Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2021, 10(12), 4262-4271
Published Online December 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2021.1012453

$\mathbb{R}^N$上一类p-Kirchhoff方程解的存在性研究

刘立华

盐城师范学院，江苏 盐城

收稿日期：2021年11月13日；录用日期：2021年12月10日；发布日期：2021年12月17日

摘　要

本文研究如下一类p-Kirchhoff椭圆方程

$$-\left(a+b\Big(\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^p\Big)^\tau\right)\Delta_p u+V(x)|u|^{p-2}u=|u|^{q-2}u,\qquad x\in\mathbb{R}^N,\tag{1}$$

非平凡弱解的存在性。其中 $a,b,\tau>0, 1<p<N, p<q<p(\tau+1)<p^*$ 。基于变分原理，我们证得方程(1)至少存在一个非平凡解。本文的主要困难在于论证近似解序列的有界性和收敛性。

关键词

p-**Kirchhoff** 椭圆方程，变分原理，(PS)序列，**Pohozǎev** 恒等式

Study on Existence of Solutions for a p-Kirchhoff Elliptic Equation on $\mathbb{R}^N$

Lihua Liu

Yancheng Normal University, Yancheng Jiangsu

Received: Nov. 13th, 2021; accepted: Dec. 10th, 2021; published: Dec. 17th, 2021

文章引用: 刘立华. $\mathbb{R}^N$上一类p-Kirchhoff方程解的存在性研究[J]. 应用数学进展, 2021, 10(12): 4262-4271.
DOI: 10.12677/aam.2021.1012453

Abstract

In this paper, we study the existence of solutions for the following p-Kirchhoff elliptic equation

$$-\left(a+b(\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^p)^\tau\right)\Delta_p u+V(x)|u|^{p-2}u=|u|^{q-2}u, \qquad x\in\mathbb{R}^N, \tag{1}$$

with $a,b,\tau>0, 1<p<N, p<q<p(\tau+1)<p^*$. By the variational methods, we prove that problem (1) admits at least one nontrivial solution. The main difficulty is to get a bounded (PS) sequence and extract a strong convergent subsequence from it.

Keywords

p-Kirchhoff Elliptic Equation, Variational Method, (PS) Sequence, Pohozǎev Identity

1. 介绍

本文，我们考虑如下一类p-Kirchhoff 椭圆问题

$$-\left(a+b(\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^p)^\tau\right)\Delta_p u+V(x)|u|^{p-2}u=|u|^{q-2}u, \qquad x\in\mathbb{R}^N,$$

其中$\Delta_p u=div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ 是p-Laplacican 算子. 问题(1)可以看成是由数学家Kirchhoff [1]提出的一个数学模型的推广.关于p-Kirchhoff-type 椭圆方程的一些有趣的结果可参见相关文献 [2–4].

学者G. Li 和H. Ye [5]在$\mathbb{R}^3$上研究了(1) 当$p=2,\tau=1$ 时的情形, 以及势函数$V(x)$ 满足如下条件:

(V_1) $V(x)$在$(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$ 连续且弱可导，$(\nabla V(x),x)\in L^\infty(\mathbb{R}^3)\cup L^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^3)$ ，$V(x)-(\nabla V(x),x)\geq 0\quad a.e\ x\in\mathbb{R}^3$, 其中$(\cdot,\cdot)$ 是$\mathbb{R}^3$ 上通常定义的内积;

(V_2) 对于几乎所有的$x \in \mathbb{R}^3$, $V(x) \le \liminf\limits_{|y|\to\infty} V(y) = V_\infty < +\infty$ ，且在勒贝格正测度子集上有该不等关系严格成立;

(V_3) 存在$\overline{C} > 0$ 使得$\overline{C} = \inf\limits_{u\in H^1(\mathbb{R}^3)\setminus\{0\}} \frac{\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 + V(x)|u|^2}{\int_{\mathbb{R}^3} |u|^2} > 0.$

他们证得了当$3 < q < 6$时，方程(1)至少存在一个正的基态解. 在文献 [6]中, N. Ikoma 考虑当$2 < q \le 3$ 时方程(1)的存在性. 然而, 对于一般的p-Kirchhoff 椭圆方程，方程(1)是否也存在类似的存在性结果？由于p-Laplacican 算子的存在，上述文献再用希尔伯特空间的研究方法对于p-Kirchhoff 椭圆方程不再适用。本文中，受文献 [5–7]的启发，我们将利用截断函数、Pohozaev 恒等式以及文献 [8]中的单调性技巧等方法得到(PS)序列的有界性估计，进而利用改进的山路引理证得其非平凡弱解的存在性.

