Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2021, 10(12), 4283-4291
Published Online December 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2021.1012455

Hans汉斯

基于蒙特卡罗综合加速方法的一篮子期权定价

杨　芮[1]，**温　伟**[2]

[1]北京工商大学数学与统计学院，北京
[2]北京工商大学经济学院，北京

收稿日期：2021年11月13日；录用日期：2021年12月13日；发布日期：2021年12月20日

摘　要

本文建立了服从双指数跳扩散的多标的资产价格的随机微分方程模型，其中多标的资产具有相关性，并通过蒙特卡罗加速模拟方法研究基于双指数跳扩散模型的一篮子欧式看涨期权定价问题。在蒙特卡罗加速模拟中，本文综合应用控制变量法和对偶变量技术缩减方差，并分析了影响模拟效果的关键因素。

关键词

一篮子期权，双指数跳扩散模型，蒙特卡罗模拟，控制变量法，对偶变量技术

Basket Options Pricing Based on Monte Carlo Comprehensive Acceleration Method

Rui Yang[1], **Wei Wen**[2]

[1]School of Mathematics and Statistics, Beijing Technology and Business University, Beijing
[2]School of Economics, Beijing Technology and Business University, Beijing

Received: Nov. 13th, 2021; accepted: Dec. 13th, 2021; published: Dec. 20th, 2021

Abstract

This paper gives a model of stochastic differential equation for multi-asset options prices, which is subject to double-exponential jump-diffusion process, at the same time, the multi-standard assets are relevant. Then the Monte Carlo accelerated simulation method is used to study the pricing of

文章引用: 杨芮, 温伟. 基于蒙特卡罗综合加速方法的一篮子期权定价[J]. 应用数学进展, 2021, 10(12): 4283-4291.
DOI: 10.12677/aam.2021.1012455

European basket of call options. In the accelerated Monte Carlo simulation, this paper comprehensively applies the controlled variable method and the dual variable technique to reduce the variance, and analyzes the key factors that affect the simulation effect.

Keywords

Basket Options, Double Exponential Jump Diffusion Model, Monte Carlo Simulation, Controlled Variable Method, Dual Variable Technique

1. 引言

期权，是指赋予其购买者在规定期限内按双方约定的价格购买或出售一定数量某种资产(称为标的资产)的权利的合约，对金融领域产生了重大影响。期权价格，是期权多头为了获取未来的某种权利而支付给空方的对价，是期权交易的核心问题。在衍生品金融市场的形成发展过程中，期权的合理定价一直是困扰研究者的一大难题，也是现代金融理论的重要研究内容。

F. Black 和 M. Scholes 假设股票价格是连续的扩散过程并且服从几何布朗运动，提出了著名的 Black-Scholes 期权定价模型[1]。但由于标的资产价格的变化过程复杂，想要更加准确地刻画标的资产价格，就需要减少 Black-Scholes 模型的假设条件。R. Merton 放松了 Black-Scholes 模型中资产价格连续的假设[2]。S. G. Kou 在[2]的基础上提出了双指数跳扩散模型，假设跳跃以泊松过程到达，跳跃幅度用双指数分布刻画，即资产价格由一个连续变动的几何布朗运动和一个不连续的、跳跃幅度服从双指数分布的泊松跳过程组成[3]。

多资产期权中往往包含两个或两个以上标的资产，这就带来了多维的概念。在多维概念下，必须考虑标的资产之间的相关关系。一篮子期权是金融衍生品市场交易活跃的一种多资产期权，其回报取决于一篮子的资产价值，这种期权在现代的结构化产品中受到广泛关注。

目前，一篮子期权的定价方法主要有偏微分方程法[4] [5]、蒙特卡罗模拟法[6] [7]和特征函数法[8]。蒙特卡罗模拟法是一种基于随机数的数值模拟方法，该方法收敛的阶与问题的维数无关，这使得蒙特卡罗方法成为计算高维金融衍生产品定价问题的重要工具[9]。随着蒙特卡罗方法的发展，方差缩小技术也得到了广泛应用[10] [11]。

