Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2021, 10(11), 3650-3658
Published Online November 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2021.1011386

Hans汉斯

一类具P-Laplacian算子的分数阶奇异微分方程反周期边值问题解的存在性与唯一性

张婷婷，胡卫敏

伊犁师范大学数学与统计学院，新疆 伊宁

收稿日期：2021年10月5日；录用日期：2021年10月26日；发布日期：2021年11月8日

摘 要

研究一类具P-Laplacian算子的分数阶微分方程奇异反周期边值问题，运用Krasnosel'skiis不动点定理及Banach压缩映像原理，证明了解的存在性与唯一性。

关键词

反周期边值条件，不动点定理，P-Laplacian算子，奇异

Existence and Uniqueness on Solutions for Anti-Periodic Boundary Value Problems of Singular Fractional Differential Equations with P-Laplacian Operator

Tingting Zhang, Weimin Hu

School of Mathematics and Statistic, Yili Normal University, Yining Xinjiang

Received: Oct. 5th, 2021; accepted: Oct. 26th, 2021; published: Nov. 8th, 2021

Abstract

The existence and uniqueness of solutions about anti-periodic boundary value problems of singular fractional differential equations with P-Laplacian operator will be studied. I will apply Krasnosel'skiis fixed point theorem and Banach compression image principle, to carry out the existence and uniqueness upon the solution of the equation.

文章引用: 张婷婷, 胡卫敏. 一类具 P-Laplacian 算子的分数阶奇异微分方程反周期边值问题解的存在性与唯一性[J]. 应用数学进展, 2021, 10(11): 3650-3658. DOI: 10.12677/aam.2021.1011386

Keywords

Anti-Periodic Boundary Value Problems, Fixed Point Theorem, P-Laplacian Operator, Singular

1. 引言

分数阶微分方程作为一个重要的数学工具，具有良好的研究意义，其中反周期边值问题因在不少学科中起到了关键性作用，故引起了数学工作者浓厚的研究兴趣，并取得了一定的研究成果[1] [2] [3] [4]。P-Laplacian 算子在非牛顿流体力学、多孔介质湍流及非线性粘弹性力学等多领域起到重要作用。因此也引得大量学者对其进行研究[5] [6] [7] [8] [9]。但很少有文献研究具 P-Laplacian 算子的分数阶奇异微分方程反周期边值问题，故文章是对该类问题的补充与完善。

文献[8]中研究了一类具 P-Laplacian 算子的非线性分数阶微分方程反周期边值问题

$$\begin{cases} \left(\varphi_p\left({}^cD_{0+}^{\alpha}u(t)\right)\right)' = f\left(t,u(t)\right), t\in[0,T]; \\ u(0) = -u(T), {}^cD_{0+}^{\beta}u(0) = -{}^cD_{0+}^{\beta}u(T), \end{cases} \tag{1}$$

解的存在性与唯一性，其中 $1<\alpha\le 2, 0<\beta\le 1, T>0$， $\varphi_p(s)=|s|^{p-2}\cdot s, \varphi_p^{-1}=\varphi_q$， 其中 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$。 ${}^cD_{0+}^{\alpha}$ 是标准的 Caputo 导数。

文献[10]研究了分数阶微分方程奇异边值问题

$$\begin{cases} D_{0+}^{\alpha}u(t) = f\left(t,u(t)\right), 0<t<1; \\ u(0)=u'(0)=u''(0)=u''(1)=0, \end{cases} \tag{2}$$

D_{0+}^{α} 是标准的 Riemann-Liouville 型分数阶导数， $f:(0,1]\times[0,+\infty)\to[0,+\infty)$，且 f 在 $t=0$ 处有奇性。

受上述文献启发，本文将研究如下具有 P-Laplacian 算子的奇异分数阶微分方程反周期边值问题

$$\begin{cases} {}^cD_{0+}^{\beta}\left(\varphi_p\left({}^cD_{0+}^{\alpha}u(t)\right)\right) = f\left(t,u(t)\right), t\in[0,T]; \\ u(0) = -u(T), {}^cD_{0+}^{\gamma}u(0) = -{}^cD_{0+}^{\gamma}u(T), \end{cases} \tag{3}$$