为了叙述我们的主要结果, 我们首先介绍一些Sobolev 空间和范数的定义. 为了方便起见, 我们将$\int_\Omega hds$ 和$\int_{\partial\Omega} hds$ 分别表示在区域$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 和边界$\partial\Omega$ 上的Lebegsgue积分. 令$X = W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ 为通常的Sobolev 空间，其范数为$\|u\| = (\int_{\mathbb{R}^N} a|\nabla u|^p + V(x)|u|^p)^{\frac{1}{p}}, 1 < p < \infty$. 定义$\|\cdot\|_q$为通常的$L^q(\mathbb{R}^N)$ 范数.众所周知，当$r \in (p, p^*]$时，嵌入$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N)$ 是连续的，以及存在一个常数S_r 使得

$$\|u\|_r \le S_r\|u\|, \ \ \forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N). \tag{2}$$

本文中，我们将用到著名的Sobolev不等式 [9]

$$S(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p^*})^{\frac{1}{p^*}} \le (\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx)^{\frac{1}{p}}, \quad \forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N), \tag{3}$$

其中$1 < p < N$, S 是一个正常数. 接下来, 我们假设势函数$V(x)$ 满足如下条件:

(H_1) $V(x) \in C^1(\mathbb{R}^N)$ ，存在常数$V_0, V_1 > 0$，使得$0 < V_0 \le V(x) \le V_1, \forall x \in \mathbb{R}^N$;

(H_2) 设$1 < p < N, N \ge 3, p < q < p(\tau+1) < p^* = \frac{Np}{N-p}$.设$\lambda^* = \frac{N(q-p)(p^*-p(\tau+1))}{p^*(p(\tau+1)-q)}$，存在$\lambda \in (0, \lambda^*]$ 时,

$$(x \cdot \nabla V(x)) - \lambda V(x) \le 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

定理 1.1 *若条件$(H_1) - (H_2)$ 满足，那么方程(1)至少存在一个非平凡弱解.*

注 1.2 *(i) 当$p = 2, \tau = 1, 3 < q < 4, N = 3$时，在文献 [6]中，参数$\lambda$ 的上界λ^*满足*

$$\frac{N(q-p)(p^* - p(\tau+1))}{p^*(p(\tau+1) - q)} = \frac{q-2}{4-q} > 1,$$

故本文的λ^*可以看做 [6]在p-Kirchhoff 椭圆问题中的推广. 另外在文献 [5]中势函数$V(x)$ 满足径向条件$x.\nabla x \le V(x)$，本文中(H_2) 的径向条件$x.\nabla x \le \lambda V(x)$ 显得更一般.
(ii) 本文中尽管容易证明方程(1)所相应的泛函$I(u)$ 满足山路引理的几何条件, 但是当$p < q < p(\tau+1)$ 时，我们不能直接证明(PS) 序列的有界性. 为此, 我们将采用文献 [8]中的一种非直接的单调性方法.

2. 预备工作

如果对于任何的$v \in X$, 满足

$$(a+b\|\nabla u\|_p^{p\tau})\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla v+\int_{\mathbb{R}^N}V(x)|u|^{p-2}u=\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{q-2}uv. \tag{4}$$

则称$u \in X$ 是方程(1)的弱解.

设$I(u): X \to \mathbb{R}$ 是(1)的能量泛函，定义如下：

$$I(u)=\frac{1}{p}\|u\|^p+\frac{b}{p(\tau+1)}\|\nabla u\|^{p(\tau+1)}-\frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^q. \tag{5}$$

容易证明该泛函满足$I \in C^1(X,\mathbb{R})$ 以及对于任何的$v \in X$，其Gateaux 导数为

$$I'(u)v=(a+b\|\nabla u\|_p^{p\tau})\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla v+\int_{\mathbb{R}^N}V(x)|u|^{p-2}v-\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{q-2}uv, \tag{6}$$

显然, 方程(1)的弱解对应着相应泛函的临界点.

