

毒素环境中具有Allee效应的双状态反馈脉冲控制捕食系统的定性分析

史明静, 赵 艺, 张 蒙

北京建筑大学, 理学院, 北京

收稿日期: 2021年10月9日; 录用日期: 2021年10月30日; 发布日期: 2021年11月11日

摘 要

本文考虑了一类环境中带有毒素且具有Allee效应的捕食-被捕食模型, 分析了平衡点及其局部稳定性, 还利用后继函数的方法证明了双边控制周期解的存在性, 最后的数值模拟结果验证了结论的正确性。

关键词

Allee效应, 毒素, 状态反馈, 双边控制周期解

Qualitative Analysis of a Prey-Predator System with State Feedback Bilateral Impulsive Control and Allee Effect in Toxic Environment

Mingjing Shi, Yi Zhao, Meng Zhang

School of Science, Beijing University of Civil Engineering and Architecture, Beijing

Received: Oct. 9th, 2021; accepted: Oct. 30th, 2021; published: Nov. 11th, 2021

Abstract

In this paper, we consider a predator-prey model with toxin and Allee effect, analyze the equilibrium point and its local stability, and prove the existence of periodic solution of bilateral control by using the method of successive function. The results of numerical simulation verify the correctness of the conclusion.

Keywords

Allee Effect, Toxin, State Feedback, Periodic Solution of Bilateral Control

Copyright © 2021 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

近年来,随着环境污染的加剧人们越来越重视生态系统的保护,其中捕食者-食饵系统尤为受到广大学者的关注。文献[1] [2] [3]分别建模研究了环境中毒素对不同生态系统的影响,并且分析了模型解的正性与有界性。另外,很多学者开始应用半连续动力系统研究生物问题并取得了较好的成果。在文献[4] [5]中分别建立了带有脉冲收获和食饵受到 Allee 效应影响的状态反馈控制模型,证明了阶 1 周期解的存在、唯一和稳定性,还分别分析了模型中同宿分支与异宿分支的情况。文献[6] [7]中分别建立了双边控制状态反馈模型描述害虫治理问题,依据害虫密度通过引进天敌和喷洒农药等方式来进行害虫防治,证明了周期解的存在性和稳定性。文献[8]中研究了两物种竞争模型,通过捕获密度过大物种达到竞争平衡状态。文献[9]研究了一类关于鱼塘内浮游生物与鱼类的捕食系统,且分析了周期解的性质。

本文考虑鱼塘内浮游生物与养殖鱼类间的捕食关系,我们将鱼类 y 和浮游动植物 x 分别看作捕食者和食饵,其中浮游植物进行光合作用可增加水中的含氧量,一般杂食性鱼类会以鱼虫、水蚯蚓、蜗牛等活虫为食。假设食饵的增长受到环境制约,其增长模式为 $\frac{dx}{dt} = b_1x\left(1 - \frac{x}{k}\right)$ 。另外,每种生物都有自己的最适密度,过分稀疏和过分聚集都不利于其增长,因此在浮游植物的增长中考虑 Allee 效应,该种群的增长模型表示为 $\frac{dx}{dt} = b_1x\left(1 - \frac{x}{k}\right)\left(\frac{x}{k} - \frac{\theta}{k}\right)$,除此之外,污染物的排放以及部分生活垃圾的不当丢弃等,会形成有毒物质而影响生态系统的平衡,假设有毒物质对浮游动植物的影响较大,对鱼类的影响较小,则建立模型如下

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = b_1x_1\left(1 - \frac{x_1}{k}\right)\left(\frac{x_1}{k} - \frac{\theta}{k}\right) - a_{12}x_1y_1 - \alpha x_1^3 \\ \frac{dy_1}{dt} = b_2y_1 + a_{21}x_1y_1 - a_{22}y_1^2 - \beta y_1^2 \end{cases} \quad (1)$$