解的存在性与唯一性，其中 ${}^cD_{0+}^{\alpha}, {}^cD_{0+}^{\beta}$ 和 ${}^cD_{0+}^{\gamma}$ 是 Caputo 型分数阶导数，$1<\alpha\le 2, 0<\beta\le 1, 0<\gamma\le 1, T>0$，非线性项 $f:(0,T]\times[0,+\infty)\to[0,+\infty)$， 并且 $\lim_{t\to 0+} f(t,\cdot)=+\infty$ (即 f 在 $t=0$ 时是奇异的)，并且满足存在实数 $\sigma>0$， 使得 $t^{\sigma}f:[0,1]\times[0,+\infty)\to[0,+\infty)$。 $\varphi_p(s)=|s|^{p-2}\cdot s, \varphi_p^{-1}=\varphi_q$ 且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$。

2. 预备知识

定义 1.1 [1] 函数 $f:[0,+\infty)\to R$ 的 $\alpha>0$ 阶分数阶积分是指

$$I_{0+}^{\alpha}f(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}f(s)\mathrm{d}s$$

其中右边是在$\left[0,+\infty\right)$逐点定义的。

定义 1.2 [1] 函数 $f:\left[0,+\infty\right)\to R$ 的 $\alpha>0$ 阶 Caputo 型分数阶微分是指

$$ {}^{c}D_{0+}^{\alpha}f\left(t\right)=D_{0+}^{\alpha}\left(f\left(t\right)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}\left(0\right)}{k!}t^{k}\right) $$

其中右边是在$\left[0,+\infty\right)$逐点定义的 $n=\left[\alpha\right]+1$，特别的，当 $\alpha=n$ 时，${}^{c}D_{0+}^{n}f\left(t\right)=f^{n}\left(t\right)$。

引理 1.1 [1] 设 $\alpha>0$，及 $u\in\left[0,1\right]$，则 ${}^{c}D_{0+}^{\alpha}I_{0+}^{\alpha}u\left(t\right)=u\left(t\right)$。

引理 1.2 [1] 设 $\alpha>0$，${}^{c}D_{0+}^{\alpha}u\left(t\right)\in\left[0,1\right]\cap L'\left[0,1\right]$，则 ${}^{c}D_{0+}^{\alpha}I_{0+}^{\alpha}u\left(t\right)=u\left(t\right)+C_0+C_1t+\cdots+C_{n-1}t^{n-1}$，其中 $C_i\in R,i=1,2,\cdots,n,n=\left[\alpha\right]+1$。

引理 1.3 [3] (Banach 压缩映像原理)设 E 是 Banach 空间 X 的非空闭子集，如果映射 T 是 E 到其自身内的映像，它在 E 内满足 Lipschit 条件，即对任意 $x,y\in E$

$$ \left\|Tx-Ty\right\|\le l\left\|x-y\right\|,\left(0\le l\le 1\right) $$

则必有唯一的 $x\in E$，使得 $Tx=x$，即 T 在 E 上有唯一不动点。

引理 1.4 [8] (Krasnosel’skiis 不动点定理)设 Ω 为 Banach 空间 X 上的有界闭凸非空子集，其中有算子 Φ,Ψ 满足：1) $\Phi u+\Psi v\in\Omega$，其中 $u,v\in\Omega$；2) 算子 Φ 是全连续的；3) 算子 Ψ 是压缩印象，则存在 $z\in\Omega$，使得 $z=\Phi z+\Psi z$。

引理 1.5 [6] 如果 $p>2$，并且 $|x|,|y|\le M$，则对 P-Laplacian 算子 φ_p，下列不等式成立 $\left|\varphi_p\left(x\right)-\varphi_p\left(y\right)\right|\le\left(p-1\right)M^{P-2}\left|x-y\right|$。