引理 2.1 ([8]) 设X 为一巴拿赫空间，其范数为$\|.\|_X$, 以及$K \subset \mathbb{R}^+$ 是一区间. 考虑如下定义在X上的C^1函数簇,

$$I_\mu(u)=A(u)-\mu B(u), \quad \mu \in K, \tag{7}$$

其中$B(u)$ 非负，$I_\mu(0)=0$，当$\|u\|_X \to \infty$ 时，满足$A(u)\to\infty$ 或$B(u)\to\infty$.

对于任何的$\mu \in K$, 设

$$\Gamma_\mu=\{\gamma \in (C[0,1],X):\gamma(0)=0, I_\mu(\gamma(1))<0\}. \tag{8}$$

如果对于任何的$\mu \in K$, 集合Γ_μ 非空以及

$$c_\mu=\inf_{\gamma\in\Gamma_\mu}\max_{t\in[0,1]}I_\mu(\gamma(t))>0. \tag{9}$$

那么对于几乎所有的$\mu \in K$, 存在序列$\{u_n\}\subset X$ 使得*(i).* $\{u_n\}$ 有界; *(ii).* $I_\mu(u_n)\to c_\mu$; *(iii).* 在X^* 中$I'_\mu(u_n)\to 0$.

本文中，我们设

$$A(u)=\frac{a}{p}\|u\|^p+\frac{b}{p(\tau+1)}\|\nabla u\|_p^{p(\tau+1)}, \quad B(u)=\frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^q. \tag{10}$$

我们研究如下的泛函簇

$$I_\mu(u)=\frac{a}{p}\|u\|^p+\frac{b}{p(\tau+1)}\|\nabla u\|^{p(\tau+1)}-\frac{\mu}{q}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^q, \tag{11}$$

以及Gateaux 导数为

$$I'_\mu(u)v = (a + b\|\nabla u\|_p^{p\tau}) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u|^{p-2} - \mu \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{q-2}uv, \tag{12}$$

接下来的引理2.2 和引理2.3 意味着I_μ 满足引理2.1的条件.

引理 2.2 假设$(H_1)-(H_2)$ 满足, 则对所有的$\mu \in [\frac{1}{2}, 1]$, 有$\Gamma_\mu \neq \emptyset$.

证明: 只要证明存在$\phi \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ 使得对于任何的$\mu \in [1/2, 1]$有$I_\mu(\phi) < 0$ 成立即可. 首先, 我们假设

$$g_\mu(t) = \mu|t|^{q-2}t - V(x)|t|^{p-2}t, \qquad G_\mu(t) = \int_0^t g_\mu(x) = \frac{\mu t^q}{q} - \frac{V(x)}{p}t^p \tag{13}$$

由于$q > p > 1$, 选取适当的$\kappa_0 > 0$ 使得$G_{1/2}(\kappa_0) > 0$. 定义

$$l_R(x) = \begin{cases} \kappa_0, & \text{if } |x| \le R, \\ \kappa_0(R + 1 - |x|), & \text{if } R < |x| \le R + 1, \\ 0, & \text{if } |x| > R + 1. \end{cases} \tag{14}$$

于是当$n \to \infty$时，有$l_R(x) \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N), \|l_R(x)\| \to \infty$ 以及

$$\|\nabla l_R\|_p^p = \kappa_0^p((R + 1)^N - R^N)\sigma_N/N, \quad \int_{\mathbb{R}^N} G_\mu(l_R(x)) \ge G_{1/2}(\kappa_0)\sigma_N R^N/N, \tag{15}$$

