Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2021, 10(12), 4218-4226**
Published Online December 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2021.1012448

复合Poisson 模型带破产罚金的最优分红策略

李静伟

天津电子信息职业技术学院经济与管理系，天津

收稿日期：2021年11月13日；录用日期：2021年12月9日；发布日期：2021年11月16日

摘 要

本文研究了复合 Poisson 模型带破产罚金的最优分红问题。目标是最大化破产时刻之前的累积折现分红和折现罚金之差。首先，本文给出了值函数满足的基本性质。然后，本文推导了值函数满足的 HJB 方程。最后，验证了值函数是HJB方程的解。

关键词

复合Poisson 模型，最优分红问题，罚金函数，HJB 方程

Optimal Dividend-Penalty Strategy in the Compound Poisson Model

Jingwei Li

Departement of Economics and Management, Tianjin Electronic Information College, Tianjin

Received: Nov. 13^{th}, 2021; accepted: Dec. 9^{th}, 2021; published: Dec. 16^{th}, 2021

Abstract

This paper concers an optimal dividend-penalty problem for the compound Poisson model. The objective is to maximize the difference of the expected cumulative dis-

文章引用: 李静伟. 复合Poisson 模型带破产罚金的最优分红策略[J]. 应用数学进展, 2021, 10(12): 4218-4226.
DOI: 10.12677/aam.2021.1012448

counted penalty payment taken at the moment of ruin and a discounted penalty payment taken at the moment of ruin. Firstly, this paper gives the basic properties of the value function. Then, we derive the HJB equation of the value function. Finally, it is verified that the value function is the solution of the HJB equation.

Keywords

Compound Poisson Mode, Optimal Dividend Problem, Gerber-Shiu Function, HJB Equation

1. 介绍

由于分红可以看作衡量一个公司价值的工具，最大化累积期望折现分红成为一个公司最优化的重要原则。保险风险中的最优分红问题可以追朔到 [1]。他考虑保险公司的盈余过程是一个简单离散时间的随机游走模型，并且得到最优的分红策略为边界分红策略。文献 [2]在此基础上研究了复合 Poissson 风险的最优分红问题，证明最优分红策略为波段分红策略。从那时起，复合 Poission 风险模型的最优分红问题得到了快速的发展，如文献 [3–7] 等。

由于保险业的特殊性，保险公司不同于一般的企业，保险公司不能肆意追求股东利益最大化。为了保护被保险者的利益，监管部门可以考虑要求保险公司在破产发生时支付一定的罚金。因此一些学者将破产时的罚金引入到分红问题中。Thonhauser 和 Albrecher [8]分别考虑了复合 Poisson 模型和扩散模型的最优分红-罚金问题。他们假设破产时刻的罚金是常数，并且证明了破产时刻的罚金可以平衡破产风险和公司收益的矛盾。Avram 等 [9] 研究了谱负 Lévy 过程相同的优化问题，他们假设破产时刻的罚金函数只依赖于赤字，且关于赤字是递增的函数。与经典的分红问题相比，额外增加罚金函数的量细化了控制问题的优化标准。目前，关于分红-罚金问题的研究，很多文献假设罚金函数只依赖于破产时的赤字 (参见文献 Marciniak 和Palmowski [10]，Zajic [11]，Dickson 等 [12]，Gerber 等 [13]等等)。一般而言，Gerber-Shiu 罚金函数依赖于破产时刻、破产前盈余、破产时的赤字。为了使研究的问题更加的一般化，我们考虑了一般的 Gerber-Shiu 罚金函数。

本文在罚金经济因素下研究了复合 Poisson 模型的最优分红问题。本文讨论的罚金函数只依赖于当前的盈余。本文严格推导了值函数满足的动态规划原理，得到了值函数满足的 HJB 方程，并且验证了值函数是 HJB 方程的解。

本文的结构如下：第2节建立了带破产罚金的保险风险模型，并且给出了相应的最优分红问题。第3节给出了值函数满足的基本性质。第4节推导了值函数满足的动态规划原理和 HJB 方程，并且验证了值函数是 HJB 方程的解。