引理 1.6 假设 $h:\left(0,T\right]\to R^{+}$ 是连续函数，$1<\alpha\le 2,0<\beta\le 1$，则边值问题

$$ \begin{cases} {}^{c}D_{0+}^{\beta}\left(\varphi_p\left({}^{c}D_{0+}^{\alpha}u\left(t\right)\right)\right)=f\left(t,u\left(t\right)\right),t\in\left[0,T\right]; \\ u\left(0\right)=-u\left(T\right),{}^{c}D_{0+}^{\gamma}u\left(0\right)=-{}^{c}D_{0+}^{\gamma}u\left(T\right), \end{cases} \tag{4} $$

有唯一解

$$ \begin{aligned} u\left(t\right)=&\frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int_0^t\left(t-s\right)^{\alpha-1}\varphi_q\left(\frac{1}{\Gamma\left(\beta\right)}\int_0^s\left(s-\tau\right)^{\beta-1}h\left(\tau\right)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s \\ &-\frac{1}{2\Gamma\left(\alpha\right)}\int_0^T\left(T-s\right)^{\alpha-1}\varphi_q\left(\frac{1}{\Gamma\left(\beta\right)}\int_0^s\left(s-\tau\right)^{\beta-1}h\left(\tau\right)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s \\ &+\frac{\left(T-2t\right)T^{\gamma-1}\Gamma\left(2-\gamma\right)}{2\Gamma\left(\alpha-\gamma\right)}\int_0^T\left(T-s\right)^{\alpha-\gamma-1}\varphi_q\left(\frac{1}{\Gamma\left(\beta\right)}\int_0^s\left(s-\tau\right)^{\beta-1}h\left(\tau\right)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s \end{aligned} $$

证明：由引理 1.2，对方程两端进行 β 阶积分，有

$$ \varphi_p\left({}^{c}D_{0+}^{\alpha}u\left(t\right)\right)=\frac{1}{\Gamma\left(\beta\right)}\int_0^t\left(t-s\right)^{\beta-1}h\left(s\right)\mathrm{d}s-a_0 $$

由 Caputo 分数阶微分性质可知：${}^{c}D_{0+}^{\beta}u\left(0\right)=0$，所以 $a_0=0$。

对上式两边作用 φ_p 的逆算子 φ_q，由 P-Laplacian 算子的性质，有

$$ {}^{c}D_{0+}^{\alpha}u(t)=\varphi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^t(t-s)^{\beta-1}h(s)\mathrm{d}s\right)。 $$

由引理 1.1 及引理 1.2，对上式两边进行 α 阶积分，有

$$ u(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}\varphi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^s(s-\tau)^{\beta-1}h(\tau)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s-C_0-C_1t $$

再由 Caputo 导数的性质，即 ${}^{c}D_{0+}^{\gamma}t^{r}=\frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(r+1-\gamma)}t^{r-\gamma}$，有 ${}^{c}D_{0+}^{\gamma}C=0$

$$ {}^{c}D_{0+}^{\gamma}u(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha-\gamma)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-\gamma-1}\varphi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^s(s-\tau)^{\beta-1}h(\tau)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s-C_1\frac{1}{\Gamma(2-\gamma)}t^{1-r} $$

最后由边值条件 $u(0)=-u(T),{}^{c}D_{0+}^{\gamma}u(0)=-{}^{c}D_{0+}^{\gamma}u(T)$，有

$$ \begin{aligned} C_0=&\frac{1}{2\Gamma(\alpha)}\int_0^T(T-s)^{\alpha-1}\varphi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^s(s-\tau)^{\beta-1}h(\tau)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s\\ &-\frac{T^{\gamma}\Gamma(2-\gamma)}{2\Gamma(\alpha-\gamma)}\int_0^T(T-s)^{\alpha-\gamma-1}\varphi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^s(s-\tau)^{\beta-1}h(\tau)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s \end{aligned} $$

$$ C_1=\frac{T^{\gamma}\Gamma(2-\gamma)}{\Gamma(\alpha-\gamma)}\int_0^T(T-s)^{\alpha-\gamma-1}\varphi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^s(s-\tau)^{\beta-1}h(\tau)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s $$