其中σ_N 为S^{N-1}上的单位球面. 由(15) 和$G_{1/2}(\kappa_0) > 0$ 得，存在充分大的R_0 使得$\int_{\mathbb{R}^N} G_{1/2}(l_{R_0}) \ge 1$.接下来, 记$l_{R_0,\beta} = l_{R_0}(x/\beta)$. 于是有

$$\|\nabla l_{R_0,\beta}\|_p^p = \beta^{N-p}\|l_{R_0}\|_p^p, \quad \int_{\mathbb{R}^N} G_{1/2}(l_{R_0,\beta}) = \beta^N \int_{\mathbb{R}^N} G_{1/2}(l_{R_0}) \ge \beta^N.$$

从而,

$$\begin{aligned} I_\mu(l_{R_0,\beta}) &= \frac{a}{p}\|\nabla l_{R_0,\beta}\|_p^p + \frac{b}{p(\tau + 1)}\|\nabla l_{R_0,\beta}\|_p^{p(\tau+1)} - G_\mu(l_{R_0,\beta}) \\ &\le \frac{a}{p}\beta^{N-p}\|\nabla l_{R_0}\|_p^p + \frac{b}{p(\tau + 1)}\beta^{(N-p)(\tau+1)}\|\nabla l_{R_0}\|_p^{p(\tau+1)} - \beta^N \end{aligned} \tag{16}$$

由于$p(\tau + 1) < p^* = \frac{pN}{N-p}$, 于是$(N - p)(\tau + 1) < N$. 进而当$\beta \to \infty$ 时，有$I_\mu(l_{R_0,\beta}) \to -\infty$，于是命题得证.

引理 2.3 假设$(H_1)-(H_2)$ 满足. 则存在常数$c > 0$，使得对于所有的$\mu \in [\frac{1}{2}, 1]$ 有$c_\mu \ge c > 0$.

证明: 根据(2) 和(5)，得到对于所有的$u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ 和$\mu \in [1/2, 1]$有

$$\begin{aligned} I_\mu(u) &= \frac{a}{p}\|u\|^p + \frac{b}{p(\tau + 1)}\|\nabla u\|^{p(\tau+1)} - \frac{\mu}{q}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^q, \\ &\ge \frac{a}{p}\|u\|^p - C\|u\|^q, \end{aligned} \tag{17}$$

因为$q > p$, 所以存在$\rho > 0$ 使得$I_\mu(u) > 0$. 特别地, 对于$\|u\| = \rho$, 有$I_\mu(u) \geq c > 0$. 固定$\mu \in [\frac{1}{2}, 1]$和$\gamma \in \Gamma_\mu$. 根据Γ_μ的定义和其连续性,存在$t_\gamma \in (0,1)$使得$\|\gamma(t_\gamma)\|_E = \rho$ and $\|\gamma(1)\| > \rho$. 因此, 对于任何$\mu \in [\frac{1}{2}, 1]$,

$$c_\mu = \inf_{\gamma \in \Gamma_\mu} \max_{t \in [0,1]} I_\mu^T(\gamma(t)) \geq \inf_{\gamma \in \Gamma_\mu} I_\mu^T(\gamma(t_\gamma)) \geq c > 0. \tag{18}$$

证毕.

3. (PS)序列的收敛性和有界性

由引理2.1-2.3, 得对于a.e. $\mu \in [1/2, 1]$, 存在有界序列$\{u_n\}$ in X, 满足

$$I_\mu(u_n) \to c_\mu, \quad (I_\mu(u_n))' \to 0 \ , \quad \sup_n \|u_n\| < T. \tag{19}$$

由于当$q \in (p, p^*)$时，嵌入$X \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N)$ 是连续的, 为此我们可以假设

$$u_n \rightharpoonup u, \ \text{in} \ X; \ \ u_n \to u, \ in \ L^q_{loc}(\mathbb{R}^N); \ \ u_n \to u, \ a.e. \ \text{in} \ \mathbb{R}^N. \tag{20}$$

接下来, 我们将证明$\{u_n\}$在X中收敛.