2. 模型描述

为使问题有严格的数学描述，首先给出一个完备的概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P})$, Ω 是所有左右极限的轨道集合。假设保险公司的盈余服从复合 Poission 过程，则保险公司的盈余过程为

$$X_t = x + ct - \sum_{i=1}^{N_t} Y_i,$$

其中 x 是初始准备金，c 是保费收入率，$\{N_t\}$ 是强度为 $\lambda > 0$ 的 Poision 过程，索赔大小 Y_1, $Y_2, ...,$ 与 $\{N_t\}$ 是相互独立的，且是 i.i.d. 正的随机变量，服从的分布函数为 Q。τ_i $(i = 1, 2, ...)$ 是第 i 次索赔时刻。

为了刻画破产的严重程度，本文考虑了Gerber-Shiu 期望折现罚金函数，

$$\Phi(x) = \mathbb{E}_x(e^{-\delta\tau}\omega(X_\tau)\mathbb{I}_{\{\tau<\infty\}}). \tag{2.1}$$

其中 $\omega(x)$ 是非正的，代表破产时刻的罚金，且满足积分条件

$$K = \sup_{x\geq 0} \mathbb{E}[\omega(x - Y_1)|Y_1 > x] < \infty. \tag{2.2}$$

分红策略 $L = \{L_t, t \geq 0\}$ 是一个过程，其中 L_t 是直到时间 t 的累计分红。给定分红策略 L 相应受控制的盈余过程为

$$X_t^L = x + ct - \sum_{i=1}^{N_t} Y_i - L_t. \tag{2.3}$$

相应的破产时间为 $\tau^L = \inf\{t \geq 0 : X_t^L < 0\}$。除非必须运用 τ^L，为了简化符号本章用 τ 替代 τ^L。

称分红策略 L 是可行的如果满足：

- L_t 是càglàd (左连右极), 非降的, 关于自然流$(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ 是适应的且$L_0 = 0$;
- 对于任意的$0 \leq t < \tau$, 过程L_t 满足

$$L_t \leq x + ct - \sum_{i=1}^{N_{t-}} Y_i \quad 和 \quad \Delta L = L_{t+} - L_t \leq X_t^L.$$

设 Π_x 为初始盈余 $x \geq 0$ 可行分红策略的集合。

定义函数 $V^L(x)$ 是直到破产时刻的期望折现累积折现分红和折现罚金之差，即

$$V^L(x)=\begin{cases}\mathbb{E}_x(\int_0^\tau e^{-\delta s}dL_s-e^{-\delta\tau}\varpi(X_\tau^L)),x\geq 0;\\ 0,x<0,\end{cases}\tag{2.4}$$

其中$\delta\geq 0$ 是贴现率。值函数定义为

$$V(x)=\sup\{V^L(x),L\in\Pi_x\},x\geq 0\tag{2.5}$$

3. 值函数性质

引理 3.1 值函数 $V(x)$ 是良好定义的且满足

$$x+\frac{g(0)-\lambda K}{\lambda+\delta}\leq V(x)\leq x+\frac{c}{\delta}\tag{3.1}$$

其中 $x\geq 0$。

先证明右边不等式。对于任意可行策略 $L=(L_t)_{t\geq 0}\in\Pi_x$，满足 $L_t\leq x+ct-\sum_{i=1}^{N_t}Y_i$，则 $L_t\leq\phi(t):=x+ct$。由于 $e^{-\delta t}$ 是正的且非降函数，有

$$\begin{aligned}V^L(x)\leq&\mathbb{E}_x(\int_0^\infty e^{-\delta t}d\phi(t))\\ &=x+c\int_0^\infty e^{-\delta t}dt\\ &=x+\frac{c}{\delta}\end{aligned}$$

则 $V(x)=\sup_{L\in\Pi_x}$ 是良好定义的且满足右边不等式。

下面证明左边不等式。给定初始盈余 $x\geq 0$，考虑可行的分红策略 $L^0\in\Pi_x$: 把 x 作为分红然后把所有保费收入作为分红直到第一次理赔到达，意味着破产发生，则

$$L_t^0=x+\int_0^t cdt=x+ct$$

由 (2.2) 式可得

$$\begin{aligned}V^{L^0}(x)=&\mathbb{E}_x(\int_0^{\tau_1}e^{-\delta s}dL_s^0-e^{-\delta\tau}\omega(X_{\tau_1}^{L^0}))\\ =&x+\frac{c}{\lambda+\delta}-\frac{c}{\lambda+\delta}\int_0^\infty\omega(-y)dQ(y)\\ \geq&x+\frac{c}{\lambda+\delta}-\frac{\lambda K}{\lambda+\delta}\end{aligned}$$