故有

$$ \begin{aligned} u(t)=&\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}\varphi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^s(s-\tau)^{\beta-1}h(\tau)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s\\ &-\frac{1}{2\Gamma(\alpha)}\int_0^T(T-s)^{\alpha-1}\varphi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^s(s-\tau)^{\beta-1}h(\tau)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s\\ &+\frac{T^{\gamma}\Gamma(2-\gamma)}{2\Gamma(\alpha-\gamma)}\int_0^T(T-s)^{\alpha-\gamma-1}\varphi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^s(s-\tau)^{\beta-1}h(\tau)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s\\ &-\frac{tT^{\gamma-1}\Gamma(2-\gamma)}{\Gamma(\alpha-\gamma)}\int_0^T(T-s)^{\alpha-\gamma-1}\varphi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^s(s-\tau)^{\beta-1}h(\tau)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s\\ =&\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}\varphi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^s(s-\tau)^{\beta-1}h(\tau)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s\\ &-\frac{1}{2\Gamma(\alpha)}\int_0^T(T-s)^{\alpha-1}\varphi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^s(s-\tau)^{\beta-1}h(\tau)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s\\ &+\frac{(T-2t)T^{\gamma-1}\Gamma(2-\gamma)}{2\Gamma(\alpha-\gamma)}\int_0^T(T-s)^{\alpha-\gamma-1}\varphi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^s(s-\tau)^{\beta-1}h(\tau)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s \end{aligned} $$

3. 主要结果

定义 $E=C\left(\left(0,T\right],R^{+}\right)$，则 E 是以 $\|u\|=\sup\limits_{t\in J}|u(t)|$ 为范数的 Banach 空间。

定义算子 $F:E\to E$ 为：

$$Fu(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\varphi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^s (s-\tau)^{\beta-1} f(\tau,u(\tau))\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s$$
$$-\frac{1}{2\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}\varphi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^s (s-\tau)^{\beta-1} f(\tau,u(\tau))\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s$$
$$+\frac{(T-2t)T^{\gamma-1}\Gamma(2-\gamma)}{2\Gamma(\alpha-\gamma)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-\gamma-1}\varphi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^s (s-\tau)^{\beta-1} f(\tau,u(\tau))\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s$$

在本节中，需附加以下条件来确保解的存在性与唯一性。

(H$_1$) 对于实数 $\sigma>0$，使得 $t^\sigma f(t,u(t))$ 在 $[0,T]\times[0,+\infty)$ 上连续，并且存在常数 $M_1>0$，有 $\left|t^\sigma f(t,u(t))\right|<M_1$；

(H$_2$) 对任意 $u(t),v(t)\in E$，存在实数 $M_2>0$，有 $\left|t^\sigma f(t,u(t))-t^\sigma f(t,v(t))\right|\le M_2\sup_{t\in J}|u-v|$；

(H$_3$) 记 $\eta=\frac{M_2\Gamma(1-\sigma)(q-1)\xi^{q-2}T^{\alpha+\beta-\sigma}}{2\Gamma(\beta-\sigma+1)}\left[\frac{3}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{\Gamma(2-\gamma)T^{-\gamma}}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)}\right]\le 1$；

(H$_4$) 记 $N=\frac{M_2\Gamma(2-\gamma)\Gamma(1-\sigma)(q-1)\xi^{q-2}T^{\alpha+\beta-\sigma}}{2\Gamma(\alpha-\gamma+1)\Gamma(\beta-\sigma+1)}\le 1$。

为方便下文计算，我们 $H(t)=\varphi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^t (t-s)^{\beta-1} f(s,u(s))\mathrm{d}s\right)$。

定理 2.1 假如 $1<p<2$，若条件(H$_1$)成立，则 $H(t)=\varphi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^t (t-s)^{\beta-1} s^{-\sigma}s^{\sigma} f(s,u(s))\mathrm{d}s\right)$ 在 $[0,T]$ 上连续，且存在实数 $L>0$，对任意 $t\in[0,T]$，有 $|H(t)|\le L$。