本文首先给出了基于双指数跳扩散的关于多标的资产价格的随机微分方程模型，其中多标的资产具有相关性，并通过蒙特卡罗加速模拟方法研究一篮子欧式看涨期权定价问题。

2. 多标的资产价格模型

假设 $S_i(t)(i=1,2,\cdots,n)$ 是第 i 个标的资产的价格，则在风险中性测度下 $S_i(t)$ 满足随机微分方程

$$\frac{\mathrm{d}S_i(t)}{S_i(t)} = r\mathrm{d}t + \sigma_i \mathrm{d}W_i(t) + \mathrm{d}\left(\sum_{j=1}^{N(t)}\left(V_{i,j}-1\right)\right) \tag{1}$$

其中 r 为无风险利率，σ_i 是波动率，$N(t)$ 是强度为 λ 的泊松过程，$V_{i,j}\left(j=1,\cdots,N(t)\right)$ 为独立同分布的非负随机变量，$W_i(t)$ 是标准布朗运动，它们之间存在相关性，即 $Cov\left(W_i(t),W_j(t)\right)=\rho_{ij}\left(i\neq j\right)$，设 $Y_i=\ln V_i$

是跳跃幅度，双指数跳扩散模型的跳跃幅度分布函数为

$$f_{Y_i}(y)=p_i\eta_{i,1}\mathrm{e}^{-\eta_{i,1}y}I_{\{y\ge 0\}}+q_i\eta_{i,2}\mathrm{e}^{-\eta_{i,2}y}I_{\{y<0\}},\eta_{i,1}>1,\eta_{i,2}>0$$

其中 $p_i>0$ 表示资产价格 $S_i(t)$ 向上跳跃的概率，$q_i>0$ 表示资产价格向下跳跃的概率，$p_i+q_i=1$。$\eta_{i,1}>1$ 是为了保证 $E(V_i)<\infty$ 和 $E(S_i(t))<\infty$，本质上是要求平均向上跳的尺度不能超过 100%，也即

$$\ln V_i=Y_i=\begin{cases}\xi_i^+,\text{概率为 } p_i,\\ \xi_i^-,\text{概率为 } q_i.\end{cases}$$

ξ_i^+,ξ_i^-，分别是均值为 $\frac{1}{\eta_{i,1}},\frac{1}{\eta_{i,2}}$ 的指数型随机变量，且

$$E(Y_i)=\frac{p_i}{\eta_{i,1}}-\frac{q_i}{\eta_{i,2}},Var(Y_i)=p_iq_i\left(\frac{1}{\eta_{i,1}}+\frac{1}{\eta_{i,2}}\right)^2+\left(\frac{p_i}{\eta_{i,1}^2}-\frac{q_i}{\eta_{i,2}^2}\right),$$

将随机微分方程(1)写成矩阵形式为

$$\begin{pmatrix}\mathrm{d}S_1(t)\\ \mathrm{d}S_2(t)\\ \vdots\\ \mathrm{d}S_n(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}rS_1(t)\\ rS_2(t)\\ \vdots\\ rS_n(t)\end{pmatrix}\mathrm{d}t+\begin{pmatrix}\sigma_1S_1(t)\mathrm{d}W_1(t)\\ \sigma_2S_2(t)\mathrm{d}W_2(t)\\ \vdots\\ \sigma_nS_n(t)\mathrm{d}W_n(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}S_1(t-)\mathrm{d}\left(\sum_{j=1}^{N(t)}(V_{1,j}-1)\right)\\ S_2(t-)\mathrm{d}\left(\sum_{j=1}^{N(t)}(V_{2,j}-1)\right)\\ \vdots\\ S_n(t-)\mathrm{d}\left(\sum_{j=1}^{N(t)}(V_{n,j}-1)\right)\end{pmatrix}\tag{2}$$