引理 3.2 值函数 $V(x)$ 是增的，局部 *Lipschitz* 连续的且满足

$$y-x\leq V(y)-V(x)\leq\frac{V(b)(\lambda+\delta)+\lambda K}{c}(y-x)\tag{3.2}$$

其中 $b \geq y > x \geq 0$。

任意 $\epsilon > 0$，考虑可行分红策略 $\bar{L} \in \Pi_x$ 使得 $V^{\bar{L}}(x) \geq V(x) - \epsilon$。对 $y > x \geq 0$，定义新的分红策略 $\bar{L}_1$: 把 $y - x$ 作为分红然后采取策略 $\bar{L}$，是可行的且满足

$$V(y) \geq V^{\bar{L}_1}(y) = y - x + V^{\bar{L}}(x) \geq y - x + V(x) - \epsilon \tag{3.3}$$

对于初始盈余 $y > x \geq 0$ 且 $\epsilon > 0$, 采取可行分红策略 $\bar{L} \in \Pi_y$ 使得 $V^{\bar{L}}(y) > V(y) - \epsilon$。考虑分红策略 $L^0 \in \Pi_x$: 初始盈余为 x，当盈余过程 $X_t^{L^0} < y$ 时部分和；当盈余 $X_t^{L^0}$ 到达 y 时采取分红策略 $\bar{L}$。在没有理赔到达时，盈余过程从 x 到达 y 的时间为 t_0，也就是 $y = c + ct_0$,则 $t_0 = \frac{y-x}{c}$。定义分红策略 $\tilde{L} \in \Pi_y$ 为

$$\tilde{L}_t = \begin{cases} L^0, & \text{如果} \quad t < \tau_1 \wedge t_0; \\ \bar{L}_{t-t_0}, & \text{如果} \quad \tau_1 > t_0 \quad \text{and} \quad t \geq t_0. \end{cases}$$

因为在第一次理赔到达之前盈余从 x 到达 y 的概率为 $e^{-\lambda t_0}$，则

$$\begin{aligned} V(x) \geq & V^{\tilde{L}}(x) \\ \geq & e^{-(\lambda+\delta)t_0} V^{\bar{L}}(y) - \int_0^t \lambda e^{-(\lambda+\delta)t} \int_{x+ct}^{\infty} \omega(x + ct - y) dQ(y) dt \\ \geq & e^{-(\lambda+\delta)t_0} V^{\bar{L}}(y) - \lambda K t_0 \\ \geq & (V(y) - \epsilon) e^{-(\lambda+\delta)t_0} - \lambda K t_0 \end{aligned}$$

因此，有

$$\begin{aligned} V(y) - V(x) \leq & V(y) - V(y) e^{-(\lambda+\delta)t_0} + \lambda K t_0 \\ \leq & [V(y)(\lambda + \delta) + \lambda K] t_0 \\ \leq & \frac{[V(b)(\lambda + \delta) + \lambda K]}{c} (y - x) \end{aligned}$$

4. 动态规划原理和HJB方程

引理 4.1 *(动态规划原理)对于任意 $x \geq 0$ 和任意停时 T，则*

$$V(x) = \sup_{\bar{L} \in \Pi_x} \mathbb{E}_x [\int^{T \wedge \tau_1} e^{-\delta s} dL_s + e^{-\delta(T \wedge \tau_1)} V(X_{T \wedge \tau_1}^L) - e^{-\delta \tau} \omega(X_\tau^L) \mathbb{I}_{\{\tau \leq T \wedge \tau_1\}}] \tag{4.1}$$

由 $\{\mathcal{F}_t\}$ 是跳流，$X_0 = x$,对于固定 $t \geq 0$ 几乎处处有 $T \wedge \tau_1 = t \wedge \tau_1$,则下面这证明可把 t 看作 T，令

$$v(x, t) = \sup_{\bar{L} \in \Pi_x} \mathbb{E}_x [\int^{t \wedge \tau_1} e^{-\delta s} dL_s + e^{-\delta(t \wedge \tau_1)} V(X_{t \wedge \tau_1}^L) - e^{-\delta \tau} \omega(X_\tau^L) \mathbb{I}_{\{\tau \leq t \wedge \tau_1\}}]$$