证明： 由于 $1<p<2$ 时，根据 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，可得 $q>2$，并且有

$$\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^t (t-s)^{\beta-1} s^{-\sigma}s^{\sigma} f(s,u(s))\mathrm{d}s\le\frac{W\Gamma(1-\sigma)}{\Gamma(\beta-\sigma+1)}:=\xi1.$$

则对 $\forall t,t_0\in[0,T]$，$\exists|t-t_0|<\delta$，有

$$\begin{aligned}|H(t)-H(t_0)|&\le\left|\varphi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^t (t-s)^{\beta-1} s^{-\sigma}s^{\sigma} f(s,u(s))\mathrm{d}s\right)\right.\\&\quad\left.-\varphi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^{t_0} (t_0-s)^{\beta-1} s^{-\sigma}s^{\sigma} f(s,u(s))\mathrm{d}s\right)\right|\\&\le\frac{M_1}{\Gamma(\beta)}(q-1)\xi^{q-2}\left|\int_0^{t_0}(t_0-s)^{\beta-1}s^{-\sigma}\mathrm{d}s-\int_0^{t_0}(t_0-s)^{\beta-1}s^{-\sigma}\mathrm{d}s\right|\\&\le\frac{M_1}{\Gamma(\beta)}(q-1)\xi^{q-2}B(1-\sigma,\beta)\left|t^{\beta-\sigma}-t_0^{\beta-\sigma}\right|\to 0,t\to t_0\end{aligned}$$

即 $|H(t)|$ 在 $[0,1]$ 上连续，故 $|H(t)|\le L$。

定理 2.2 若条件(H$_1$)成立，根据定理 2.1 及引理 1.3，可知边值问题(4)有唯一解。

证明： 定义集合 $\Omega=\{u\in E\,|\,\|u\|<r\}$，这里 $r=\frac{LT^\alpha}{2}\left(\frac{3\Gamma(\alpha-\gamma+1+\Gamma(2-\gamma)\Gamma(\alpha+1))}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha-\gamma+1)}\right)$。

首先 $F:\Omega\to\Omega$ 证明，对任意 $u\in\Omega$，有

$$
\begin{aligned}
Fu(t)\le&\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}\left|H(S)\right|\mathrm{d}s+\frac{1}{2\Gamma(\alpha)}\int_0^T(T-s)^{\alpha-1}\left|H(S)\right|\mathrm{d}s\\
&+\frac{(T-2t)T^{\gamma-1}\Gamma(2-\gamma)}{2\Gamma(\alpha-\gamma)}\int_0^T(T-s)^{\alpha-\gamma-1}\left|H(s)\right|\mathrm{d}s\\
&\le\frac{L}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}ds+\frac{L}{2\Gamma(\alpha)}\int_0^T(T-s)^{\alpha-1}\mathrm{d}s+\frac{T^{\gamma}\Gamma(2-\gamma)L}{2\Gamma(\alpha-\gamma)}\int_0^T(T-s)^{\alpha-\gamma-1}\mathrm{d}s\\
&\le\frac{L}{2}T^{\alpha}\left[\frac{3\Gamma(\alpha-\gamma+1)+\Gamma(2-\gamma)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha-\gamma+1)}\right]\le r
\end{aligned}
$$