引理 3.1 *假设$(H_1) - (H_2)$ 满足. 对于任何的$\mu \in [\frac{1}{2}, 1]$, 如果序列$\{u_n\}$ 有界且满足(20), 那么*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^q = \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q, \qquad \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n - u|^q dx = 0.$$

证明: 该引理的证明可以参见文献 [10]. □

引理 3.2 *设$(H_1) - (H_2)$ 满足. $\{u_n\}$ 为一$(PS)_c$序列以及满足(20),则在X 中，$u_n \to u$, 即, 对于所有的$\mu \in [1/2, 1]$，泛函I_μ 满足(PS) 条件.*

证明: 由(12), 得

$$(I_\mu(u_n) - I_\mu(u))'(u_n - u) = P_n + Q_n + K_n, \tag{21}$$

其中

$$\begin{aligned}
P_n &= \left(a + b\|\nabla u_n\|_p^{p\tau}\right) \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p-2}\nabla u)\nabla(u_n - u) \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)(|u_n|^{p-2}u_n - u^{p-2}u)(u_n - u), \\
Q_n &= b(\|\nabla u_n\|^{p\tau} - \|\nabla u\|^{p\tau}) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla(u_n - u), \\
K_n &= \mu \int_{\mathbb{R}^N} (|u_n|^{q-2}u_n - |u|^{q-2}u)(u_n - u).
\end{aligned}$$

显然

$$(I_\mu(u_n) - I_\mu(u))'(u_n - u) \to 0 \quad \text{as } n \to \infty. \tag{22}$$

由引理3.1以及Hölder 不等式, 有

$$|K_n| \leq \mu(\|u_n\|_q^{q-1} + \|u\|_q^{q-1})\|u_n - u\|_q \to 0 \quad as \;\; n \to \infty. \tag{23}$$

定义线性泛函$g : X \to \mathbb{R}$，

$$g(\omega) = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \omega.$$

注意到$|g(\omega)| \leq \|\nabla u\|^{p-1}\|\omega\|$, 可以看到$g$在$X$上连续. 由于在$X$中，$u_n \rightharpoonup u$,故

$$g(u_n - u) = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla (u_n - u) \to 0, \quad as \; n \to \infty. \tag{24}$$

又因$\|u_n\|$ 在X上有界, 于是$|Q_n| \leq Cg(u_n - u) \to 0$, as n $\to \infty$.

综上讨论, 我们有$|P_n| \to 0$ as $n \to \infty$, 这样我们证得在X 中，$u_n \to u$. 证毕. □

根据引理3.2, 存在序列$\{\mu_n\} \subset [\frac{1}{2}, 1]$，$\mu_n \to 1$以及当$n \to \infty$时有，$I^T_{\mu_n}(u_n) = c_{\mu_n}$, $(I^T_{\mu_n})'(u_n) = 0$，u_n is 是如下方程的

$$-(a + b\|\nabla u_n\|_p^p)\Delta_p u_n + V(x)|u_n|^{p-2}u_n = \mu\|u_n\|^{q-2}u_n. \tag{25}$$

非平凡解. 接下来, 我们将借助于Pohozav 恒等式证明$\|u_n\| < T$，为此我们首先建立如下的恒等式.

引理 3.3 设$u \in X$ 是如下方程的

$$-(a + b\|\nabla u\|_p^{p\tau})\Delta_p u + V(x)|u|^{p-2}u = \mu|u|^{q-2}u. \tag{26}$$

的弱解，则满足如下恒等式

$$(a + b\|\nabla u\|_p^{p\tau}) \left(\frac{N-p}{p}\right) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p + \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} (NV(x) + \nabla V(x).x)\,|u|^p - \frac{N}{q}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^q = 0 \tag{27}$$

证明: 由于$u \in X$ 是方程的(26)弱解, 根据标准的正则化讨论有 [9], $u \in C^2_{loc}(\mathbb{R}^N) \cap W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, 令

$$y(x, u) = \frac{\mu|u|^{q-2}u - V(x)|u|^{p-2}u}{a + b\|\nabla u\|_p^{p\tau}}. \tag{28}$$

于是$u \in X$ 也是如下方程

$$-\Delta_p u = y(x, u). \tag{29}$$

的解. 利用Pohozaev 恒等式 [11] ,

$$\frac{N-p}{p}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^p=\int_{\mathbb{R}^N}(NY(x,u)+Y_1(x,u)) \tag{30}$$