令 $W(t)=(\sigma_1W_1(t),\sigma_2W_2(t),\cdots,\sigma_nW_n(t))^{\mathrm{T}}$，可知 $W(t)$ 为多维布朗运动，其中协方差矩阵为 $Cov(W_i(t),W_j(t))=\rho_{ij}\sigma_i\sigma_j$，即 $W(t)\sim BM(0,\Sigma)$ 其中 $\Sigma_{ij}=\rho_{ij}\sigma_i\sigma_j$。

记向量

$$S(t)=\begin{pmatrix}S_1(t) & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & S_n(t)\end{pmatrix}$$

则可将线性方程组(1)改写为

$$\begin{pmatrix}\mathrm{d}S_1(t)\\ \mathrm{d}S_2(t)\\ \vdots\\ \mathrm{d}S_n(t)\end{pmatrix}=S(t)\begin{pmatrix}r\\ r\\ \vdots\\ r\end{pmatrix}\mathrm{d}t+S(t)\begin{pmatrix}\sigma_1\mathrm{d}W_1(t)\\ \sigma_2\mathrm{d}W_2(t)\\ \vdots\\ \sigma_n\mathrm{d}W_n(t)\end{pmatrix}+S(t-)\begin{pmatrix}\mathrm{d}\left(\sum_{j=1}^{N(t)}(V_{1,j}-1)\right)\\ \mathrm{d}\left(\sum_{j=1}^{N(t)}(V_{2,j}-1)\right)\\ \vdots\\ \mathrm{d}\left(\sum_{j=1}^{N(t)}(V_{n,j}-1)\right)\end{pmatrix}\tag{3}$$

由 Cholesky 分解和多维正态线性变换原则可知，存在一个下三角矩阵 A 使得 $\Sigma=AA^{\mathrm{T}}$ 及 $X(t)=(X_1(t),X_2(t),\cdots,X_n(t))^{\mathrm{T}}\sim BM(0,I_d)$，有 $W(t)=AB(t)$。两边同时微分可得

$$\begin{pmatrix}\sigma_1\mathrm{d}W_1(t)\\ \vdots\\ \sigma_n\mathrm{d}W_n(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_{11} & 0 & 0\\ \vdots & \ddots & 0\\ A_{n1} & \dots & A_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{d}X_1(t)\\ \vdots\\ \mathrm{d}X_n(t)\end{pmatrix}\tag{4}$$

将(4)代入(3)可得多标的资产价格满足的随机微分方程，表示为

$$\frac{\mathrm{d}S_i(t)}{S_i(t-)} = r\mathrm{d}t + \sum_{j=1}^{n} A_{ij}\mathrm{d}X_j(t) + \mathrm{d}\left(\sum_{j=1}^{N(t)}(V_{i,j}-1)\right)(i=1,2,\cdots,n) \tag{5}$$

其中，$X_j(t)$是相互独立的标准布朗运动，则求解随机微分方程(5)可得多标的资产的价格公式

$$S_i(t) = S_i(0)\exp\left\{\left(r-\frac{1}{2}\sigma_i^2\right)t + \sum_{j=1}^{n} A_{ij}\mathrm{d}X_j(t)\right\}\prod_{j=1}^{N(t)} V_{i,j}$$

假设由 n 个标的资产的算数平均组成的一篮子期权在到期日收益为

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i S_i(T) - K\right)^+$$

其中，$S_i(t)(i=1,2,\cdots,n)$为标的资产价格，α_i 是第 i 种资产 $S_i(T)$ 在一篮子资产中所占比例，且 $\sum\alpha_i = 1$，$\alpha_i \ge 0$，K 为行权价格。记

$$A = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i S_i(T) = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i S_i(0)\exp\left\{\left(r-\frac{1}{2}\sigma_i^2\right)t + \sum_{j=1}^{n} A_{ij}\mathrm{d}X_j(t)\right\}\prod_{j=1}^{N(t)} V_{i,j}$$

