Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2021, 10(12), 4373-4378
Published Online December 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2021.1012465

Hans汉斯

指数多项式的研究进展

李　雪，吴秀碧

贵州大学数学与统计学院，贵州 贵阳

收稿日期：2021年11月23日；录用日期：2021年12月20日；发布日期：2021年12月27日

摘　要

二阶复线性微分方程的指数多项式完全正规解是研究复线性微分方程解的一个重要分支，也是研究复线性微分方程解的重大突破，诸如来自美国University of New Orleans的著名函数论专家Gary G. Gundersen和来自芬兰University of Eastern Finland的Janne Heittokangas教授以及国内温智涛老师等学者长期对此问题进行研究探索。现主要阐述研究背景，然后进行系统的梳理与总结，最后提出一些研究重点以及未解决的重要问题。

关键词

二阶复线性微分方程，对偶指数多项式，强对偶指数多项式

Research Summary on Exponential Polynomials

Xue Li, Xiubi Wu

College of Mathematics and Statistics, Guizhou University, Guiyang Guizhou

Received: Nov. 23rd, 2021; accepted: Dec. 20th, 2021; published: Dec. 27th, 2021

Abstract

Completely normal solution of exponential polynomials of second-order complex linear differential equations is an important branch and a major breakthrough of the study on the solution of complex linear differential equations. Scholars such as Gary G. Gunderse, a famous expert in functional theory from the University of New Orleans in the United States, Professor Janne Heittokangas from the University of Eastern Finland, and Wen Zhitao in China have been studying this problem for a long time. This paper mainly expounds the research background, then systematically combs and summarizes, and finally, puts forward some research emphases and important problems that have not been solved.

文章引用: 李雪, 吴秀碧. 指数多项式的研究进展[J]. 应用数学进展, 2021, 10(12): 4373-4378.
DOI: 10.12677/aam.2021.1012465

Keywords

Second Order Complex Linear Differential Equation, Dual Exponential Polynomia, Strongly Dual Exponential Polynomial

1. 引言

自上世纪三四十年代以来，部分学者开始研究方程

$$f''+A(z)f'+B(z)f=0 \tag{1}$$

解的问题，至今仍有学者继续研究，并且非常具有研究价值，在实数域中已经开始研究分数阶微分方程，但是在复数域研究最多的是二阶线性微分方程解的增长性，在许多学者的不断努力下，很多这一方面的问题已经得到解决，其中最为杰出的是来自美国 University of New Orleans 的著名函数论专家 Gary G. Gunderse 和来自芬兰 University of Eastern Finland 的 Janne Heittokangas 教授，国内的伍鹏程教授、温智涛老师以及他们的团队仍然在继续该方面的研究。研究形如(1)式的微分方程解的性质，主要讨论的是系数 $A(z)$ 和 $B(z)$ 的一些性质来确定解 f 的增长性，I. Amemiya 和 M. Ozawa [1]，G. Gunderse [2]几位学者都研究过这个问题。起初是研究 $A(z)$ 和 $B(z)$ 的阶数，或者固定其中一个系数研究另一个系数的性质来确定解的阶数的有限性，但是随着研究的时间推移，研究的学者变得越来越少，直至两位教授将指数多项式引入，并进行推广得到对偶指数多项式以及强对偶指数多项式，并且将解 f 与系数 $A(z)$ 通过对偶指数多项式直接联系到一起，这让问题变得简单化，不仅仅为二阶线性微分方程的研究开辟了新的天地，对 n 阶（$n\in N^*$）复线性微分方程也提供了新思路的思路，除了在线性微分方程的应用还有在零点分布中得到了应用，还在 2019 年推广了 Polya 和 Schwengeler 在 20 世纪 20 年代的一些结果，其中表明 f 的临界射线恰好是 f 的 q 阶 Borel 方向。原由 Steinmetz 引入的 $T(r,f)$ 和 $N(r,1/f)$ 渐近方程的误差项也得到了改进[3]。所以指数多项式的研究前景很广阔，可以涉及到这个方向上的各个方面。

鉴于此，将着重综述指数多项式、对偶指数多项式，强对偶指数多项式的定义以及在线性微分方程中应用的研究进展、尚未解决的具有研究价值的问题，在此基础上展望未来的研究方向和内容。

