+1}(\cdot) = \Gamma_{n,k+1}\left(u_n^{m'}(\cdot), v_n^{m'}(\cdot)\right),$$

$$v_{n,j+1}(\cdot) = \Delta_{n,m+1}\left(u_n^j(\cdot), v_n^j(\cdot)\right)。$$

其中，k 是使得$t_k \le r_j$和$t_k = r_{m'}$的最大整数。这样，控制对$(u_n(\cdot), v_n(\cdot))$就称为策略对(Γ, Δ)在第 n 阶段的结果。

因为时间区域$[t_0, T]$是有限时间区域，并且在恰当条件下，Mayer 型泛函、Lagrange 型泛函和 Bolza 型泛函是相互等价的。因此，根据策略对(Γ, Δ)，我们定义如下的 Mayer 型的目标泛函：

$$P(t_0, x_0, \Gamma, \Delta) = g\left(\phi[t_0, x_0, \Gamma, \Delta]\right)。 \tag{3}$$

并考虑如下的博弈问题。

博弈(DG)：参与人 1 选择策略Γ极大化支付$P(t_0, x_0, \Gamma, \Delta)$，参与人 2 选择策略$\Delta$极大化支付$P(t_0, x_0, \Gamma, \Delta)$，即：

$$P\left(t_0, x_0, \Gamma^*, \Delta^*\right) = \sup_\Gamma P\left(t_0, x_0, \Gamma, \Delta^*\right),$$

$$P\left(t_0, x_0, \Gamma^*, \Delta^*\right) = \sup_\Delta P\left(t_0, x_0, \Gamma^*, \Delta\right)。$$

定义 2.1 设(t_0, x_0)是给定的初始对，若对任意的策略(Γ, Δ)，下式成立

$$P\left(t_0, x_0, \Gamma, \Delta^*\right) \le P\left(t_0, x_0, \Gamma^*, \Delta^*\right) \le P\left(t_0, x_0, \Gamma^*, \Delta\right)。$$

则称$\left(\Gamma^*, \Delta^*\right)$是博弈(DG)的鞍点。

现在，为研究问题的需要，我们引入如下假设。

[A3]函数 g 是一致连续的。

[A4]对所有的 $(t,x,p)\in[0,T]\times E\times E$，下式成立，

$$\sup_{v\in V}\inf_{u\in U}\left\langle -p,f(t,x,u,v)\right\rangle=\inf_{u\in U}\sup_{v\in V}\left\langle -p,f(t,x,u,v)\right\rangle。$$

引理 2.1 ([23])假设[A1]-[A4]成立，初始对 $(t_0,x_0)\in[0,T)\times E$ 给定，则博弈存在鞍点。

为研究通有唯一性，我们构造如下的问题空间。设

$$M=\left\{f\,\middle|\,f\text{ 满足条件}[\mathrm{A1}]\right\}。$$

$\forall f,g\in M$，定义距离为：

$$d(f,g)=\sup_{(t,x,u,v)\in[t_0,T]\times R^n\times U\times V}\left\|f(t,x,u,v)-g(t,x,u,v)\right\|。$$

则容易证明 (M,d) 是一个完备度量空间。

定义 2.2：设

$$S(f)=\left\{\left(\Gamma^*,\Delta^*\right)\middle|\forall f\in M,\left(\Gamma^*,\Delta^*\right)\text{是微分博弈}(\mathrm{DG})\text{的鞍点}\right\}。$$

则 $S:f\to S(f)$ 定义了一个 $M\to U\times V$ 集值映射，记为 $S:M\to 2^{U\times V}$。

引理 2.2 ([13])：设 $\left(\Gamma^1,\Delta^1\right),\left(\Gamma^2,\Delta^2\right)$ 是微分博弈(DG)的鞍点，则 $\left(\Gamma^1,\Delta^2\right)$，$\left(\Gamma^2,\Delta^1\right)$ 也是微分博弈(DG)的鞍点。

我们的目的是研究微分博弈(DG)的解集关于右端函数 f 扰动后，鞍点的通有唯一性。即：应用集值映射理论，在 Baire 纲分类意义下，讨论其解的通有唯一性。因此，为研究其解集的通有唯一性，我们引入如下必要的定义和引理。

定义 2.3 ([10])：$\forall f\in M$，$S(f)$ 是一个非空集合，对 $C([t_0,T])$ 中的任意开集 G，$G\supset S(f)\left(G\cap S(f)\neq\varnothing\right)$，若存在 V 的任意开领域 $O(f)$，使得 $\forall g\in O(f)$，有 $O\supset S(f)\left(O\cap S(g)\neq\varnothing\right)$，称集值映射 S 在 f 上半连续(下半连续)。若集值映射 S 在 f 既上半连续，又下半连续，则称 S 在 f 连续。若 $\forall f\in M$，集值映射 S 在 f 上半连续(下半连续、连续)，则称 S 在 M 上半连续(下半连续、连续)。