在风险中性测度下，一篮子期权价格为

$$V = \mathrm{e}^{-rT}E\left[(A-K)^+\right]$$

3. 一篮子期权定价方法

期权定价的蒙特卡罗方法的理论依据是风险中性定价原理：在风险中性测度下，期权价格能表示为其到期回报的贴现的期望值，即 $V = E^Q\left[\mathrm{e}^{-rT} f(S_1,S_2,\cdots,S_T)\right]$，其中的 E^Q 表示风险中性期望，r 为无风险利率，T 为期权的到期时刻，$f(S_1,S_2,\cdots,S_T)$ 是关于标的资产价格路径的预期收益。用蒙特卡罗方法为一篮子期权定价包含以下几个步骤：

1. 在风险中性测度下模拟标的资产的价格路径，将时间区间 $[0,T]$ 分成 n 个子区间 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T$，又由 $\mathrm{d}X_j(t) = z_j\sqrt{\mathrm{d}t}$，其中 $z_j \sim N(0,1)$，则服从双指数跳扩散过程的标的资产价格的离散形式是

$$S_i(t_{k+1}) = S_i(t_k)\exp\left\{\left(r-\frac{1}{2}\sigma_i^2\right)(t_{k+1}-t_k) + \sqrt{t_{k+1}-t_k}\sum_{j=1}^{n} A_{ij} z_{k+1,j}\right\}\prod_{j=N(t_k)+1}^{N(t_{k+1})} V_{i,j}$$

$$i = 1,\cdots,n; k = 0,1,\cdots,n-1$$

为了简化运算，另 $G(t) = \ln S(t)$，则有：

$$G_i(t_{k+1}) = G_i(t_k)\left(r-\frac{1}{2}\sigma_i^2\right)(t_{k+1}-t_k) + \sqrt{t_{k+1}-t_k}\sum_{j=1}^{n} A_{ij} z_{k+1,j}\Bigg\} + \sum_{j=N(t_k)+1}^{N(t_{k+1})} \ln V_{i,j}$$

(1) 生成在时间间隔内发生的跳跃次数 N，且 $N \sim possion(\lambda(t_{i+1}-t_i))$；

(2) 在 N 次跳跃中，生成向上跳跃次数 K 和向下跳跃次数 $N-K$，则 $K \sim Binomial(N,p)$；

(3) 生成在时间间隔内向上跳的跳跃幅度 R_1 和向下跳的跳跃幅度 R_2，有 $R_1 \sim Gamma(K,\eta_1)$ 和 $R_2 \sim Gamma(N-K,\eta_2)$，则在时间间隔内跳跃幅度为 $M = R_1 - R_2$。

(4) 模拟资产价格路径

$$G_i(t_{k+1}) = G_i(t_k)\left(r-\frac{1}{2}\sigma_i^2\right)(t_{k+1}-t_k) + \sqrt{t_{k+1}-t_k}\sum_{j=1}^{n} A_{ij} z_{k+1,j}\Bigg\} + M$$

2. 根据期权定价的无风险中性定价原则，将到期日收益贴现到当前时刻，得到第 k 次模拟的期权价格

$$V^{(k)} = \mathrm{e}^{-rT}\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i S_i(T)-K,0\right)^{+}$$

3. 重复前两步，得到大量期权回报贴现值的抽样样本

4. 求样本均值，得到一篮子期权价格的蒙特卡罗模拟值

$$V_{MC} = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{M}V^{(k)} = \mathrm{e}^{-rT}\frac{1}{M}\sum_{k=1}^{M}\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i S_i(0)\exp\left\{\left(r-\frac{1}{2}\sigma_i^2\right)T+\sqrt{T}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}z_j\right\}\prod_{j=1}^{N(T)}V_{i,j}-K\right)^{+}$$

由大数定律可知，当模拟次数 M 趋近于正无穷，估计值 V_{MC} 趋近于精确值 V。由中心极限定理可得，对于给定的 $\alpha(0<\alpha<1)$，有

$$P\left(\left|V_{CV+AV}-V\right|<\frac{\sigma_0}{\sqrt{M}}u_{\frac{\alpha}{2}}\right)=1-\alpha$$