其中 b_1 、 b_2 分别为食饵种群和捕食者种群的内禀增长率, θ 为食饵种群密度的 Allee 阈值, a_{12} 为捕食者的功能反应系数, a_{21} 为捕食者的营养转化系数, a_{22} 为捕食者的种内竞争系数, α 、 β 分别为环境中的有毒物质对食饵与捕食者的影响系数,且所有常数均为正。令 $x_1 = kx$, $y_1 = y$, $A = \frac{\theta}{k}$, $B = \alpha k^2$, $m = ka_{21}$,

模型(1)可以简写为

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = b_1x(1-x)(x-A) - a_{12}xy - Bx^3 \\ \frac{dy}{dt} = b_2y + mxy - a_{22}y^2 - \beta y^2 \end{cases} \quad (2)$$

我们考虑在模型(2)上施加脉冲状态反馈控制,当浮游生物的密度减少到 h_1 时,水中浮游植物减少,

影响鱼类捕食，这时我们向鱼塘投喂鱼食，同时捕捞一些成鱼。当浮游植物的密度增加到 h_2 时，浮游植物过多会封锁水面，使得水中氧气含量降低，光线较弱，导致鱼类的死亡率增加，这时我们从鱼塘里打捞一部分浮游植物，同时在投放鱼苗。通过上述养殖手段，维持鱼塘生态系统的稳定，并获得经济收益。综上所述，建立双边控制脉冲模型如下

$$\left. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = b_1x(1-x)(x-A) - a_{12}xy - Bx^3 \\ \frac{dy}{dt} = b_2y + mxy - a_{22}y^2 - \beta y^2 \end{cases} \right\} h_1 < x < h_2, y > 0$$

$$\left. \begin{cases} \Delta x = \tau_1 \\ \Delta y = -py \end{cases} \right\} x = h_1, y > y_{G_1}$$

$$\left. \begin{cases} \Delta x = -\tau_2 \\ \Delta y = ry + \tau_3 \end{cases} \right\} x = h_2, 0 < y < y_{G_4}$$
(3)

2. 无脉冲分模型分析

2.1. 平衡点分析

经过计算得到，模型(2)的垂直等倾线与水平等倾线分别为

$$y = -\frac{b_1+B}{a_{12}}x^2 + \frac{b_1+b_1A}{a_{12}}x - \frac{b_1A}{a_{12}}, \quad y = \frac{b_2+mx}{a_{22}+\beta}.$$
(4)

系统有两个边界平衡点 $O(0,0)$ 和 $H\left(0, \frac{b_2}{a_{22}+\beta}\right)$ 。当 $H_1: \Delta_1 = (b_1+b_1A)^2 - 4(b_1+B)b_1A > 0$ 成立时，垂直等倾线与 x 轴有两个交点 $O_1(x_{O_1}, 0)$ ， $O_2(x_{O_2}, 0)$ ，其中

$$x_{O_1} = \frac{-(b_1+b_1A) + \sqrt{\Delta_1}}{-2(b_1+B)}, \quad x_{O_2} = \frac{-(b_1+b_1A) - \sqrt{\Delta_1}}{-2(b_1+B)}.$$
(5)

当 $\frac{b_1+b_1A}{a_{12}} - \frac{m}{a_{22}+\beta} > 0$ 时，模型(2)存在正平衡点，且

$$\Delta_2 = \left(\frac{b_1+b_1A}{a_{12}} - \frac{m}{a_{22}+\beta} \right)^2 - 4 \frac{b_1+B}{a_{12}} \left(\frac{b_1A}{a_{12}} + \frac{b_2}{a_{22}+\beta} \right).$$
(6)

当 $H_2: \frac{b_1+b_1A}{a_{12}} - \frac{m}{a_{22}+\beta} > 0$ ，且 $H_3: \Delta_2 = 0$ 时，系统有一个正平衡点 $E_0(x_0, y_0)$ ，其中

$$x_0 = \frac{1}{2} \frac{a_{12}}{b_1+B} \left(\frac{b_1+b_1A}{a_{12}} - \frac{m}{a_{22}+\beta} \right), \quad y_0 = \frac{b_2+mx_0}{a_{22}+\beta}.$$
(7)