即 $F:\Omega\to\Omega$，故 $F:\Omega\to\Omega$ 成立。

其次，对 $\forall u(t),v(t)\in\Omega$，当 $t\in[0,T]$ 时，

$$
\begin{aligned}
&\left|Fu(t)-Fv(t)\right|\\
&\le\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}\left|\varphi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^s(s-\tau)^{\beta-1}f(\tau,u(\tau))\mathrm{d}\tau\right)\right.\\
&\left.-\varphi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^s(s-\tau)^{\beta-1}f(\tau,v(\tau))\mathrm{d}\tau\right)\right|\mathrm{d}s\\
&+\frac{1}{2\Gamma(\alpha)}\int_0^T(T-s)^{\alpha-1}\left|\varphi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^s(s-\tau)^{\beta-1}f(\tau,u(\tau))\mathrm{d}\tau\right)\right.\\
&\left.-\varphi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^s(s-\tau)^{\beta-1}f(\tau,v(\tau))\mathrm{d}\tau\right)\right|\mathrm{d}s\\
&+\frac{T^{\gamma}\Gamma(2-\gamma)}{2\Gamma(\alpha-\gamma)}\int_0^T(T-s)^{\alpha-\gamma-1}\left|\varphi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^s(s-\tau)^{\beta-1}f(\tau,u(\tau))\mathrm{d}\tau\right)\right.\\
&\left.-\varphi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^s(s-\tau)^{\beta-1}f(\tau,v(\tau))\mathrm{d}\tau\right)\right|\mathrm{d}s\\
&\le\frac{(q-1)\xi^{q-2}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}\left|\left(\int_0^s(s-\tau)^{\beta-1}\tau^{-\sigma}\tau^{\sigma}f(\tau,u(\tau))\mathrm{d}\tau\right)\right.\\
&\left.-\left(\int_0^s(s-\tau)^{\beta-1}\tau^{-\sigma}\tau^{\sigma}f(\tau,v(\tau))\mathrm{d}\tau\right)\right|\mathrm{d}s\\
&+\frac{(q-1)\xi^{q-2}}{2\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^T(T-s)^{\alpha-1}\left|\left(\int_0^s(s-\tau)^{\beta-1}\tau^{-\sigma}\tau^{\sigma}f(\tau,u(\tau))\mathrm{d}\tau\right)\right.\\
&\left.-\left(\int_0^s(s-\tau)^{\beta-1}\tau^{-\sigma}\tau^{\sigma}f(\tau,v(\tau))\mathrm{d}\tau\right)\right|\mathrm{d}s\\
&+\frac{(q-1)\xi^{q-2}T^{\gamma}\Gamma(2-\gamma)}{2\Gamma(\alpha-\gamma)\Gamma(\beta)}\int_0^T(T-s)^{\alpha-\gamma-1}\left|\left(\int_0^s(s-\tau)^{\beta-1}\tau^{-\sigma}\tau^{\sigma}f(\tau,u(\tau))\mathrm{d}\tau\right)\right.\\
&\left.-\left(\int_0^s(s-\tau)^{\beta-1}\tau^{-\sigma}\tau^{\sigma}f(\tau,v(\tau))\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s\right.\\
&\le\frac{M_2\Gamma(1-\sigma)(q-1)\xi^{q-2}T^{\alpha+\beta-\sigma}}{2\Gamma(\beta-\sigma+1)}\left[\frac{3}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{\Gamma(2-\gamma)T^{-\gamma}}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)}\right]\sup_{t\in J}\left|u-v\right|\\
&\le\eta\left|u-v\right|
\end{aligned}
$$

由假设条件(H$_3$)可知$\eta \le 1$故有$\|Fu-Fv\| \le \eta\|u-v\|$，因此由引理 1.3 可知算子有唯一不动点。

定理 2.3 若条件(H$_1$)~(H$_4$)满足，则根据定理 2.1、2.2 及引理 1.4 可知边值问题(4)至少有一个不动点。

证明：定义集合$\Omega_R=\{u\in E \,\|\, \|u\|<R\}$，这里$R \ge \dfrac{LT^{\alpha}\left[\Gamma(\alpha-\gamma+1)+\Gamma(\alpha+1)\Gamma(2-\gamma)\right]}{2\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha-\gamma+1)}$，则$\Omega_R$为$E$的有界闭子集。定义$\Omega_R$上的算子$P,Q$，其中

$$Pu(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\varphi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^s (s-\tau)^{\beta-1} f(\tau,u(\tau))\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{ds}$$
$$-\frac{1}{2\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}\varphi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^s (s-\tau)^{\beta-1} f(\tau,u(\tau))\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{ds}$$

$$Qu(t)=\frac{(T-2t)T^{\gamma-1}\Gamma(2-\gamma)}{2\Gamma(\alpha-\gamma)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-\gamma-1}\varphi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^s (s-\tau)^{\beta-1} f(\tau,u(\tau))\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{ds}$$