首先证明 $V(x) \geq v(x,t)$。取任意分红策略 $L \in \Pi_x$，我们有

$$V^L(x) = \mathbb{E}_x[\int^{t\wedge\tau_1} e^{-\delta s}dL_s + \int_{t\wedge\tau_1}^{\tau} e^{-\delta s}dL_s - e^{-\delta\tau}\omega(X_\tau^L)] \tag{4.2}$$

下面计算上面(4.2)中间的部分：

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_x[\int_{t\wedge\tau_1}^{\tau} e^{-\delta s}dL_s] &= \mathbb{E}_x[\int_0^{\tau-t\wedge\tau_1} e^{-\delta(s+t\wedge\tau_1)}dL_{s+t\wedge\tau_1}] \\ &= \mathbb{E}_x[e^{-\delta(t\wedge\tau_1)}\mathbb{E}[\theta_{t\wedge\tau_1}\circ\int_0^{\tau} e^{-\delta s}|X_{t\wedge\tau_1}^L]] \\ &= \mathbb{E}_x[e^{-\delta(t\wedge\tau_1)}V^L(X_{t\wedge\tau_1}^L)] \\ &\leq \mathbb{E}_x[e^{-\delta(t\wedge\tau_1)V(X_{t\wedge\tau_1}^L)}]\end{aligned}$$

代入(4.2)式可得

$$V^L(x) = \mathbb{E}_x[\int^{t\wedge\tau_1} e^{-\delta s}dL_s + e^{-\delta(t\wedge\tau_1)V(X_{t\wedge\tau_1}^L)} - e^{-\delta\tau}\omega(X_\tau^L)]$$

因此，可以得证 $V(x) \leq v(x,t)$。

下面证明 $V(x) \geq v(x,t)$。任给 $\epsilon > 0$，取可行策略 $L = (L_t) \in \Pi_x$ 使得

$$\mathbb{E}_x[\int_0^{t\wedge\tau_1} e^{-\delta s}dL_s + e^{-\delta(t\wedge\tau_1)}V(X_{t\wedge\tau_1}^L) - e^{-\delta\tau}\omega(X_\tau^L)\mathbb{I}_{\{\tau\leq t\wedge\tau_1\}}] \geq v(x,t) - \frac{\epsilon}{2}$$

其中 $X_t^{\bar{L}}$ 是相应受控的盈余过程。因为 V 是非负的，我们可以找到一系列增序列 $(x_i)_{i\in N}, x_0$ 且 $\lim_{i\to\infty} = \infty$ 使得如果 $y \in [x_i, x_{i+1})$，则

$$V(y) - V(x_i) \leq \frac{\epsilon}{4}$$

采取可行策略 $\bar{L}_i = (L_t^i)_{t\geq 0} \in \Pi_{x_i}$ 使得 $V(x_i) - V^{\bar{L}_i}(x_i) \leq \frac{\epsilon}{4}$。定义新的可行策略 $L^* = (L_t^*)_{t\geq 0}$ 满足下列条件：

- 如果 $\tau_1 \leq t$,采取 $L_t^* = L_t$ 对任意 $t \geq 0$;
- 如果 $\tau_1 > t$,采取 $L_t^* = L_t$ 对任意 $t \in [0,\tau_1]$;
- 如果 $\tau_1 > t$ 且$X_t^{\bar{L}} \in [x_i, x_{i+1})$,立即在时间 t 支付 $X_t^{\bar{L}} - x_i$ 作为分红,也就是 $L_{t+} - L_t = X_t^{\bar{L}} - x_i$,然后采取策略 $\bar{L}_i$。

由上述构造可得 $\bar{L}_1^*$ 是可行策略，如果 $X_t^{\bar{L}} \in [x_i, x_{i+1})$，则有

$$V^{\bar{L}^*}(X_t^{\bar{L}}) = X_t^{\bar{L}} - x_i + V^{\bar{L}_i}(x_i) \geq V(x_i) - \frac{\epsilon}{4}$$