当 $H_2: \frac{b_1+b_1A}{a_{12}} - \frac{m}{a_{22}+\beta} > 0$ ，且 $H_4: \Delta_2 > 0$ 时，系统有两个正平衡点 $E_1(x_1, y_1)$ ， $E_2(x_2, y_2)$ ，其中

$$x_{1,2} = \frac{\left(\frac{b_1+b_1A}{a_{12}} - \frac{m}{a_{22}+\beta} \right) \mp \sqrt{\Delta_2}}{2 \frac{b_1+B}{a_{12}}}, \quad y_i = \frac{b_2+a_{21}x_i}{a_{22}+\beta}, \quad i=1,2.$$
(8)

2.2. 条件 H_1, H_2, H_4 都成立时, 无脉冲系统的稳定性分析

在这里, 我们仅考虑模型(2)有两个平衡点存在的情况。其雅可比矩阵为

$$J = \begin{bmatrix} -(3b_1 + 3B)x^2 + (2b_1 + 2b_1A)x - a_{12}y - b_1A & -a_{12}x \\ my & b_2 + mx - 2(a_{22} + \beta)y \end{bmatrix}. \quad (9)$$

经计算得到 $O(0,0)$ 是一个鞍点, $H\left(0, \frac{b_2}{a_{22} + \beta}\right)$ 是一个稳定的结点, $O_1(x_{O_1}, 0)$ 为不稳定结点, $O_2(x_{O_2}, 0)$ 为一个鞍点。在正平衡点处, 其雅可比矩阵为

$$J_{E_i} = \begin{bmatrix} -2(b_1 + B)x_i^2 + (b_1 + b_1A)x_i & -a_{12}x_i \\ my_i & -(b_2 + mx_i) \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \quad (10)$$

$$\text{Det}(J_{E_i}) = (b_2 + x_i)(2(b_1 + B)x_i^2 - (b_1 + b_1A)x_i) + a_{12}mx_iy_i, \quad (11)$$

$$\text{tr}(J_{E_i}) = -2(b_1 + B)x_i^2 + (b_1 + b_1A)x_i - (b_2 + mx_i), \quad i = 1, 2. \quad (12)$$

分别将 $E_1(x_1, y_1)$, $E_2(x_2, y_2)$ 带入上式, 得到 $\text{Det}(J_{E_2}) < 0$ 且 $\text{tr}(J_{E_2}) < 0$, 即 $E_2(x_2, y_2)$ 是一个稳定奇点。因为

$$\text{Det}(J_{E_1}) = -(b_2 + mx_1)[(b_1 + b_1A)x_1 - 2(b_1 + B)x_1^2] + a_{12}mx_1y_1, \quad (13)$$

则若 $\text{Det}(J_{E_1}) < 0$, 即 $E_1(x_1, y_1)$ 是一个鞍点, 若 $\text{Det}(J_{E_1}) > 0$ 且 $\text{tr}(J_{E_1}) < 0$, 即 $E_1(x_1, y_1)$ 是一个稳定的奇点, 若 $\text{Det}(J_{E_1}) > 0$ 且 $\text{tr}(J_{E_1}) > 0$, 则 $E_1(x_1, y_1)$ 是一个不稳定的奇点。当 $E_1(x_1, y_1)$ 为鞍点时, 该动力系统的轨线走势图如图 1 所示。