对$\forall u,v\in\Omega_R, t\in[0,T]$时，有

$$\begin{aligned}
&\left|Pu(t)+Qv(t)\right| \\
&\le \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\left|\varphi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^s (s-\tau)^{\beta-1}\tau^{-\sigma}\tau^{\sigma} f(\tau,u(\tau))\mathrm{d}\tau\right)\right|\mathrm{ds} \\
&+\frac{1}{2\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}\left|\varphi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^s (s-\tau)^{\beta-1}\tau^{-\sigma}\tau^{\sigma} f(\tau,u(\tau))\mathrm{d}\tau\right)\right|\mathrm{ds} \\
&+\frac{(T-2t)T^{\gamma-1}\Gamma(2-\gamma)}{2\Gamma(\alpha-\gamma)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-\gamma-1}\left|\varphi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^s (s-\tau)^{\beta-1}\tau^{-\sigma}\tau^{\sigma} f(\tau,u(\tau))\mathrm{d}\tau\right)\right|\mathrm{ds} \\
&\le \frac{T^{\alpha}L}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{T^{\alpha}L}{2\Gamma(\alpha+1)}+\frac{T^{\alpha}L\Gamma(2-\gamma)}{2\Gamma(\alpha-\gamma+1)} \\
&\le \frac{LT^{\alpha}\left[3\Gamma(\alpha-\gamma+1)+\Gamma(\alpha+1)\Gamma(2-\gamma)\right]}{2\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha-\gamma+1)} \le R
\end{aligned}$$

因此$\|Pu(t)+Qv(t)\| \le R$，即$Pu(t)+Qv(t)\in\Omega_R$。

其次当$t\in[0,T]$时，有

$$\begin{aligned}
&\left|Qu(t)-Qv(t)\right| \\
&\le \frac{(T-2t)T^{\gamma-1}\Gamma(2-\gamma)}{2\Gamma(\alpha-\gamma)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-\gamma-1}\left|\varphi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^s (s-\tau)^{\beta-1}\tau^{-\sigma}\tau^{\sigma} f(\tau,u(\tau))\mathrm{d}\tau\right)\right|\mathrm{ds} \\
&-\frac{(T-2t)T^{\gamma-1}\Gamma(2-\gamma)}{2\Gamma(\alpha-\gamma)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-\gamma-1}\left|\varphi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^s (s-\tau)^{\beta-1}\tau^{-\sigma}\tau^{\sigma} f(\tau,v(\tau))\mathrm{d}\tau\right)\right|\mathrm{ds} \\
&\le \frac{T^{\gamma}(q-1)\xi^{q-2}\Gamma(2-\gamma)}{2\Gamma(\alpha-\gamma)\Gamma(\beta)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-\gamma-1}\left(\int_0^s (s-\tau)^{\beta-1}\tau^{-\sigma}\left|\tau^{\sigma} f(\tau,u(\tau))-\tau^{\sigma} f(\tau,v(\tau))\right|\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{ds} \\
&\le \frac{M_2(q-1)\xi^{q-2}\Gamma(2-\gamma)\Gamma(1-\sigma)T^{\alpha+\beta-\sigma}}{2\Gamma(\alpha-\gamma+1)\Gamma(\beta-\sigma+1)}\sup_{t\in J}|u-v| = N|u-v|
\end{aligned}$$

由条件(H$_4$)及引理 1.4 可知算子Q在Ω_R中为压缩映射。

最后证明算子 P 在 Ω_R 上是全连续的，对任意 $u\in\Omega_R$，有

$$\begin{aligned}\left|Pu(t)\right|&=\left|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}\varphi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^s(s-\tau)^{\beta-1}\tau^{-\sigma}\tau^{\sigma}f\left(\tau,u(\tau)\right)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s\right.\\&\quad\left.-\frac{1}{2\Gamma(\alpha)}\int_0^T(T-s)^{\alpha-1}\varphi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^s(s-\tau)^{\beta-1}\tau^{-\sigma}\tau^{\sigma}f\left(\tau,u(\tau)\right)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s\right|\\&\le\frac{3LT^{\alpha}}{2\Gamma(\alpha+1)}\end{aligned}$$