2. 发展历程

本节主要阐述指数和的背景，首先介绍指数和，指数和是一个整函数，可以写成如下形式[1]：

$$f(z)=P_0(z)\mathrm{e}^{w_0z}+\cdots+P_n(z)\mathrm{e}^{w_mz}, \tag{2}$$

其中系数 $P_j(z)$ 为多项式且满足 $P_j(z)\neq 0$，$j=1,\cdots,m$。常数 $w_j\in C$ 是两两不同的，被称为 f 的主导系数且 $w_j\neq 0$，$j=1,\cdots,m$。

在 2019 年 Janne Heittokangas 教授在论文[3]中对指数和的背景有着详细的整理，对指数和的背景简要概括如下：关于指数和的研究至少可以追溯到 1925 年，R. Nevanlinna 建立了亚纯函数的两个基本定理，开始了值分布理论的近代研究。几十年来，亚纯函数值分布理论的新发展都是以 Neva-nlinna 理论为基础。Ritt [4]在 1929 年提出：如果两个常系数指数和比值为 g 是整函数，那么 g 也是一个指数和。这一关于指

数多项式商的猜想历经近 20 年，直至 1948 年才被 Lax [5]利用一阶整函数和正规型整函数的性质将这一结果证明出来，这为后人研究指数多项式奠定了基础。随后在 1958 年著名数学家 Shapiro 提出一个重要猜想：如果两个指数和的多项式系数有无穷多公共零点，那么他们都是某个第三个指数和的倍数[6]。这一猜想被称为 Shapiro 猜想，它让人联想到代数学里面环的知识，但是目前代数学研究的都是有限维的环，以及特殊的无限维，所以要想证明这一定理还需要代数学方向上的突破，如果 Shapiro 猜想被证明，会是这一领域的一大突破。在 1931 年 Langer [7]从常系数和实可公度系数、常系数和一般实指数、系数渐进恒定、共线复指数、一般复常数等方面综述了关于指数和和积分的零点的早期发展，这对后面指数多项式的发展与应用起到了很大的作用。

Janne Heittokangas 教授和 Gary G. Gundersen 专家在 2018 年研究了具有指数多项式系数的线性微分方程，其中恰好有一个系数的增长极大于所有其他系数。主要结果表明，这类方程的非平凡指数多项式解与最高阶系数有一定的对偶关系。这是最早将对偶指数多项式的研究放在线性微分方程的应用中。Janne Heittokangas 教授和 Gary G. Gundersen 专家以及温智涛老师在 2021 年研究了具有整系数的复线性微分方程，其中一个系数是指数多项式，并控制所有其它系数的增长。如果这样的方程有指数多项式解 f，那么 f 的阶和主系数的阶相等，并且这两个函数具有一定的对偶性质。

到目前为止关于指数多项式的研究以 Janne Heittokangas 教授和 Gary G. Gundersen 专家为首的相关学者研究成果最为丰富，同时他们也研究了复动力系统。尤其是在近几年二阶复线性微分方程的解出现了瓶颈期的时候，他带领团队在指数多项式找到突破口，在 2015 年发现指数多项式的拓展——对偶指数多项式，并在 2018 年推广出强对偶指数多项式，这一发现还在任意正整数阶微分方程中得到应用于推广，这也让复线性微分方程的研究多了一份思路，为后来学者的研究打下了坚实的基础。在第三节主要阐述指数多项式以及其在二阶复线性微分方程中的应用。

3. 指数多项式

本节主要阐述指数多项式、对偶指数多项式与强对偶指数多项式的定义，说起这一方向贡献最大的人就不得不提起 Gary G. Gunderse 专家以及 Janne Heittokangas 教授，他们在[8] [9]中引入了指数多项式、对偶指数多项式与强对偶指数多项式的定义及其性质。