因此，可得

$$\begin{aligned}v(x,t)-V^{\bar{L}^*}(x)\leq&\mathbb{E}_x[\int_0^{t\wedge\tau_1}e^{-\delta s}dL_s+e^{-\delta(t\wedge\tau_1)}V(X^{\bar{L}}_{t\wedge\tau_1})-e^{-\delta\tau}\omega(X^L_\tau)\mathbb{I}_{\tau<t\wedge\tau_1}]\\&-V^{\bar{L}^*}(x)+\frac{\epsilon}{2}<\epsilon\end{aligned}$$

结论得证。

运用与 Azcue 和Muler [5]相同的分析方法，由引理4.1 可得到值函数满足的HJB 方程为

$$\max\{\mathcal{L}V(x),1-V'(x)\}=0 \tag{4.3}$$

其中 $\mathcal{L}V(x)=cV'(x)-(\lambda+\delta)V(x)+\int_0^x V(x-y)dQ(y)-\lambda\int_0^\infty\omega(x-y)dQ(y)$。

定理 4.2 *值函数 $V(x)$ 是HJB方程的解。*

由引理 3.2 值函数 $V(x)$ 是局部 Lipschitz 连续的性质，可得 $V'(x)\geq 1$,即 $1-V'(x)\leq 0$。因为 $\mathbb{E}_x\int_0^\tau e^{-\delta s}dL_s\geq 0$ 和(4.1)，对于任意 $h\geq 0$ 可得

$$V(x)\geq\mathbb{E}_x[e^{-\delta(h\wedge\tau_1)}V(X^L_{h\wedge\tau_1})-e^{-\delta\tau}\omega(X^L_{\{\tau<h\wedge\tau_1\}})] \tag{4.4}$$

即

$$\begin{aligned}0&\geq\mathbb{E}_x[e^{-\delta(h\wedge\tau_1)}V(X^L_{h\wedge\tau_1})-e^{-\delta\tau}\omega(X^L_{\{\tau<h\wedge\tau_1\}})]-V(x)\\&\geq\frac{V(x+ch)-V(x)}{h}-\frac{1-e^{-(\lambda+\delta)h}}{h}V(x+ch)\\&+\frac{1}{h}\int_0^h\lambda e^{-(\lambda+\delta)s}\int_0^{x+ch}V(x+ch-y)dQ(y)ds\\&+\frac{1}{h}\int_0^h\lambda e^{-(\lambda+\delta)s}\int_{x+ch}^\infty\omega(x+ch-y)dQ(y)ds\end{aligned}$$

上式两边令 $h\to 0$，可得

$$0\geq cV'(x)-(\lambda+\delta)V(x)+\lambda\int_0^x V(x-y)dQ(y)-\lambda\int_x^\infty\omega(x-y)dQ(y) \tag{4.5}$$

令 $\mathcal{A}=\{x:1-V'(x)=0,\mathcal{L}V(x)=0\}$，由 $V(x)$ 和 $\mathcal{L}V(x)$ 的连续性，可知 $\mathcal{A}$ 是闭的。令 $\mathcal{B}=\{x:1-V'(x)=0,\mathcal{L}V(x)<0\}$ 由 Azcue 和Muler [5] 命题 5.4 可得 $\mathcal{B}$ 是左开的且 $\mathcal{B}$ 的下极限属于 $\mathcal{A}$。则 $\mathcal{C}=R_+\setminus(\mathcal{A}\cup\mathcal{B})$, 对于任意 $h>0$，如果第一次理赔，不分红是最优的，则

$$V(x)=\mathbb{E}_x[e^{-\delta(h\wedge\tau_1)}V(X_{h\wedge\tau_1})-e^{-\delta\tau}\omega(X_\tau)\mathbb{I}_{\tau\leq h\wedge\tau_1}] \tag{4.6}$$

运用于 (4.7) 相同的推导方法可得

$$0=cV'(x)-(\lambda+\delta)V(x)+\lambda\int_0^x V(x-y)dQ(y)-\lambda\int_x^\infty\omega(x-y)dQ(y) \tag{4.7}$$

