

超立方体线图的谱相关性质的研究

侯胜哲*, 边红#

新疆师范大学数学科学学院, 新疆 乌鲁木齐

收稿日期: 2021年11月23日; 录用日期: 2021年12月21日; 发布日期: 2021年12月28日

摘要

超立方体 Q_n 及其变体作为许多大型处理机系统的一种常用网络拓扑结构, 是迄今为止最为重要和最具吸引力的网络拓扑结构之一。一个简单图 G 的线图 $line(G)$ 是以图 G 的边集作为其顶点集, 两个顶点之间有一条边当且仅当这两个点对应的边在原图 G 中是相邻的。1993年张福基等人利用超立方体的邻接多项式给出了超立方体的线图的邻接多项式的具体表达式。时隔近30年, 随着图论的发展和兴起衍生出很多新的工具, 本文从图的无符号拉普拉斯矩阵与其线图的邻接矩阵关系的角度出发, 进一步研究超立方体的线图的一些性质, 如: 更为简化的超立方体线图的邻接多项式、邻接谱、生成树的个数以及超立方体线图的二部图的判定等。

关键词

超立方体, 线图, 特征多项式, 二部图, 谱半径

Research on the Properties of Spectrum on the Line Graph of Hypercube

Shengzhe Hou*, Hong Bian#

School of Mathematical Sciences, Xinjiang Normal University, Urumqi Xinjiang

Received: Nov. 23rd, 2021; accepted: Dec. 21st, 2021; published: Dec. 28th, 2021

Abstract

The hypercube Q_n coupled with their variants is used to construct various common network topology models for many large processor systems, hypercube network is one of the most essential and inviting network topological structures today. The line graph $line(G)$ of simple graph G is a

*第一作者。

#通讯作者。

graph with vertex set $E(G)$ and there is an edge between two vertices if and only if the edges corresponding to these two points are adjacent in graph G . In 1993 Zhang Fuji *et al.* gave the specific adjacent polynomial of the line graph of the hypercube. After nearly 30 years, with the development of graph theory, a series of new tools are derived. In this paper, starting from the perspective of the relation of the unsigned Laplacian matrix of the graph and its adjacency matrix of the line graph, we further study some properties of the line graph of the hypercube, such as the more simplified adjacency polynomial, the number of spanning trees, and the determination of the bipartite graph of the line graph of hypercube.

Keywords

Hypercube, Line Graph, Characteristic Polynomial, Bipartite Graph, Spectral Radius

Copyright © 2021 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 序言

1993年11月张福基和林国宁在《超立方体的线图》[1]一文中探讨了超立方体线图的邻接多项式, 利用超立方体的邻接特征多项式, 分奇数和偶数两种情形, 给出了超立方体线图的邻接多项式的表达式为:

$$A(\text{line}(Q_n), x) = \begin{cases} (x+2)^{2^{i-1}(i-2)} \prod_{j=0}^{\frac{i-1}{2}} \left((x+2-i)^2 - (i-2j)^2 \right)^{C_i^j}, & \text{当 } i \text{ 为奇数;} \\ (x+2)^{2^{i-1}(i-2)} (x+2-i)^{C_i^{\frac{i}{2}}} \prod_{j=0}^{\frac{i}{2}-1} \left((x+2-i)^2 - (i-2j)^2 \right)^{C_i^j}, & \text{当 } i \text{ 为偶数.} \end{cases}$$

本文将采用新的工具导出新的表达式。

对于超立方体线图的研究, 国内外文献还比较少, 其中比较突出的有 Mirafzal [2]证明了如果 $k \geq 3$ 和 $n \neq 2k+1$, 则除 $k=3, n=9$ 和 $k=3, n=33$ 的情况外, $Q_n(k, k+1)$ 的线图是顶点传递的非 Cayley 图, 其中 $Q_n(k, k+1)$ 表示 Q_n 由层 L_k 和 L_{k+1} 诱导的子图。孟吉翔等人[3], 对超立方体的线图的限制性点连通度进行了研究, 得到 $\kappa^1(\text{line}(Q_k)) = 3n-4$, $\kappa^2(\text{line}(Q_k)) = 3n-4$, 其中 $\kappa^1(G), \kappa^2(G)$ 表示图 G 的 κ^1, κ^2 限制性点连通度。