首先 Ronkin L.在 1992 年引入完全正规增长[10] (简称 c.r.g.)：如果一个整函数 g 是关于增长极 $\rho=\rho(g)\in(0,\infty)$ 的有限型，并且 $r^{-\rho}\log\left|g\left(re^{i\theta}\right)\right|\to h_g(\theta), r\to\infty$，在可能的零上密度异常集之外，这个集合对于每个 θ 值是相同的，那么整函数 g 是完全正规增长的。指数多项式是 c.r.g.的一个重要子类，在 2015 年 Heittokangas J.指出指数多项式的一般形式[9]，

$$f(z)=P_1(z)\mathrm{e}^{Q_1(z)}+\cdots+P_k(z)\mathrm{e}^{Q_k(z)} \tag{3}$$

其中 $P_j(z)$ 和 $Q_j(z)$ 是关于 z 的 $\max_j\left\{\deg\left(Q_j\right)\right\}=n$ 阶的多项式 $1\le j\le k$，并且这种形式的任何指数多项式都是 c.r.g.的，多项式是指数多项式的一种特殊形式。

超越指数多项式[10]：超越指数多项根据指数多项式可以写成一般形式如下：

$$f(z)=F_0(z)+F_1(z)\mathrm{e}^{w_1z^q}+\cdots+F_m(z)\mathrm{e}^{w_mz^q} \tag{4}$$

其中 f 的阶为 $q=\max\left\{\deg\left(Q_j\right)\right\}\ge 1$，$w_j$ 是非零的并且两两不同，F_i 是阶数小于等于 $q-1$ 的指数多项式，使得对于 $1\le j\le m$，$m\le k$ 有 $F_i\ne 0$.

Steinmetz 在 1978 年提出用 $W=\left\{\overline{w}_0,\overline{w}_1,\cdots,\overline{w}_m\right\}$，$W_0=W\cup\{0\}$ 表示(4)中函数 f 的共轭主导系数集，有限集 $W\subset C$ 的凸包 $co(W)$ 是有限多个包含 W 的封闭半平面的交点，因此每个封闭 $co(W)$ 要么是一个多

边形，要么当共轭主导系数 $\overline{w}_0, \overline{w}_1, \cdots, \overline{w}_m$ 共线时是一个线段。用 $C\left(co\left(W\right)\right)$ 来表示 $co\left(W\right)$ 的周长。如果 $co\left(W\right)$ 是一个线段，则 $C\left(co\left(W\right)\right)$ 等于该线段长度的两倍[11]。

定理 1 [11]：设 f 为给定(4)形式的式子，则

$$T\left(r,f\right)=C\left(co\left(W_0\right)\right)\frac{r^n}{2\pi}+o\left(r^n\right) \tag{5}$$

若 $F_0\left(z\right)\neq 0$ 时，则

$$m\left(r,\frac{1}{f}\right)=o\left(r^n\right) \tag{6}$$

如果 $F_0\left(z\right)\equiv 0$ 时，则

$$N\left(r,f\right)=C\left(co\left(W_0\right)\right)\frac{r^n}{2\pi}+o\left(r^n\right) \tag{7}$$

Steinmetz 在 1980 年[12]中提出了指数多项式商之间的关系：假设 h 是两个超越指数多项式的商，表示成

$$h\left(z\right)=f\left(z\right)/g\left(z\right) \tag{8}$$

其中 f 是如同(4)的形式，g 是一个如下的指数多项式

$$g\left(z\right)=G_0\left(z\right)+G_1\left(z\right)\mathrm{e}^{w_1 z^q}+\cdots+G_m\left(z\right)\mathrm{e}^{w_m z^q} \tag{9}$$

对于商 h，定义集合 $W_h=\left\{\overline{w}_0,\overline{w}_1,\cdots,\overline{w}_m\right\}$。$h$ 的追近函数为

$$m\left(r,h\right)=\left(C\left(co\left(W_h\right)\right)-C\left(co\left(W_g\right)\right)\right)\frac{r^q}{2\pi}+o\left(r^q\right) \tag{10}$$