定义 2.4 ([10])：若 $f\in M$，$S(f)$ 是一个非空紧集，且 S 在 f 上半连续，则称 S 是一个上半连续紧映射(USCO)。

引理 2.3 ([10])：若 M 是完备度量空间，则必是 Baire 空间。

定义 2.5 ([10])：称 Graph $S(f)=\left\{(f,\Gamma,\Delta)\in M\times U\times V\,\middle|\,(\Gamma,\Delta)\in S(f)\right\}$ 为 S 的图像，若 S 的图像 Graph $h(S)$ 是闭的，则称集值映射 S 为闭映射。

引理 2.4 ([10])：设集值映射 $S:M\to 2^{U\times V}$ 是闭的，且 $U\times V$ 是紧集，则 S 是一个上半连续映射。

定义 2.6 ([10])：设 $Q\subset M$，若 Q 包含 M 中一列稠密开集的交，则称 Q 是 M 中剩余集。

引理 2.5 (Fort)：设 M 是一个完备度量空间，集值映射 $S:M\to 2^{U\times V}$ 是一个上半连续紧映射，则存在 M 中的一个稠密剩余集 Q，使得 $\forall f\in M$，$S(f)$ 下半连续，从而连续。

3. 通有唯一性

定理 3.1 若假设[A1]~[A4]成立，则对任意的 $f\in M$，$S(f)\neq\varnothing$。

注：根据引理 2.1，结论显然成立。

定理 3.2 $\forall f\in M$，$S:M\to 2^{U\times V}$ 是一个 USCO 映射。

证明：因为 U,V 是紧集，所以 $U\times V$ 是紧集，由引理 2.4 知，只需证明集值映射 $S:M\to 2^{U\times V}$ 是一个闭映射即可，也就是证明其图像：

$$\text{Grap}\, S(f)=\left\{(f,\Gamma,\Delta)\in M\times U\times V \,\middle|\, (\Gamma,\Delta)\in S(f)\right\},$$

是闭集。不妨设 $\{f_k\}\in M$，$f_k\to f\in M$，$(\Gamma_k,\Delta_k)\in S(f_k)$，且 $(\Gamma_k,\Delta_k)\to(\Gamma^*,\Delta^*)$，则为证明其 Grap $S(f)$ 的闭性，只需证明 $(\Gamma^*,\Delta^*)\in S(f)$。因为 $(\Gamma_k,\Delta_k)\in S(f_k)$，则 $\forall(\Gamma,\Delta)\in U\times V$，下式成立

$$P(t_0,x_0,\Gamma,\Delta_k)\le P(t_0,x_0,\Gamma_k,\Delta_k)\le P(t_0,x_0,\Gamma_k,\Delta)。$$

因 $(\Gamma_k,\Delta_k)\to(\Gamma^*,\Delta^*)$，所以由引理 2 及其推论有：

$$P(t_0,x_0,\Gamma,\Delta_k)\to P(t_0,x_0,\Gamma,\Delta^*),$$

$$P(t_0,x_0,\Gamma_k,\Delta_k)\to P(t_0,x_0,\Gamma^*,\Delta^*),$$

$$P(t_0,x_0,\Gamma_k,\Delta)\to P(t_0,x_0,\Gamma^*,\Delta)。$$

所以 $\forall(\Gamma,\Delta)\in U\times V$，

$$P(t_0,x_0,\Gamma,\Delta^*)\le P(t_0,x_0,\Gamma^*,\Delta^*)\le P(t_0,x_0,\Gamma^*,\Delta)。$$

因此 $(\Gamma^*,\Delta^*)\in S(f)$，这样我们证明了 Grap $S(f)$ 是闭的，所以集值映射 $S:M\to 2^{U\times V}$ 是一个上半连续紧映射(USCO)。

定理 3.3 存在 M 中的一个稠密剩余集 Q，使得 $\forall f\in Q$，$S(f)$ 是一个单点集。

证明：因为 M 是一个完备度量空间，$U\times V$ 是紧度量空间，而 $S:M\to 2^{U\times V}$ 是一个 USCO 映射，由引理 2.5，存在 M 中的一个稠密剩余集 Q，使得 $\forall f\in Q$，S 在 f 下半连续。