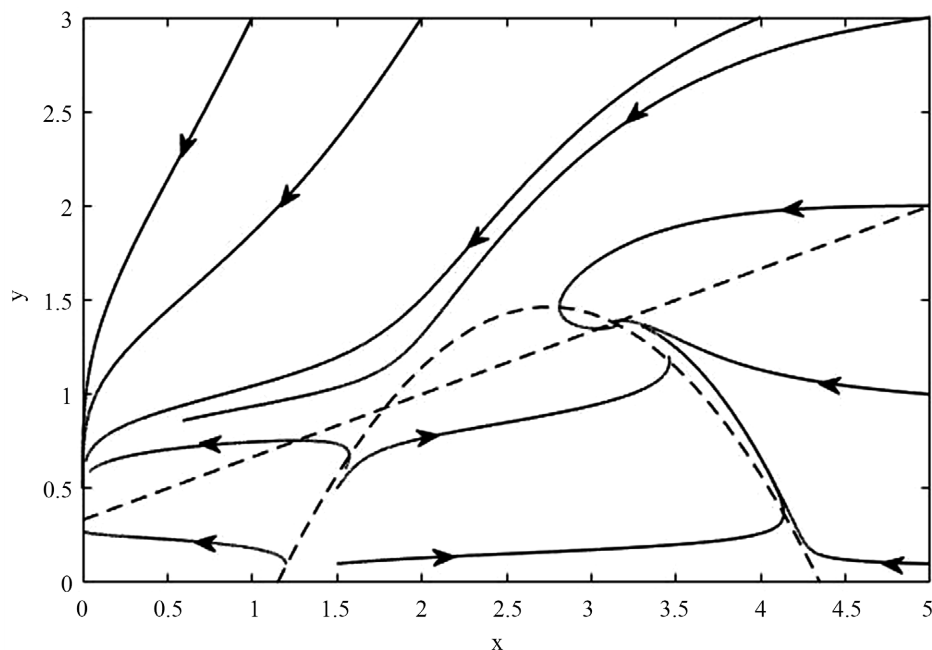


Figure 1. The trajectory diagram

图 1. 轨线图

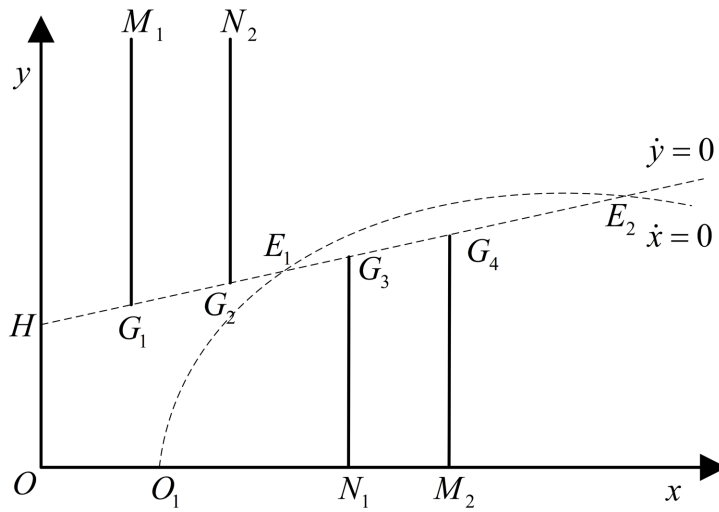


Figure 2. The impulses set and phases set
图 2. 脉冲集与相集

3. 双边控制周期解的存在

令 M_1, M_2, N_1, N_2 分别为该系统的两个脉冲集与两个相集，且为平面上的直线或曲线，根据实际的生物意义有

$$M_1 = \{(x, y) | x = h_1, y > y_{G_1}\}, \quad M_2 = \{(x, y) | x = h_2, 0 < y < y_{G_4}\}, \quad (14)$$

$$N_2 = \{(x, y) | x = h_2 - \tau_2, y < y_{G_3}\}, \quad N_1 = \{(x, y) | x = h_1 + \tau_1, y > y_{G_2}\}. \quad (15)$$