如果 $g\equiv 1$ 则满足定理 1 的结论，所以 Steinmetz 是先找到了追近函数的特殊形式，进而通过指数多项式的形式推导出追近函数一般形式。

温智涛老师在 2018 年提出对偶指数多项式[13]：假设 f 是如(4)的函数形式，如果非零的共轭主导系数 $\overline{w}_1,\cdots,\overline{w}_m$ 位于一条特定的射线 $\arg\left(z\right)=\theta$ 上，那么 f 被称为简单的指数多项式。设 g 是另一个简单的指数多项式且 $\rho\left(g\right)=\rho\left(f\right)$，若 g 的非零主导系数都位于相反的射线 $\arg\left(z\right)=\theta+\pi$ 上，也就是说 f 与 g 的主导系数分别位于两条相反的射线上，则称 f 与 g 为对偶指数多项式。如果这样 f' 与 g 的积的阶就会小于 q，这样对研究二阶复线性微分方程打开了一个新的突破口。

Heittokangas 在 2021 年发现强对偶指数多项式[8]，强对偶指数多项式一定是对偶指数多项式，对偶指数多项式不一定是强对偶指数多项式，强对偶指数多项式是指：假设 f 与 g 分别是可公度频率为 $\left\{w_j\right\}\left(j>0\right)$ 和 $\left\{\lambda_j\right\}\left(j>0\right)$ 的对偶指数多项式，他们拥有相同的公共因子 w，但是符号相反。如果 $w_j+\lambda_j$ 在一条包括原点在内的射线上，其中 $i,j>0$。则 f 与 g 为强对偶指数多项式。

综上可以观察到：对偶指数多项式就是在对偶指数多项式得基础上加了一定的条件，并且引入了新的概念，这样使定义更加完整，使用起来更加方便。在对偶中强意味着 $f\left(z\right)-F_0\left(z\right)$ 和 $g\left(z\right)-G_0\left(z\right)$ 的乘积再次成为一个可公度的指数多项式，其中 w 或-w 是一个公共因子，在 $F_0\left(z\right)$ 和 $G_0\left(z\right)$ 都为常数的情况下，导数 $f^{(k)}\left(z\right)$ 和 $g^{(l)}\left(z\right)$，$k,l\in N$ 的每个乘积是一个可公度的指数多项式，其公因数与 $f\left(z\right)-F_0\left(z\right)$ 和 $g\left(z\right)-G_0\left(z\right)$ 的乘积具有相同的公因子。

4. 在二阶复线性微分方程中的应用

Heittokangas 与 I. Laine，K. Tohge 在 2021 年[8]中针对对偶指数多项式在二阶复线性微分方程中的应

用做出了最新的重要结论，其实在 2015 年 Heittokangas 教授就提出[9]指数多项式解在二阶复线性微分方程作为解并不罕见，此后他继续深入研究，在 2021 年对自己之前在 2018 年得出的结论[9]做出调整，主要有以下两个结果：

定理 2 [8]：假设 f 与 $A(z)$ 是(1)中的超越指数多项式，$B(z)$ 是满足 $T(r,B)=o(T(r,A))$ 的整函数，则 f 与 $A(z)$ 是 $q\in N$ 阶的对偶指数多项式，f 可标准化表示为 $f(z)=c+F_1(z)e^{w_1z^q}+\cdots+F_m(z)e^{w_mz^q}$，其中 $m\in N, c\in C\setminus\{0\}$，$B(z)$ 是阶数小于等于 $q-1$ 的指数多项式。

这个定理是在他之前的论文[9]中得到的结论上进行的改进，主要是对 $B(z)$ 作了较弱的假设，但是得到了更强的结果，可以看出学者的不断探索与创新的精神，使自己的结果越来越好，越来越完善，为后面的学者铺路搭桥。

定理 3 [8]：假设 $f(z)=F_0(z)+F_1(z)e^{wz^q}$ 是(1)的一个解，其中 $A(z)$ 是一个指数多项式，$B(z)$ 是一个整函数并且满足 $T(r,B)=o(T(r,A))$。则 $q=1$ 常数 $c,b\in C\setminus\{0\}$ 和一个非零多项式 $P(z)$ 使得：

$$f(z)=c+be^{wz},\ A(z)=\frac{b}{z}P(z)-w+P(z)e^{-wz},\ B(z)=-\frac{wb}{c}P(z). \tag{11}$$

这里的解 f 是(4)的特殊形式，阶数 q 为 1 的超越指数多项式，并且与 $A(z)$ 是对偶指数多项式，定理 3 与定理 2 是有联系的，定理 3 中的 f，$A(z)$，$B(z)$ 满足定理一中的条件，是定理 2 的一种特殊形式。其实指数多项式的应用不仅在二阶复线性微分方程中，还有无穷阶的应用，以及零点分布中的应用还有微分方程的解的渐进式的研究也有很多。