其中 $u_{\frac{\alpha}{2}}$ 为标准正态分布的上 $\frac{\alpha}{2}$ 分位数。这表明，置信水平 $1-\alpha$ 对应的置信区间是 $V_{CV+AV}\pm\frac{\sigma_0}{\sqrt{M}}u_{\frac{\alpha}{2}}$，其误差是 $\frac{\sigma_0}{\sqrt{M}}u_{\frac{\alpha}{2}}$，误差收敛速度是 $O\left(M^{-\frac{1}{2}}\right)$。

蒙特卡罗方法的误差是由样本方差 σ_0 和模拟次数 $\sqrt{M}$ 共同决定的，其中减小模拟误差的最有效的方法就是降低模拟估计的方差。

控制变量法是在提高蒙特卡罗模拟有效性的方法中，应用最广泛的技术之一，它利用已知量的估计误差信息来降低未知量的估计误差。

令 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$ 表示一次模拟中 n 次独立重复试验的结果，为了估计 $E(Y_i)$，在每一次对 Y_i 采样时都同时计算另一个变量 X_i。假设数对 $(X_i,Y_i),i=1,2,\cdots,n$ 是独立同分布的，而且 X_i 的期望 $E(X)$ 已知。(我们用 (X,Y) 表示与每个 (X_i,Y_i) 有相同分布的随机变量的一个通用数对)之后对每个确定的 b，我们可以通过第 i 次重复试验来计算

$$Y_i(b)=Y_i-b\left(X_i-E(X)\right)$$

计算样本均值

$$\bar{Y}(b)=\bar{Y}-b\left(\bar{X}-E(X)\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i-b\left(X_i-E(X)\right)\right) \tag{6}$$

这是一个控制变量估计。观测误差 $\bar{X}-E(X)$ 在这里充当估计 $E(Y)$ 时的一个控制变量。

作为 $E(Y)$ 的一个估计量，控制变量估计(6)是无偏的，因为

$$E\left(\bar{Y}(b)\right)=E\left(\bar{Y}-b\left(\bar{X}-E(X)\right)\right)=E\left(\bar{Y}\right)=E(Y)$$

同时(6)也是一致的，因为以概率为 1 有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i(b)&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i-b\left(X_i-E(X)\right)\right)\\&=E\left(Y-b\left(X-E(X)\right)\right)=E(Y)\end{aligned}$$

每个 $Y_i(b)$ 的方差为

$$Var\left(Y_i(b)\right)=Var\left(Y_i-b\left(X_i-E(X)\right)\right)=\sigma_Y^2-2b\sigma_X\sigma_Y\rho_{XY}+b^2\sigma_X^2=\sigma^2(b) \tag{7}$$

其中，$\sigma_X^2=Var(X)$，$\sigma_Y^2=Var(Y)$，ρ_{XY} 表示 X 和 Y 的相关系数。控制变量估计 $\bar{Y}(b)$ 的方差为 $\frac{\sigma^2(b)}{n}$，通常的样本平均值 $\bar{Y}$ (对应 $b=0$)的方差为 $\frac{\sigma_Y^2}{n}$。因此，在 $b^2\sigma_X<2b\sigma_Y\rho_{XY}$ 的条件下，控制变量估计的方差要比标准估计量的小。

对(7)中的方差求最小化，就可以求出最优的系数 b^* 为

$$b^*=\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{Var(X)}$$

将这个值代入(7)并简化，得到最优化的控制估计量的方差和非控制估计量的方差的比率为

$$\frac{Var\left(\bar{Y}-b^*\left(\bar{X}-E(X)\right)\right)}{Var\left(\bar{Y}\right)}=1-\rho_{XY}^2$$