其中 G_1, G_4 分别为脉冲集 M_1, M_2 与水平等倾线的交点， G_3, G_2 分别为相集 N_1, N_2 与水平等倾线的交点，如图 2 所示，且

$$y_{G_1} = \frac{b_2 + mh_1}{a_{22} + \beta}, \quad y_{G_2} = \frac{b_2 + m(h_1 + \tau_1)}{a_{22} + \beta}, \quad y_{G_3} = \frac{b_2 + m(h_2 - \tau_2)}{a_{22} + \beta}, \quad y_{G_4} = \frac{b_2 + mh_2}{a_{22} + \beta}. \quad (16)$$

定理 1: 当 $0 < h_1 < x_1 < h_2 < x_2$ 时，模型(3)有一个周期解。

证：假设在相集 N_2 上存在一点 A_0 ，且靠近于 G_2 ，使得经过 A_0 点的轨线到达 A_1 点，由脉冲函数 $\varphi_1(x, y)$ 映射到 A_1^+ ， A_1^+ 沿轨线到达 A_2 ，再由脉冲函数 $\varphi_2(x, y)$ 映射到 A_2^+ ，此时， A_2^+ 为 A_0 的阶 2 后继点，且 A_0 点的后继函数为 $F(A_0) = y_{A_2^+} - y_{A_0} > 0$ ，如图 3(a) 所示。类似地，在相集 N_2 上取一点 B_0 ，使得 $y_{B_0} \gg y_{G_2}$ ，使得经过 B_0 点的轨线在经过两次脉冲映射之后有 $F(B_0) = y_{B_2^+} - y_{B_0} < 0$ 。因此，在 A_0 与 B_0 之间必存在一点 C_0 ，使得 $F(C_0) = 0$ ，经过 C_0 点的轨线在经历两次脉冲映射之后，形成的周期环见图 3(b) 所示。因此，当 $0 < h_1 < x_1 < h_2 < x_2$ 时，模型(3)一定存在一个周期解。

4. 数值模拟

选取参数 $B = 0.02, r_2 = 0.02, b_1 = 0.02, b_2 = 0.02, a_{12} = 0.07, m = 0.02, a_{22} = 0.04, A = 10$ ，得到平衡点 $H(0, 0.35), O_1(1.15, 0), O_2(4.35, 0), E_1(1.8, 0.93), E_2(3.15, 1.367)$ ，当 $h_1 < h_2 - \tau_2 < h_1 + \tau_1 < h_2$ 时，系统存在周期解如图 4(a) 所示，当 $h_1 < h_2 - \tau_2 = h_1 + \tau_1 < h_2$ ，如图 4(b) 所示的周期解，即验证了定理 1。通过改变 p, r, τ_3 的数值，亦可得到系统的周期解，从图 4(c)、图 4(d) 中可见。