5. 展望

指数多项式的研究任重而道远，运用非常之广泛，目前已经取得许多进展。迄今为止还有很多问题没有解决，需要我们深入研究，比如在 2021 年 Heittokangas 教授在最新的文章中提出的两个未解决的问题：

问题 1 [8]在定理 2 的假设下，阶数 $q=1$，$B(z)$ 为多项式，是否总是对的？

问题 2 [8]如果解的主导系数是 q 阶对偶指数多项式，那么所讨论的微分方程至少是 $q+1$ 阶的吗？

除了以上两个问题，还有现在一直在研究的二阶复线性微分方程解的增长性的问题，对于这一类问题的研究，学者们已经进行了很长一段时间的探索，其中最为出名的是 GOP-problem，虽然该问题已经有一部分被解决，但是还有很多思路值得后人去探索。希望在世界各国学者的努力下终有一天可以解决所有问题，为基础数学添砖加瓦。

致　谢

作者非常感谢相关文献对本文的启发以及审稿专家提出的宝贵意见。

基金项目

本文获得贵州大学人才引进基金(N0201918)资助。

参考文献

[1] Amemiya, I. and Ozawa, M. (1981) Non-Existence of Finite Order Solutions of w″ + e -zw′ + Q(z)w = 0. *Hokkaido Mathematical Journal*, **10**, 1-17.

[2] Gundersen, G.G. (1986) On the Question of Whether f″+ e −zf′ + B(z)f = 0 Can Admit a Solution f ≢ 0 of Finite Order. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A*: *Mathematics*, **102**, 9-17. https://doi.org/10.1017/S0308210500014451

[3] Heittokangas, J.M. and Wen, Z.T. (2020) Generalization of Pólya's Zero Distribution Theory for Exponential Polyno-

mials, and Sharp Results for Asymptotic Growth. *Computational Methods and Function Theory*, **21**, 245-270. https://doi.org/10.1007/s40315-020-00336-7

[4] Ritt, J.F. (1929) On the Zeros of Exponential Polynomials. *Transactions of the American Mathematical Society*, **31**, 680-686. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1929-1501506-6

[5] Lax, D.P. (1948) The Quotient of Exponential Polynomials. *Duke Mathematical Journal*, **15**, 967-970. https://doi.org/10.1215/S0012-7094-48-01586-5

[6] Shapiro, H.S. (1958) The Expansion of Mean-Periodic Functions in Series of Exponentials. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **11**, 1-21. https://doi.org/10.1002/cpa.3160110102

[7] Langer, R.E. (1931) On the Zeros of Exponential Sums and Integrals. *Bulletin of the American Mathematical Society*, **37**, 213-239. https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1931-05133-8

[8] Heittokangas, J., Ishizaki, K., Tohge, K., *et al.* (2021) Dual Exponential Polynomials and a Problem of Ozawa. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A*: *Mathematics*, 1-19. https://doi.org/10.1017/prm.2021.29

[9] Heittokangas, J., Laine, I., Tohge, K. and Wen, Z.-T. (2015) Completely Regular Growth Solutions of Second Order Complex Linear Differential Equations. *Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ Mathematica*, **40**, 985-1003. https://doi.org/10.5186/aasfm.2015.4057

[10] Ronkin, L.I. (1992) Functions of Completely Regular Growth. Functions of Completely Regular Growth.

[11] Steinmetz, N. (1978) Zur Wertverteilung von Exponentialpolynomen. *Manuscripta Mathematica*, **26**, 155-167. https://doi.org/10.1007/BF01167971

[12] Steinmetz, N. (1980) Zur Wertverteilung der Quotienten von Exponentialpolynomen. *Archiv der Mathematik*, **35**, 461-470. https://doi.org/10.1007/BF01235370

[13] Wen, Z.T., Gundersen, G.G. and Heittokangas, J. (2018) Dual Exponential Polynomials and Linear Differential Equations. *Journal of Differential Equations*, **264**, 98-114. https://doi.org/10.1016/j.jde.2017.09.003