由此可见，只要 X 与 Y 的相关性越强，那么控制变量估计的方差减少越显著，所以控制变量技术的关键是选择与 Y 关系密切且期望值已知的控制变量。

由 n 个标的资产的几何平均组成的一篮子期权在到期日收益为 $(G-K)^+$，其中 $G=\prod_{i=1}^{n}S_i(T)^{\alpha_i}$。因为标的资产的几何平均和算数平均的强相关性，我们选用 $(G-K)^+$ 作为控制变量来估计 $E\left[(A-K)^+\right]$，令 $b=1$，则控制变量估计为

$$(A-K)^+-(G-K)^++E\left[(G-K)^+\right]$$

则用控制变量法得到的一篮子期权模拟价格为

$$V_{CV}=\mathrm{e}^{-rT}\frac{1}{M}\sum_{k=1}^{M}\left\{\left(A^{(k)}-K\right)^+-\left(G^{(k)}-K\right)^++E\left[(G-K)^+\right]\right\}$$

对偶变量技术是最简单和最常用的方差减少技术。对于与随机变量 X 同分布的两个随机变量 X_1 和 X_2 而言，以数学期望 $\mu=E(X)$ 的估计为例，若 X_1 和 X_2 负相关，则 $Cov(X_1,X_2)<0$。随机变量取平均后形成的随机变量 $\frac{X_1+X_2}{2}$ 满足：

$$E\left(\frac{X_1+X_2}{2}\right)=\mu$$

$$Var\left(\frac{X_1+X_2}{2}\right)=\frac{1}{4}\left[Var(X_1)+Var(X_2)+2Cov(X_1,X_2)\right]$$

对应的方差满足 $Var\left(\frac{X_1+X_2}{2}\right)\le\frac{1}{4}\left[Var(X_1)+Var(X_2)\right]$，从而达到方差缩减的目的。

标的资产价格终值抽样为

$$S_i(T)=S_i(0)\exp\left\{\left(r-\frac{1}{2}\sigma_i^2\right)T+\sqrt{T}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}z_j\right\}\prod_{j=1}^{N(T)}V_{i,j}$$

其中 z_j 为标准正态分布，则 $-z_j$ 也是标准正态分布中相互独立的抽样值，那么用 $-z_j$ 代替 z_j 得到的 $\tilde{S}_i(T)$

也是股票价格终值的抽样，从而 $\tilde{A}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\tilde{S}_i(T)$，$\tilde{G}=\prod_{i=1}^{n}\tilde{S}_i(T)^{\alpha_i}$，

$V_{CV}^{(k)}=\mathrm{e}^{-rT}\left\{\left(A^{(k)}-K\right)^{+}-\left(G^{(k)}-K\right)^{+}+E\left[(G-K)^{+}\right]\right\}$

$\tilde{V}_{CV}=\mathrm{e}^{-rT}\frac{1}{M}\sum_{k=1}^{M}\left\{\left(\tilde{A}^{(k)}-K\right)^{+}-\left(\tilde{G}^{(k)}-K\right)^{+}+E\left[(G-K)^{+}\right]\right\}$。

因此，基于控制变量法的对偶变量技术得到的一篮子期权模拟价格为

$$V_{CV}+V_{AV}=\frac{1}{M}\sum_{k=1}^{M}\frac{V_{CV}^{(k)}+\tilde{V}_{CV}^{(k)}}{2}$$

4. 数值模拟

模拟一个 3 标的欧式一篮子看涨期权，各参数如下：标的资产价格初值为 $S=[50,45,52]$，各个标的资产价格的波动率分别为 $\sigma=[0.1,0.2,0.15]$，各标的资产价格相关系数为 $\rho_{12}=0.4$，$\rho_{13}=0.3$，$\rho_{23}=0.2$，所占权重分别为 $\alpha_1=0.3$，$\alpha_2=0.5$，$\alpha_3=0.2$，期权有效期 $T=1$，行权价格为 $K=45$，无风险利率 $r=0.1$，给定离散时间点个数 $N=200$。