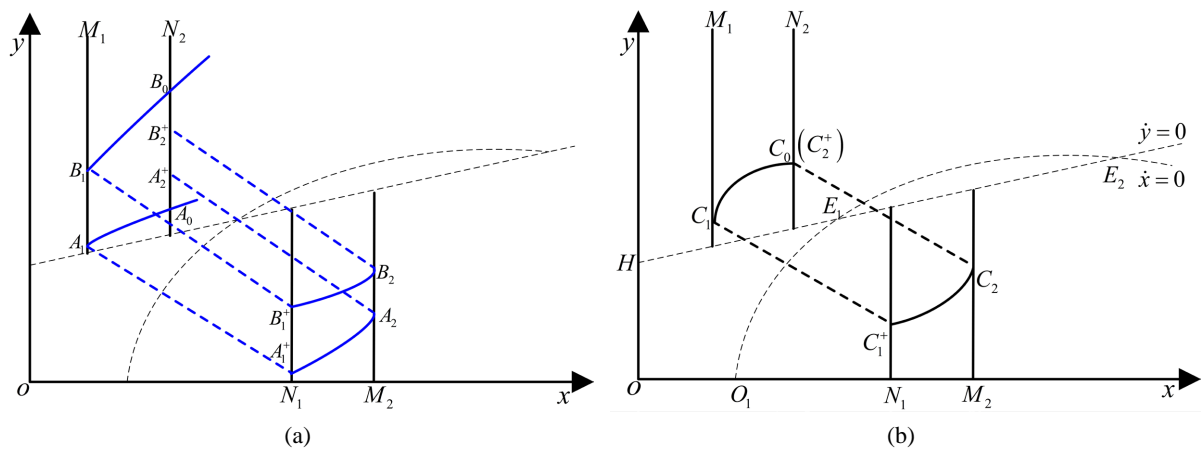


Figure 3. Schematic diagram of periodic solution
图 3. 周期解示意图

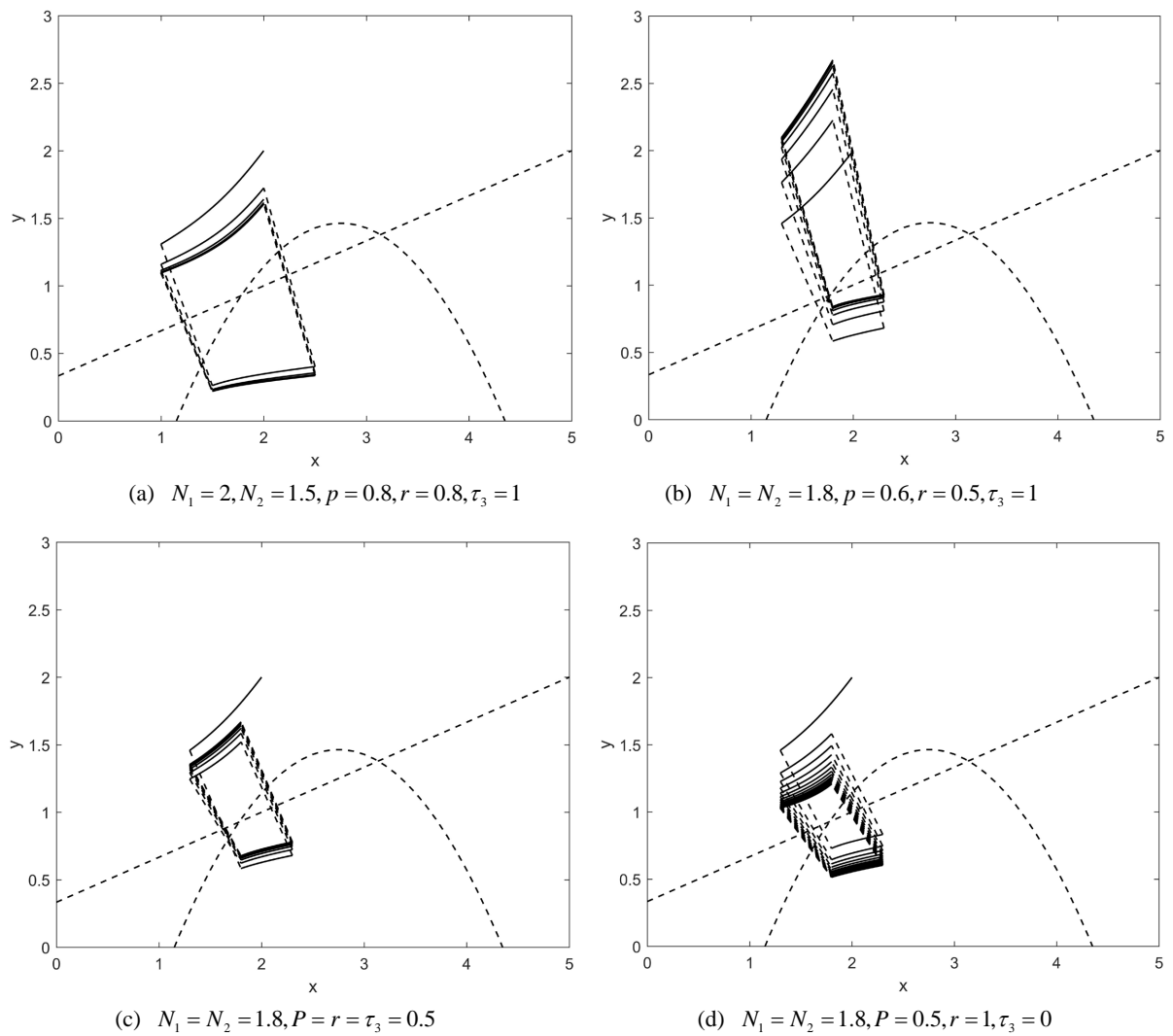


Figure 4. The periodic solution of bilateral control
图 4. 双边控制周期解

5. 结论

本文建立了毒素影响下具有 Allee 效应的捕食 - 被捕食动力系统, 并施加了状态反馈双边控制, 分析了系统周期解的存在性。研究表明控制对鱼类的捕捞力度和投放力度, 可以维持鱼塘的生态平衡。后续将研究毒性系数 α 、 β 及 Allee 阈值对周期解的影响。文中的理论研究结果为污染环境中鱼类养殖提供了理论支持, 具有较高的实际意义。

基金项目

本研究由北京建筑大学研究生创新项目资助, 项目号: PG2021096。

参考文献

- [1] Tapasi Das, R.N. and Mukherjee, K.S. (2009) Chaudhuri. Harvesting of a Prey-Predator Fishery in the Presence of Toxicity. *Applied Mathematical Modelling*, **33**, 2282-2292. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2008.06.008>
- [2] Younes, L., Abdellah, A., Khalid, H., *et al.* (2018) Dynamics of a Predator-Prey Model with Harvesting and Reserve Area for Prey in the Presence of Competition and Toxicity. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, **59**, 305-321. <https://doi.org/10.1007/s12190-018-1181-0>
- [3] Kunal, C. and Kunal, D. (2015) Modeling and Analysis of a Two-Zooplankton One-Phytoplankton System in the Presence of Toxicity. *Applied Mathematical Modelling*, **39**, 1241-1265. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2014.08.004>
- [4] Wei, C.J., Liu, J.N. and Chen, L.S. (2017) Homoclinic Bifurcation of a Ratio-Dependent Predator-Prey System with Impulsive Harvesting. *Nonlinear Dynamics*, **89**, 2001-2012. <https://doi.org/10.1007/s11071-017-3567-1>