$\forall f\in Q$，若 $S(f)$ 不是单点集，则存在 $(\Gamma_1,\Delta_1)\in S(f)$，$(\Gamma_2,\Delta_2)\in S(f)$，而 $(\Gamma_1,\Delta_1)\ne(\Gamma_2,\Delta_2)$，不妨设 $\Gamma_1\ne\Gamma_2$，由引理 2.2 知，$(\Gamma_2,\Delta_1)\in S(f)$，由凸集分离定理，存在 E 中的连续线性泛函 h，使得 $h(\Gamma_1)\ne h(\Gamma_2)$，定义 $g:U\to R$ 如下：

$$\forall\Gamma\in U,\quad g(\Gamma)=\frac{h(\Gamma)-h(\Gamma_2)}{h(\Gamma_1)-h(\Gamma_2)}。$$

显然，g 在紧集 U 上连续有界，$g(u_1)=1$，$g(u_2)=0$，且 $\forall x_1,x_2\in U$，$\forall k\in(0,1)$，有

$$g(kx_1+(1-k)x_2)=kg(x_1)+(1-k)g(x_2)。$$

$\forall\varepsilon>0$，$\forall(\Gamma,\Delta)\in U[t_0,T]\times V[t_0,T]$，定义

$$P_\varepsilon(t_0,x_0,\Gamma,\Delta)=P(t_0,x_0,\Gamma,\Delta)-\varepsilon P(\Gamma),$$

容易验证 P_ε 连续，且 $P_\varepsilon\to P(\varepsilon\to 0)$。

令 $G=\left\{\Gamma\in U:g(\Gamma)>\frac{1}{2}\right\}\times V$，是 $U\times V$ 中的开集，又因为 $g(\Gamma_1)=1$，有 $(\Gamma_1,\Delta_1)\in G$，$G\cap S(f)\ne\varnothing$，而集值映射 S 在 f 下半连续，当 $\varepsilon>0$ 充分小时，有 $G\cap S(f_\varepsilon)\ne\varnothing$，取 $(\Gamma^*,\Delta^*)\in G\cap S(f_\varepsilon)$，则有 $(\Gamma^*,\Delta^*)\in S(f_\varepsilon)$，$g(\Gamma^*)>\frac{1}{2}$ 有，

$$\begin{aligned}\Omega_\varepsilon&=\sup_{\Gamma\in U}\inf_{\Delta\in V}P_\varepsilon(t_0,x_0,\Gamma,\Delta)\le\sup_{\Gamma\in U}P_\varepsilon(t_0,x_0,\Gamma,\Delta^*)=P_\varepsilon(t_0,x_0,\Gamma^*,\Delta^*)\\&=\inf_{\Delta\in V}P_\varepsilon(t_0,x_0,\Gamma^*,\Delta)=\inf_{\Delta\in V}\left[P(t_0,x_0,\Gamma^*,\Delta)-\varepsilon P(\Gamma^*)\right]\\&=\inf_{\Delta\in V}P(t_0,x_0,\Gamma^*,\Delta)-\varepsilon P(\Gamma^*)<\sup_{\Gamma\in U}\inf_{\Delta\in V}P_\varepsilon(t_0,x_0,\Gamma^*,\Delta^*)-\frac{\varepsilon}{2}=\Omega_0-\frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

其中，$\Omega=\sup\limits_{\Gamma\in U}\inf\limits_{\Delta\in V}P_{\varepsilon}\left(t_0,x_0,\Gamma,\Delta\right)$。

另一方面，因为$\left(\Gamma_2,\Delta_1\right)\in S\left(f\right)$，并且$g\left(\Gamma_2\right)=0$，所以

$$\begin{aligned}\Omega_0&=\sup_{\Gamma\in U}\inf_{\Delta\in V}P\left(t_0,x_0,\Gamma,\Delta\right)\le\sup_{\Gamma\in U}P\left(t_0,x_0,\Gamma,\Delta_1\right)\\&=P_{\varepsilon}\left(t_0,x_0,\Gamma_2,\Delta_1\right)=\inf_{\Delta\in V}P_{\varepsilon}\left(t_0,x_0,\Gamma_2,\Delta\right)\\&=\inf_{\Delta\in V}\left[P\left(t_0,x_0,\Gamma_2,\Delta\right)-\varepsilon P\left(\Gamma_2\right)\right]=\inf_{\Delta\in V}P_{\varepsilon}\left(t_0,x_0,\Gamma_2,\Delta\right)\\&\le\sup_{\Gamma\in U}\inf_{\Delta\in V}P_{\varepsilon}\left(t_0,x_0,\Gamma,\Delta\right)-\frac{\varepsilon}{2}=\Omega_{\varepsilon}.\end{aligned}$$

矛盾。所以，$\forall f\in Q$，$S\left(f\right)$是一个单点集。

4. 结论

众所周知，并非所有微分博弈都具有唯一鞍点解。同样，半线性发展方程支配的微分博弈也不一定具有唯一鞍点解，但是，定理3.3告知我们，当控制系统右端函数发生扰动时，在Baire纲分类意义下，大多数半线性发展方程支配的微分博弈具有唯一解。

参考文献

[1] Isaacs, R. (1965) Differential Games. Wiley, New York.