由 $R_+ = \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$, 则对任意 $x \in R_+$ 可得

$$\max\{1 - V'(x), \mathcal{L}V(x)\} = 0, \quad a.e. \tag{4.8}$$

因此，值函数 $V(x)$ 几乎处处是HJB方程的解。

下面运用数值分析的方法分析破产时刻的罚金对最优分红策略的影响。本文假设理赔服从伽马分布，即 $Q(x) = 1 - (1 + x)e^{-x}$，且罚金函数 $\omega(x) = ke^{-\frac{1}{2}x}$，参数 $c = 21.4, \lambda = 10, \delta = 0.1$, a_1^*, a_2^* 为最优分红边界，则

Table 1. The optimal dividend band levels
表 1. 最优分红边界

k	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
a_1^*	0	0	0	0	0	0	0	0	10.21	10.24
a_2^*	10.06	10.09	10.10	10.12	10.13	10.15	10.16	10.19	$+\infty$	$+\infty$

由表 1数据分析可以得到，随之破产罚金递增，最优分红边界也是递增的。

5. 结论

本文在罚金经济因素下研究了复合 Poisson 模型的最优分红问题。本文严格推导了值函数满足的动态规划原理，得到了值函数满足的 HJB 方程，验证了值函数是 HJB 方程的解，并且数值分析了破产时刻的罚金对最优分红策略的影响。由数值分析可以得到破产时刻的罚金可以抑制过度分红的冲动，从而降低保险公司破产的可能或延长公司的寿命。

参考文献

[1] De Finetti, B. (1957) Su un'impostazione alternativa della teoria collettiva del rischio. *Transactions of the XVth International Congress of Actuaries*, **2**, 433-443.

[2] Gerber, H.U. (1969) Entscheidungskriterien für den zusammengesetzten Poisson-Prozess. Doctoral Thesis, ETH Zürich.

[3] Albrecher, H. and Thonhauser, S. (2009) Optimality Results for Dividend Problems in Insurance. *RACSAM—Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Fisicas y Naturales. Serie A. Matematicas*, **103**, 295-320. https://doi.org/10.1007/BF03191909

[4] Azcue, P. and Muler, N. (2005) Optimal Reinsurance and Dividend Distribution Policies in the Cramér-Lundberg Model. *Mathematical Finance*, **15**, 261-308. https://doi.org/10.1111/j.0960-1627.2005.00220.x

[5] Azcue, P. and Muler, N. (2014) Stochastic Optimization in Insurance: A Dynamic Programming Approach. Springer, London. https://doi.org/10.1007/978-1-4939-0995-7

[6] Avanzi, B. (2009) Strategies for Dividend Distribution: A Review. *North American Actuarial Journal*, **13**, 217-251. https://doi.org/10.1080/10920277.2009.10597549

[7] Schmidli, H. (2008) Stochastic Control in Insurance. Springer, London. https://doi.org/10.1002/9780470061596.risk0374

[8] Thonhauser, S. and Albrecher, H. (2007) Dividend Maximization under Consideration of the Time Value of Ruin. *Insurance: Mathematics and Economics*, **41**, 163-184. https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2006.10.013

[9] Avram, F., Palmowski, Z. and Pistorius, M.R. (2015) On Gerber-Shiu Functions and Optimal Dividend Distribution for a Lévy Risk Process in the Presence of a Penalty Function. *Annals of Applied Probability*, **25**, 1868-1935. https://doi.org/10.1214/14-AAP1038

[10] Marciniak, E. and Palmowski, Z. (2016) On the Optimal Dividend Problem for Insurance Risk Models with Surplus-Dependent Premiums. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **168**, 723-742. https://doi.org/10.1007/s10957-015-0755-3

[11] Zajic, T. (2000) Optimal Dividend Payout under Compound Poisson Income. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **104**, 195-213. https://doi.org/10.1023/A:1004689008633

[12] Dickson, D.C.M. and Waters, H.R. (2004) Some Optimal Dividends Problems. *Astin Bulletin*, 34, 49-74. https://doi.org/10.1017/S0515036100013878

[13] Gerber, H.U., Lin, X.S. and Yang, H. (2006) A Note on the Dividends-Penalty Identity and the Optimal Dividend Barrier. *Astin Bulletin*, **36**, 489-503. https://doi.org/10.1017/S0515036100014604