可知算子 P 在 Ω_R 上一致有界。

其次对 $\forall t_1,t_2\in[0,T]$ 当 $t_1<t_2$ 时，有

$$\begin{aligned}&\left|Pu(t_2)-Pu(t_1)\right|\\&\le\left|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_2}(t_2-s)^{\alpha-1}\varphi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^s(s-\tau)^{\beta-1}\tau^{-\sigma}\tau^{\sigma}f\left(\tau,u(\tau)\right)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s\right.\\&\quad\left.-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_1}(t_1-s)^{\alpha-1}\varphi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^s(s-\tau)^{\beta-1}\tau^{-\sigma}\tau^{\sigma}f\left(\tau,u(\tau)\right)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s\right|\\&\le\frac{L}{\Gamma(\alpha+1)}\left(t_2^{\alpha}-t_1^{\alpha}\right)\to0,t_2\to t_1\end{aligned}$$

即算子 P 在 Ω_R 上等度连续，由 Arzela-Ascoli 定理可知算子 P 为全连续算子，故由引理 1.4 可知边值问题(4)至少有一个解。

致　谢

谨向审稿人提出的宝贵意见和建议表示诚挚的感谢！同时也要向我的指导老师胡卫敏教授表示我诚挚的谢意！

基金项目

新疆维吾尔自治区自然科学基金资助项目(2019D01C331)。

参考文献

[1] Fazli, H. and Nieto, J.J. (2018) Fractional Langevin Equation with Anti-Periodic Boundary Conditions. *Chaos*, *Solitons & Fractals*, **114**, 332-337. https://doi.org/10.1016/j.chaos.2018.07.009

[2] 王奇，魏天佑．一类脉冲分数阶微分方程广义反周期边值问题解的存在性[J]．应用数学, 2017, 30(1): 78-89.

[3] 左佳斌，贠永震．一类分数阶微分方程的反周期边值问题[J]．广西师范大学学报(自然科学版)，2020，38(6): 56-64.

[4] Lu, H.L., Hanz, L., Sun, S.R. and Liu, J. (2013) Existence on Positive Solutions for Boundary Value Problems of Nonlinear Fractional Differential Equations with p-Laplacian. *Advances in Difference Equations*, **10**, 30-46. https://doi.org/10.1186/1687-1847-2013-30

[5] 贠永震，苏有慧，胡卫敏．一类具有 p-Laplacian 算子的分数阶微分方程反周期边值问题解的存在唯一性[J]．数学物理学报, 2018, 38(6): 1162-1172.

[6] Li, R.G. (2014) Existence of Solutions for Nonlinear Singular Fractional Differential Equations with Fractional Derivative Condition. *Advances in Difference Equations*, **11**, 292-304. https://doi.org/10.1186/1687-1847-2014-292

[7] Zhou, W.X., Chu, Y.D. and Baleanu, D. (2013) Uniqueness and Existence of Positive Solutions for a Multi-Point Boundary Value Problem of Singular Fractional Differential Equations. *Advances in Difference Equations*, **10**, 114-125. https://doi.org/10.1186/1687-1847-2013-114

[8] Zhou, W.X. and Liu, X. (2014) Uniqueness on Positive Solutions for Boundary Value Problem of Singular Fractional Differential Equations. *Chinese Journal of Engineering Mathematics*, **31**, 300-309.

[9] 孙倩，刘文斌. 一类奇异分数阶微分方程积分边值问题正解的存在性[J]. 数学的实践与认识，2017，47(17): 295-306.

[10] Sun, S.R., Zhao, Y.G., Han, Z.L. and Xu, M.R. (2012) Uniqueness of Positive Solutions for Boundary Value Problems of Singular Fractional Differential Equations. *Inverse Problems in Science and Engineering*, **20**, 299-309. https://doi.org/10.1080/17415977.2011.603726