- [5] Wei, C.J. and Chen, L.S. (2014) Periodic Solution and Heteroclinic Bifurcation in a Predator-Prey System with Allee Effect and Impulsive Harvesting. *Nonlinear Dynamics*, **76**, 1109-1117. <https://doi.org/10.1007/s11071-013-1194-z>
- [6] Zhao, W.C., Liu, Y.L., Zhang, T.Q., *et al.* (2014) Geometric Analysis of an Integrated Pest Management Model Including Two State Impulses. *Abstract and Applied Analysis*, **2014**, Article ID: 963072. <https://doi.org/10.1155/2014/963072>
- [7] Zhao, L.C., Chen, L.S. and Zhang, Q.L. (2012) The Geometrical Analysis of a Predator-Prey Model with Two State Impulses. *Mathematical Biosciences*, **238**, 55-64. <https://doi.org/10.1016/j.mbs.2012.03.011>
- [8] Xu, J., Huang, M.Z. and Song, X.Y. (2020) Dynamical Analysis of a Two-Species Competitive System with State Feedback Impulsive Control. *International Journal of Biomathematics*, **13**, Article ID: 2050007. <https://doi.org/10.1142/S1793524520500072>
- [9] Zhang, M., Zhao, Y., Chen, L.S., *et al.* (2020) State Feedback Impulsive Modeling and Dynamic Analysis of Ecological Balance in Aquaculture Water with Nutritional Utilization Rate. *Applied Mathematics and Computation*, **373**, Article ID: 125007. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2019.125007>