Cheng 等[4]给出了超立方体的线图中包含 $2n-2$ 个节点的独立生成数的 $O(N)$ 时间算法, 其中 $N = n \times 2^{n-1}$, 同时证明了 $\text{line}(Q_n)$ 可以划分成 2^{n-1} 个完全子图。本文力图从拉普拉斯谱出发, 探讨更为简化的超立方体线图的邻接多项式、邻接谱, 从而推导出更为方便的生成树的个数表达式以及更简单的超立方体线图的二部图的判定求证方法。

2. 定义与符号

n 维超立方体 Q_n 通常有两种不同的定义方式, 一种是利用图的笛卡尔积运算给出的递归定义:

定义 1 [2]: n 维超立方体 $Q_n (n \geq 1)$ 的递归定义。

$$\begin{cases} Q_1 = K_2, \\ Q_n = Q_{n-1} \times K_2, \quad n > 1. \end{cases}$$

另外一种是利用二进制序列给出的定义[2]: n 维超立方体 $Q_n (n \geq 1)$ 是 2^n 阶的简单无向图, 其中:

$$V(Q_n) = \{x_1 x_2 \cdots x_n \mid x_i \in \{0, 1\}, i = 1, 2, \dots, n\}$$

任意 $x, y \in V(Q_n)$ 且 $x = x_1 x_2 \cdots x_n$ 与 $y = y_1 y_2 \cdots y_n$, x 与 y 相邻当且仅当 n 位二进制序列 $x_1 x_2 \cdots x_n$ 与 $y_1 y_2 \cdots y_n$ 恰相差一位, 即 $\sum_{i=1}^n |x_i - y_i| = 1$ 。

令 $G = (V, E)$ 是一个简单图, 图 G 的邻接矩阵用 $A(G)$ 表示; 图 G 的拉普拉斯矩阵定义为: $L(G) = D(G) - A(G)$, 其中 $D(G)$ 为图 G 的度对角矩阵, 即对角线上的元素为图中点对应的度; 无符号拉普拉斯矩阵定义为: $Q(G) = D(G) + A(G)$; 图 G 邻接矩阵、拉普拉斯矩阵、无符号拉普拉斯矩阵对应的特征多项式为 $A(G, x)$ 、 $L(G, x)$ 、 $Q(G, x)$ 。矩阵 X 的特征值是指其特征多项式的根, 矩阵 X 的谱(简称 X -谱)是指它的所有特征值连同其重数构成的重集, 记为:

$$\text{Spec}X = \begin{bmatrix} \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_s \\ x(\rho_1) & x(\rho_2) & \cdots & x(\rho_s) \end{bmatrix}$$

其中 $x(\rho_i)$ 表示特征值 ρ_i 的重数, $i \in N^*$, 共 n 个不同的根, $n \in N^*$, 邻接矩阵谱的特征值用 λ_i 表示, 无符号拉普拉斯矩阵的谱的特征值用 q_i 表示, 谱半径是指其特征值绝对值集合的上确界。图的邻接矩阵的特征值、谱、特征多项式简称图的特征值、谱、多项式。图 G 的线图 $\text{line}(G)$ 的顶点集为图 G 的边集, 两个顶点在线图中相邻当且仅当其对应的两条边在图 G 中是相邻的。用 C_n^r 表示从 n 个不同的数中任取 r 个数的组合数; C_n 代表 n 长圈。特别地, 本文为简单起见直接用 V 代表图的顶点的个数, E 代表图的边的个数。

3. 超立方体的线图的性质

根据 n 维超立方体 Q_n 的结构, 文献[5]得出其邻接矩阵具有如下明确的递推关系:

引理 1 [5]: 一般地, n 维超立方体 $Q_n (n \geq 1)$ 的邻接矩阵为 $A(Q_n) = \begin{pmatrix} A(Q_{n-1}) & I \\ I & A(Q_{n-1}) \end{pmatrix}$, 这里 I 为 2^{n-1}

阶单位矩阵。

引理 2 [6]: 二部图的无符号拉普拉斯矩阵的特征多项式等于其拉普拉斯矩阵的特征多项式, 即 $L_{\text{二部图}}(x) = Q_{\text{二部图}}(x)$ 。

引理 3 [7]: n 维超立方体 $Q_n (n \geq 1)$ 是二部图。

由引理 2 和引理 3 可知, n 维超立方体的拉普拉斯矩阵的特征多项式和无符号拉普拉斯矩阵的特征多项式相同, 故有如下结论:

定理 1: 设 n 维超立方体 $Q_n (n \geq 1)$ 的拉普拉斯矩阵为 $L(Q_n)$, 无符号拉普拉斯矩阵为 $Q(Q_n)$, 则 $L(Q_n) = Q(Q_n)$, 即 $L(Q_n)$ 与 $Q(Q_n)$ 有相同的谱。

殷剑宏等人利用超立方体的邻接矩阵的递推关系给出了如下超立方体的拉普拉斯谱:

引理 4 [8]: 设 n 维超立方体 $Q_n (n \geq 1)$ 的拉普拉斯矩阵为 $L(Q_n) = D(Q_n) - A(Q_n)$, 则 Q_n 的拉普拉斯谱为 $\text{Spec}L(Q_n) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & \cdots & 2n \\ C_n^0 & C_n^1 & C_n^2 & \cdots & C_n^n \end{pmatrix}$, 其中 $2t$ ($t = 0, 1, 2, \dots, n$) 为 $L(Q_n)$ 的 $n+1$ 个不同的特征根, 且其重数为二项式系数 C_n^t 。

由超立方体的定义易知, 超立方体的顶点数和边数分别为: $|V(Q_n)| = 2^n$, $|E(Q_n)| = 2^{n-1} \times n$ 。而超立方体是一个正则度为 $k = n$ 的正则图, 其边数也可以表示为 $E(Q_n) = \frac{k \times 2^n}{2}$, 其中 k 是超立方体的正则度。

由线图的定义可知, 超立方体的线图也是正则度为 $k_l = 2(n-1)$ 的正则图, 且超立方体的线图的点数和边数分别为 $V(\text{line}(Q_k)) = 2^{n-1} \times n$, $E(\text{line}(Q_k)) = (n-1)(2^{n-1} \times n)$ 。

令 M 是图 G 的关联矩阵, 则 $Q = MM^T$ [7], 且 $A(\text{line}(G)) + 2I = M^T M$ [6]。而 MM^T 和 $M^T M$ 有相同的非零特征值, 所以直接可以得到如下结论:

引理 5 [8]: $X(G, x)$ 表示关于连通图 G 的 X 矩阵的特征多项式, 变量为 x , $E \geq V$, 则:

$$A(\text{line}(G), x) = (x+2)^{E-V} Q(G, x+2).$$

定理 2: $\text{Spec}A(\text{line}(Q_n)) = \left(\begin{matrix} -2 & 0 & 2 & \cdots & 2n-2 & -2 \\ C_n^0 & C_n^1 & C_n^2 & \cdots & C_n^n & E-V \end{matrix} \right)$, 其中 $V = |V(Q_n)| = 2^n$,

$$E = |E(Q_n)| = 2^{n-1} \times n.$$

证明: 由引理 5 可知 $A(\text{line}(G), x) = (x+2)^{E-V} Q(G, x+2)$, 若 G 的 Q -特征值为: $q_1 \geq q_2 \geq \cdots \geq q_n$, 则 $q_1 - 2, q_2 - 2, \dots, q_n - 2$, $E - V$ 个 (-2) 是图 G 的线图 $\text{line}(G)$ 的邻接特征值。由定理 1 可知,

$$\text{Spec}Q(Q_n) = \left(\begin{matrix} 0 & 2 & 4 & \cdots & 2n \\ C_n^0 & C_n^1 & C_n^2 & \cdots & C_n^n \end{matrix} \right),$$
 且根据 $V(Q_n) = 2^n$, $E(Q_n) = 2^{n-1} \times n$ 可以得到该结论。

例 1: 实验验证 $\text{line}(Q_3)$ 的谱符合定理 2。

解: 如图 1 所示, 可以得出超立方体的线图的邻接矩阵如下:

$$A(\text{line}(Q_3)) = \begin{matrix} & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 & u_7 & u_8 & u_9 & u_{10} & u_{11} & u_{12} \\ \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \\ u_9 \\ u_{10} \\ u_{11} \\ u_{12} \end{matrix} & \left(\begin{array}{cccccccccccc} & 1 & 1 & & & & & 1 & 1 & & & & \\ 1 & & 1 & & & & & & & 1 & 1 & & \\ 1 & 1 & & 1 & 1 & & & & & & & & \\ & & 1 & 1 & & & & & & & 1 & 1 & \\ u_5 & & & 1 & 1 & & 1 & 1 & & & & & \\ u_6 & & & & & 1 & 1 & & & & & 1 & 1 \\ 1 & & & & & & 1 & 1 & & 1 & & & \\ u_8 & 1 & & & & & & & 1 & & 1 & & 1 \\ u_9 & & 1 & & & & & & & 1 & & 1 & 1 \\ u_{10} & & & 1 & 1 & & & & & & 1 & & 1 \\ u_{11} & & & & & 1 & 1 & & & & & 1 & 1 \\ u_{12} & & & & & & & 1 & 1 & 1 & & & 1 \end{array} \right) \end{matrix}$$

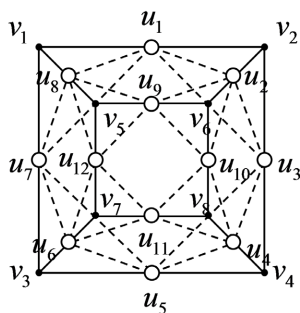


Figure 1. The solid line is the plane graph of Q_3 and the dotted line is the line graph of Q_3 $\text{line}(Q_3)$

图 1. 实线为 Q_3 的平面图, 虚线为 Q_3 的线图 $\text{line}(Q_3)$

经 Matlab 计算得 $\text{Spec}A(\text{line}(Q_3)) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ 。而根据定理 2 的结论可得:

$$\text{Spec}A(\text{line}(Q_3)) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 & 4 & -2 \\ C_3^0 & C_3^1 & C_3^2 & C_3^3 & 12-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

定理 3: 超立方体线图 $\text{line}(Q_n)$ 的邻接矩阵的特征多项式为:

$$A(\text{line}(Q_n), x) = [x - (-2)]^{C_n^0} [x]^{C_n^1} [x-2]^{C_n^2} \cdots [x - (2n-2)]^{C_n^{n-1}} [x+2]^{2^{n-1}(n-2)}.$$

证明: 根据定理 2 及矩阵特征多项式的定义可得:

$$\begin{aligned} A(\text{line}(Q_n), x) &= [x - (-2)]^{C_n^0} [x]^{C_n^1} [x-2]^{C_n^2} \cdots [x - (2n-2)]^{C_n^{n-1}} [x+2]^{2^{n-1} \times n - 2^n} \\ &= [x - (-2)]^{C_n^0} [x]^{C_n^1} [x-2]^{C_n^2} \cdots [x - (2n-2)]^{C_n^{n-1}} [x+2]^{2^{n-1}(n-2)} \end{aligned}$$

显然, 定理 3 利用超立方体的线图的谱给出的邻接矩阵的特征多项式的表达式比文献[1]给出的超立方体的线图的邻接矩阵的特征多项式的表达式要更为简洁。

袁西英等人根据图 G 的最大度 $\Delta(G)$, 给出了图 G 的谱半径的上、下界:

引理 6 [9]: 对任意一个简单图 G , 我们有 $\sqrt{\Delta(G)} \leq \rho(G) \leq \Delta(G)$ 。

因为在超立方体的线图中, $\Delta(\text{line}(Q_n)) = k_l = 2n-2$, $\rho(\text{line}(G)) = 2n-2$ 。显然超立方体的线图的谱半径是达到其上界的一类极图。

引理 7 [1]: 若 G 为 k 度正则图, 其谱为: $\text{Spec}A(G) = \begin{pmatrix} k & \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_{s-1} \\ 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_{s-1} \end{pmatrix}$, $s \in N^*$ 。则其生成树

的个数为: $t(G) = \frac{1}{|V(G)|} \prod_{i=1}^{s-1} (k - \lambda_i)^{x_i}$ 。

定理 4: $\text{line}(Q_n)$ 是度为 k_l 正则图, 其谱为:

$\text{Spec}A(\text{line}(Q_n)) = \begin{pmatrix} k_l = 2(n-1) & -2 & 0 & 2 & \cdots & 2n-4 & -2 \\ 1 = C_n^n & C_n^0 & C_n^1 & C_n^2 & \cdots & C_n^{n-1} & E-V \end{pmatrix}$, 则其生成树的个数为:

$$t(\text{line}(Q_n)) = \frac{1}{2^{n-1}n} \prod_{i=0}^{n-1} (2n-2i)^{C_n^{i-1}} \times (2n)^{2^{n-1}n-2^n}.$$