[2] Friedman, A. (1971) Differential Games. Wiley, New York.

[3] 张嗣瀛. 微分博弈[M]. 北京: 科学出版社, 1987.

[4] 李登峰. 微分博弈及其应用[M]. 北京: 国防工业出版社, 2000.

[5] Yong, J.M. (2015) Differential Games (A Concise Introduction). Word Scientific, Singapore. https://doi.org/10.1142/9121

[6] Fort, M.K. (1950) Essential and Nonessential Fixed Points. *American Journal of Mathematics*, **72**, 315-322. https://doi.org/10.2307/2372035

[7] Wu, W.T. and Jiang, J.H. (1962) Essential Equilibrium Points of N-Person Noncooperative Games. *Scientia Sincia*, **11**, 1307-1322.

[8] Jiang, J.H. (1962) Essential Fixed Points of the Multivalued Mappings. *Scientia Sincia*, **11**, 293-298.

[9] Kohlberg, E. and Metens, J.F. (1991) On the Strategic Stability of Equilibrium. Springer-Verlag, Berlin.

[10] 俞建. 博弈论与非线性分析[M]. 北京: 科学出版社, 2008.

[11] Kenderov, P. (1984) Most of the Optimization Problems Has Unique Solutions. In: Brosowski, B. and Deutsch, F., Eds., *Proceedings*, *Oberwolfach on Parametric Optimization*, Birkhauser, Basel, 203-216. https://doi.org/10.1007/978-3-0348-6253-0_13

[12] Ribarska, N. and Kenderov, P. (1988) Most of the Two-Person Zero-Sum Games Have Unique Solution. *Workshop/ Mini-Conference on Functional Analysis and Optimiztion*, Canberra, 73-82.

[13] Tan, K.K., Yu, J. and Yuan, X.Z. (1995) The Uniqueness of Saddle Points. *Bulletin of the Polish Academy of Sciences Mathematics*, **43**, 119-129.

[14] Yu, J. and Yuan, X.Z. (1998) The Study of Solutions for Differential Inclusions and Differential Equations in the Sense of Baire Category Theory. *Applied Mathematics Letters*, **11**, 51-56. https://doi.org/10.1016/S0893-9659(98)00055-X

[15] Yu, J., Peng, D.T. and Xiang, S.W. (2011) Generic Uniqueness of Equilibrium Points. *Nonlinear Analysis*: *Theory*, *Methods & Applications*, **74**, 6326-6332. https://doi.org/10.1016/j.na.2011.06.011

[16] Peng, D.T., Yu, J. and Xiu, N.H. (2012) Generic Uniqueness of Solutions for a Class of Vector Ky Fan Inequalities. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **155**, 165-179. https://doi.org/10.1007/s10957-012-0062-1

[17] Peng, D.T., Yu, J. and Xiu, N.H. (2013) Generic Uniqueness Theorems with Some Applications. *Journal of Global Optimization*, **56**, 713-725. https://doi.org/10.1007/s10898-012-9903-6

[18] 俞建, 彭定涛. 大多数单调变分不等式具有唯一解[J]. 应用数学学报, 2017, 40(4): 481-488.

[19] Yu, J., Liu, Z.X., Peng, D.T., Xu, D.Y. and Zhou, Y.H. (2014) Existence and Stability of Optimal Control. *Optimal Control Applications and Methods*, **35**, 721-729. https://doi.org/10.1002/oca.2096

[20] Deng, H.Y. and Wei, W. (2015) Existence and Stability for Nonlinear Optimal Control Problems with 1-Mean Equi-Continuous Controls. *Journal of Industrial and Management Optimation*, **11**, 1409-1422. https://doi.org/10.3934/jimo.2015.11.1409

[21] Deng, H.Y. and Wei, W. (2015) Stability Analysis for Optimal Control Problems Governed by Semilinear Evolution Equation. *Advances in Difference Equations*, **2015**, Article No. 103. https://doi.org/10.1186/s13662-015-0443-5

[22] Yu, J. and Peng, D.T. (2020) Generic Stability of Nash Equilibrium for Noncooperative Differential Games. *Operations Research Letters*, **48**, 157-162. https://doi.org/10.1016/j.orl.2020.02.001

[23] Ghosh, M.K. and Shaiju, A.J. (2004) Existence of Value and Saddle Point in Infinite-Dimensional Games. *Journal of Optimization Theory and Application*, **2**, 301-325. https://doi.org/10.1023/B:JOTA.0000037407.15482.72