其中$Y(x,u)=\int_0^u y(x,s)ds, Y_1(x,u)=\sum\limits_{i=1}^{N}x_i\frac{\partial Y(x,u)}{\partial x_i}$，结论成立. □

引理 3.4 假设$(H_1)-(H_3)$成立. 设$\{\mu_n\}\subset[\frac{1}{2},1]$ 以及$\{u_n\}\subset X$ 使得$\mu_n\nearrow 1$, $I_{\mu_n}=c_{\mu_n}$ 和$I'_{\mu_n}(u_n)=0$. 于是序列$\{u_n\}$ 在X中有界.

证明:由于$(I_{\mu_n})'(u_n)=0$,于是根据引理3.3, u_n 满足如下的等式:

$$\begin{aligned}0=P_\mu(u_n)=(a+b\|\nabla u_n\|_p^{p\tau})\left(\frac{N-p}{p}\right)\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_n|^p+\frac{N}{p}\int_{\mathbb{R}^N}V(x|u_n|^p\\+\frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N}(\nabla V(x).x)|u_n|^p-\frac{N}{q}\int_{\mathbb{R}^N}|u_n|^q.\end{aligned} \tag{31}$$

由$I_{\mu_n}(u_n)=c_{\mu_n}, I'_{\mu_n}(u_n)u_n=0, P_\mu(u_n)=0$ and (H_3)得

$$\begin{aligned}c_{\mu_n}&=I_{\mu_n}-\alpha P_{\mu_n}(u_n)-\beta I'_{\mu_n}(u_n)u_n\\&=a\left(\frac{1}{p}-\frac{\alpha(N-p)}{p}-\beta\right)\|\nabla u_n\|_p^p+b\left(\frac{1}{p(\tau+1)}-\frac{\alpha(N-p)}{p}-\beta\right)\|u_n\|_p^{p\tau+1}\\&+\int_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{1}{p}-\frac{N\alpha}{p}-\beta)V(x)-\frac{\alpha}{p}(\nabla V.x)\right)|u_n|^p+\mu\left(\frac{1}{q}-\frac{N\alpha}{q}-\beta\right)\|u_n\|_q^q\\&\geq a\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p(\tau+1)}\right)\|\nabla u_n\|_p^p+(a+b\|\nabla u_n\|_p^{p\tau})\left(\frac{1}{p(\tau+1)}-\frac{\alpha(N-p)}{p}-\beta\right)\|\nabla u_n\|_p^p\\&+\left(\frac{1}{p}-\frac{\alpha(N+\lambda)}{p}-\beta\right)\int_{\mathbb{R}^N}V(x)|u_n|^p+\mu\left(\beta+\frac{N\alpha}{q}-\frac{1}{q}\right)\|u_n\|_q^q.\end{aligned} \tag{32}$$

其中$\alpha=\frac{(p(\tau+1)-q)p^*}{N(p^*-q)p(\tau+1)}, \beta=\frac{p^*-p(\tau+1)}{(p^*-q)p(\tau+1)}, \lambda\in(0,\frac{N(q-p)(p^*-p(\tau+1))}{p^*(p(\tau+1)-q)}]$.
于是简单计算得到

$$\frac{1}{p(\tau+1)}-\frac{\alpha(N-p)}{p}-\beta=0,\quad \frac{1}{p}-\frac{\alpha(N+\lambda)}{p}-\beta\geq 0,\quad \beta+\frac{N\alpha}{q}-\frac{1}{q}=0. \tag{33}$$

由(32) and (33)得

$$c_{\mu_n}\geq a(\frac{1}{p}-\frac{1}{p(\tau+1)})\|\nabla u_n\|_p^p. \tag{34}$$

这意味着∇u_n 在L^p中有界. 另一方面, 由于

$$\begin{aligned}c_{\mu_n}&=I_{\mu_n}u_n)-\frac{1}{q}I'_{\mu_n}(u_n)u_n\\&=\left(a(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})+b(\frac{1}{p(\tau+1)}-\frac{1}{q})\|\nabla u_n\|_p^p\right)\|\nabla u_n\|^{p\tau}+\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)\int_{\mathbb{R}^N}V(x)|u_n|^p.\end{aligned} \tag{35}$$