证明: 由引理 7 可知,

$$\begin{aligned} t(\text{line}(Q_n)) &= \frac{1}{2^{n-1} \times n} \prod_{i=0}^{s-1} [[2(n-1)] - \lambda_i]^{x_i} \\ &= \frac{1}{2^{n-1} \times n} \prod_{i=0}^{n-1} [[2(n-1)] - (2i-2)]^{C_n^{i-1}} \times [[2(n-1)] - (-2)]^{E-V} \\ &= \frac{1}{2^{n-1}n} \prod_{i=0}^{n-1} (2n-2i)^{C_n^{i-1}} \times (2n)^{2^{n-1}n-2^n} \end{aligned}$$

例 2: 验证 $G = \text{line}(Q_2)$ 符合定理 4 的结论。

$$t(G) = \frac{1}{2^{2-1} \times 2} \prod_{i=0}^{2-1} (2n-2i)^{C_n^{i-1}} \times (2n)^{2^{2-1} \times 2 - 2^2} = \frac{1}{2 \times 2} \times (2 \times 2)^{C_2^1} \times (2 \times 2 - 2 \times 2)^{C_2^2} \times (2 \times 2)^{2 \times 2 - 2^2} = 4, \text{ 由生成树}$$

的定义, 易知 $\text{line}(G)$ 的生成树的个数为 4。

引理 8 [10]: 设简单图 G 的特征多项式为

$$A(G, x) = x^V + c_1 x^{V-1} + c_2 x^{V-2} + \cdots + c_V x^{V-V}.$$

则(1) $c_1 = 0$; (2) $c_2 = -E$; (3) $-c_3$ 为 G 中三角形的个数的两倍, 其中 V 代表图 G 的顶点数。

显然二部图不含奇圈, 而我们知道超立方体是二部图, 但是其线图不一定是二部图。由引理 8 可知, 根据超立方体的线图的特征多项式中的系数 $-c_3$ 可以来判断超立方体的线图是否是二部图。如果 $n = 1$, Q_1 为一个点, 不讨论是否为二部图。如果 $n = 2$, $A(\text{line}(Q_2), x) = [x - (-2)][x]^{C_2^1} = (x + 2)x^2$, 其 $-c_3 = 0$ 无三角形, 且根据定义知 $\text{line}(Q_2) = C_4$ 自然为二部图。

定理 5: 超立方体的线图 $\text{line}(Q_n), n = 3, 4$ 不是二部图。

证明: 由定理 3 可知 $A(\text{line}(Q_n), x) = [x - (-2)]^{C_n^0} [x]^{C_n^1} [x - 2]^{C_n^2} \cdots [x - (2n - 2)]^{C_n^{n-1}} [x + 2]^{2^{n-1}(n-2)}$ 。

如果 $n = 3$:

$$A(\text{line}(Q_3), x) = [x - (-2)][x]^{C_3^1} [x - 2]^{C_3^2} [x - 4]^{C_3^3} [x + 2]^2 = (x + 2)x^3(x - 2)^3(x - 4)(x + 2)^4$$

$$= x^{12} - 24x^{10} - 16x^9 + 192x^8 + 192x^7 - 640x^6 - 768x^5 + 768x^4 + 1024x^3$$

只需看 $x^{V-3} = x^{12-3} = x^9$ 的系数, $-c_3 = 16$, 即有 8 个三角形, 如图 1 中虚线所示, 可以看出包含每个顶点 v_1, v_2, \dots, v_8 都有 1 个三角形, 共 8 个三角形, 根据二部图无奇圈得知 Q_3 非二部图。

如果 $n = 4$:

$$A(\text{line}(Q_4), x) = [x - (-2)]^{C_4^0} [x]^{C_4^1} [x - 2]^{C_4^2} [x - 4]^{C_4^3} [x - 6]^{C_4^4} [x + 2]^{2^{4-1} \times (4-2)}$$

$$= (x + 2)x^4(x - 2)^6(x - 4)^4(x - 6)(x + 2)^{16}$$

$$= x^{32} - 96x^{30} - 128x^{29} + 3936x^{28} + \cdots + (-55834574848x^5 - 12884901888x^4)$$