为比较文中一篮子期权定价方法的有效性，选用置信区间和区间大小来判断加速效果，用误差 $\frac{\sigma_0}{\sqrt{M}}u_{\frac{\alpha}{2}}$ 来判断方法的精确度。利用上文的标准蒙特卡罗模拟方法，控制变量法，基于控制变量法的对偶变量技术分别进行模拟，结果如下：

Table 1. Numerical simulation results
表 1. 数值模拟结果

模拟次数	模拟方法	模拟价格	置信区间	区间大小
500	MC	7.3456	[6.8974, 7.7937]	0.8963
	CV	7.2847	[6.9608, 7.6086]	0.6478
	CV + AV	7.3590	[7.2677, 7.4503]	0.1825
1500	MC	7.0782	[6.8341,7.3223]	0.4882
	CV	7.2896	[7.0679, 7.5113]	0.4434
	CV + AV	7.2898	[7.2424, 7.3371]	0.0946
2500	MC	7.4684	[7.2728, 7.6641]	0.3913
	CV	7.2020	[7.0265, 7.3775]	0.3510
	CV + AV	7.2615	[7.2268, 7.2961]	0.0692
3500	MC	7.2811	[7.1193, 7.4429]	0.3236
	CV	7.2405	[7.0989, 7.3821]	0.2832
	CV + AV	7.2947	[7.2639, 7.3256]	0.0616
4500	MC	7.3331	[7.1899, 7.4762]	0.2862
	CV	7.3154	[7.1819, 7.4489]	0.2670
	CV + AV	7.2949	[7.2678, 7.3220]	0.0541

注：估计区间的置信水平为 95%。

表 1 中 MC，CV，CV + AV 分别表示用标准蒙特卡罗模拟，控制标量法，基于控制变量法的对偶变量技术得到的模拟值。在模拟次数相同的条件下，采用了方差缩减技术的区间大小均小于标准蒙特卡罗模拟得到的区间大小，这说明控制变量法和基于控制变量法的对偶变量技术均对减小方差有效。但是基于控制变量法的对偶变量技术得到的区间大小明显小于控制变量法的区间大小，说明本文所提出方法对减小方差效果明显。

观察图 1 可知，随着模拟次数的增加，模拟误差整体趋势减小，但是基于控制变量法的对偶变量技术的趋势平缓，说明该方法在提高精确度方面可靠性较高。

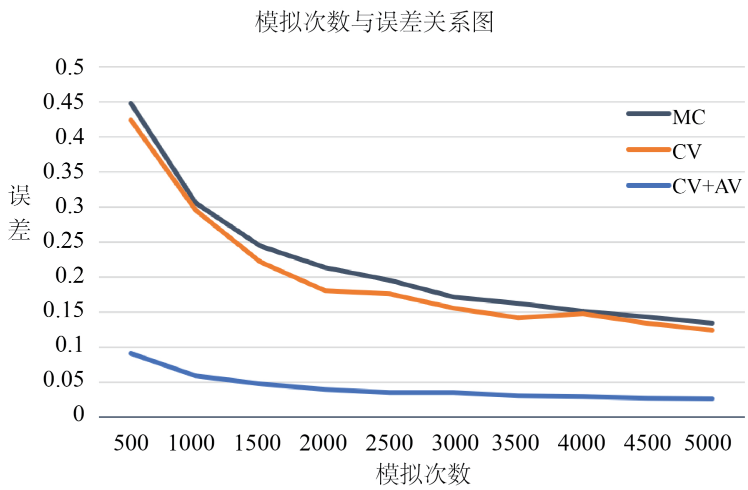

Figure 1. The relationship between the number of simulations and the error
图 1. 模拟次数与误差关系图

对于相同的模拟次数，使用基于控制变量法的对偶变量技术得到的误差明显小于标准蒙特卡罗模拟和控制变量法的误差，所以综合应用控制变量法和对偶变量技术是提高期权定价精确度的有效途径。