这又意味着u_n 在L^p中有界. 证毕. □

4. 非平凡解的存在性

定理1.1的证明 由引理3.4, 我们假定$\|u_n\| \leq T$,所以有

$$I(u_n) = I_{\mu_n}(u_n) + (\mu_n - 1)\|u_n\|_q^q. \tag{36}$$

因为$\mu_n \to 1$, 可证$\{u_n\}$ 在I上满足(PS) 条件. 事实上, $\{u_n\}$的有界性意味着$\{I_{\mu_n}\}$ 有界. 另外,

$$I'(u_n)v = I'_{\mu_n}(u_n)v + (\mu_n - 1)\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{q-2}u_n v, \qquad v \in X. \tag{37}$$

于是$I'(u_n) \to 0$以及$\{u_n\}$ 是一有界的(PS) 序列.根据引理2.3, 得$\{u_n\}$ 有一收敛子列. 假定$u_n \to \tilde{u}_0$. 于是$I'(\tilde{u}_0) = 0$. 根据引理2.2, 得到$I(\tilde{u}_0) = \lim\limits_{n\to\infty} I(u_n) = \lim\limits_{n\to\infty} I_{\mu_n}(u_n) \geq c > 0$，所以$\tilde{u}_0$ 是问题(1)的非平凡解. 这样我们就完成了该定理的证明. □

基金项目

江苏省高校自科面上项目(20KJD110001)。

参考文献

[1] Kirchhoff, G. (1883) Vorlesungen über Mechanik. Teubner, Leipzig.

[2] Corrêa, F.J.S.A. and Figueiredo, G.M. (2006) On a Elliptic Equation of p-Kirchhoff Type via Variational Methods. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, **74**, 263-277. https://doi.org/10.1017/S000497270003570X

[3] Corrêa, F.J.S.A. and Figueiredo, G.M. (2009) On a p-Kirchhoff Equation via Krasnoselskii's Genus. *Applied Mathematics Letters*, **22**, 819-822. https://doi.org/10.1016/j.aml.2008.06.042

[4] Liu, D. and Zhao, P. (2012) Multiple Nontrivial Solutions to a p-Kirchhoff Equation. *Nonlinear Analysis*, **75**, 5032-5038. https://doi.org/10.1016/j.na.2012.04.018

[5] Li, G. and Ye, H. (2014) Existence of Positive Ground State Solutions for the Nonlinear Kirchhoff Type Equations in $\mathbb{R}^3$. *Journal of Differential Equations*, **257**, 566-600. https://doi.org/10.1016/j.jde.2014.04.011

[6] Ikoma, N. (2015) Existence of Ground State Solutions to the Nonlinear Kirchhoff Type Equations with Potentials. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, **35**, 943-966. https://doi.org/10.3934/dcds.2015.35.943

[7] Li, Y.H., Li, F.Y. and Shi, J.P. (2012) Existence of a Positive Solution to Kirchhoff Type Problems without Compactness Conditions. *Journal of Differential Equations*, **253**, 2285-2294. https://doi.org/10.1016/j.jde.2012.05.017

[8] Jeanjean, L. (1999) On the Existence of Bounded Palais-Smale Sequence and Applications to a Landesman-Lazer-Type Set on $\mathbb{R}^N$. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A*, **129**, 787-809. https://doi.org/10.1017/S0308210500013147

[9] Willem, M. (1996) Minimax Theorem. Birkhäuser, Inc., Boston, MA.

[10] Chen, C.S. (2016) Infinitely Many Solutions to a Class of Quasilinear Schrödinger System in $\mathbb{R}^N$. *Applied Mathematics Letters*, **52**, 176-182. https://doi.org/10.1016/j.aml.2015.09.007

[11] Kuzin, I. and Pohozaev, S. (1997) Entire Solutions of Semilinear Elliptic Equations. In: Brezis, H., *et al.*, Eds., *Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications*, Vol. 33, Birkhäuser, Boston, MA.