对于连通图 G , 只需看 $x^{V-3} = x^{32-3} = x^{29}$ 的系数, $-c_3 = 128$, 即有 64 个三角形。故其也不是二部图。

定理 5 的方法, 虽然思想简单, 但是当 n 很大, 难以判断。对于比较大的 n , 可以根据下面的二部图的邻接特征值的性质来判断 $\text{line}(Q_n)$ 是否是二部图。

引理 9 [8]: 1) 一个图 G 是二部图当且仅当对于 G 的每个特征值 λ , 则 $-\lambda$ 也是一个特征值且其重数是一样的, 即图 G 的谱是对称的。

2) 一个连通图 G 是二部图, ρ 为其最大特征值当且仅当 $-\rho$ 也是 G 一个特征值。

定理 6: 超立方体的线图 $\text{line}(Q_n), n \geq 3$ 不是二部图。

证明: 根据上述引理 9(1)可以发现 $\text{line}(Q_2)$ 是二部图, 这是因为 $\text{Spec}A(\text{line}(Q_2)) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 是对称的。但是 $\text{line}(Q_3), \text{line}(Q_4), \dots$ 以及 $\text{line}(Q_n)$, 根据 $\text{spec}A(\text{line}(Q_n)) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 & \cdots & 2n-2 & -2 \\ C_n^0 & C_n^1 & C_n^2 & \cdots & C_n^n & E-V \end{pmatrix}$, 它们的谱都不是对称的, 故结论成立。

这个问题如果直接用图论的方法判断很难, 可见本篇文章所求的超立方体的线图的谱形式的优越性和图谱理论的妙处。

定理 7: Δ 为 G 的特征值 $\Leftrightarrow G$ 为正则图, 若 Δ 为 G 的特征值, 则重数 $x(\Delta) = 1$ 。

证明: 显然 G 为正则图 $\Leftrightarrow AE = \Delta E \Leftrightarrow \Delta$ 为 G 的特征值。

例如 $A(Q_2)$ 为正则图, 有 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 。而从中可以看出其对应的特征向量只可能为 $E_{1 \times V}$,

$\therefore x(\Delta) = 1$ 。该定理虽然在文献 [7] 未明确给出, 但在其叙述中可以体现此证明思想。通过超立方体的线图也可以验证该结论, 因为我们总有 $\Delta = k_j = 2n - 2$ 对应的重数为 $C_n^n = 1$ 。

基金项目

国家自然科学基金项目(11761070, 61662079); 新疆师范大学 2020 年数学与应用数学校级一流专业、一流课程专项经费; 新疆维吾尔自治区自然科学基金联合项目(2021D01C078)。

参考文献

- [1] 张福基, 林国宁. 超立方体图的线图[J]. 新疆大学学报(自然科学版), 1993(4): 1-4+10.
- [2] Mirafzal, S.M. (2021) Cayley Properties of the Line Graphs Induced by Consecutive Layers of the Hypercube. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, **44**, 1309-1326. <https://doi.org/10.1007/s40840-020-01009-3>
- [3] 林辉球, 孟吉翔, 田应智. 立方体的线图的限制性连通度(英文) [J]. 新疆大学学报(自然科学版), 2010, 27(1): 23-26.
- [4] Cheng, B., Fan, J. and Lin, C.K. (2019) Constructing Node-Independent Spanning Trees on the Line Graph of the Hypercube by an Independent Forest Scheme. *Journal of Parallel and Distributed Computing*, **134**, 104-115. <https://doi.org/10.1016/j.jpdc.2019.08.006>
- [5] 殷剑宏, 金菊良, 编著. 离散数学[M]. 北京: 机械工业出版社, 2013.
- [6] 程霄. 关于图的拟拉普拉斯矩阵特征值的研究[D]: [硕士学位论文]. 成都: 电子科技大学, 2012.
- [7] Bondy, B.A. and Murty, U. (2008) *Graph Theory*. Springer, London. <https://doi.org/10.1007/978-1-84628-970-5>
- [8] Brouwer, A.E. and Willem, H. (2012) *Spectra of Graphs*. Springer, New York. <https://doi.org/10.1007/978-1-4614-1939-6>
- [9] Stevanovic, D. 图的谱半径[M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2016.
- [10] 袁西英, 邵嘉裕, 著. 同济博士论丛图的特征值[M]. 上海: 同济大学出版社, 2018.