固定其他值，改变行权价格，观察实值期权、平值期权、虚值期权对模拟误差的影响，结果如下：

由图 2 可知，平值期权的误差最大，实值期权和虚值期权的误差更小，且误差随着期权的实值量和虚值量的增加而递减。

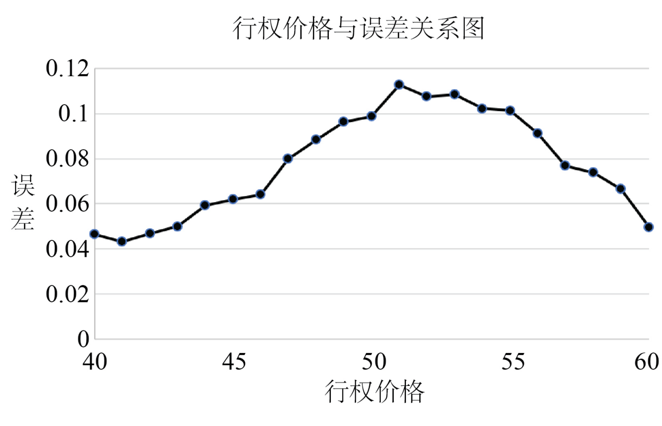

Figure 2. The relationship between the exercise price and the error
图 2. 行权价格与误差关系图

控制变量法实际上是利用数值方法计算两个具有相关性的期权之间的价格差异，而不是计算期权价格本身。虽然从计算工作量来看，需要计算两个估计值$(A-K)^{+}$和$(G-K)^{+}$，但是由于两个期权的性质相似或路径相同，实际增加的工作量并不大。在对偶变量技术中，对抽样值z_j直接取负值得到$-z_j$，也减小了运算量。如果想要模拟误差达到同一水平，基于控制变量法的对偶变量技术所需要的模拟次数明显少于其他两种方法，期权定价的模拟速度大幅度提高。所以，综合应用控制变量法和对偶变量技术是进一步提高金融衍生证券定价效率的重要途径。

参考文献

[1] Black, F. and Scholes, M. (1973) The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*, **81**, 637-664. https://doi.org/10.1086/260062

[2] Merton, R.C. (1976) Option Pricing When Underlying Stock Returns Are Discontinuous. *Journal of Financial Economics*, **3**, 125-144. https://doi.org/10.1016/0304-405X(76)90022-2

[3] Kou, S.G. (2002) A Jump-Diffusion Model for Option Pricing. *Management Science*, **48**, 955-1101. https://doi.org/10.1287/mnsc.48.8.1086.166

[4] 姜礼尚. 期权定价的数学模型和方法[M]. 北京: 高等教育出版社, 2008.

[5] Hui, C.H., Lo, C.F. and Yuen, P.H. (2000) Comment on Pricing Double Barrier Options Using Laplace Transforms by Antoon Pelsser. *Finance and Stochastics*, **4**, 105-107. https://doi.org/10.1007/s007800050006

[6] 谭键, 戴钰. 基于蒙特卡罗模拟的多标的资产期权定价研究[J]. 财经理论与实践, 2012, 33(178): 45-48.

[7] 安飒. 篮子期权定价的蒙特卡罗方法研究[J]. 中国证券期货, 2010(2): 27-30.

[8] Zhou, J. and Wang, X. (2008) Accurate Closed-Form Approximation for Pricing Asian and Basket Options. *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, **24**, 343-358. https://doi.org/10.21314/JCF.2008.178

[9] 翁泽南. 蒙特卡罗方法在三类金融衍生产品定价中的应用[D]: [硕士学位论文]. 上海: 上海师范大学, 2013.

[10] 赵丹, 徐承龙. 随机利率下条件蒙特卡罗综合加速方法及应用[J]. 同济大学学报(自然科学版), 2018, 46(12): 1754-1760.

[11] 陈辉. 期权定价的蒙特卡罗模拟方差缩减技术研究[J]. 统计与信息论坛, 2008(7): 86-96.