Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2021, 10(12), 4446-4453
Published Online December 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2021.1012473

Hans汉斯

卷积公式的应用与推广

谢　维

沈阳师范大学，辽宁 沈阳

收稿日期：2021年11月27日；录用日期：2021年12月17日；发布日期：2021年12月29日

摘　要

卷积属于积分运算，也是人为定义的运算，常常出现在广义函数和泛函分析当中，而卷积形式在概率论中就是两个随机变量独立和的密度。本文总结了一些关于卷积的性质和定理，对卷积在概率论方面的应用进行了深入的分析，使得求解概率密度等题型能够快速得出答案，并对卷积公式进行了推广，进一步深化了卷积公式的应用。

关键词

卷积，卷积公式，应用，推广

Application and Generalization of Convolution Formula

Wei Xie

Shenyang Normal University, Shenyang Liaoning

Received: Nov. 27th, 2021; accepted: Dec. 17th, 2021; published: Dec. 29th, 2021

Abstract

Convolution is an integral operation, which is also artificially defined and often appears in generalized function and functional analysis, while the convolution form in probability theory is the density of the independent sum of two random variables. In this paper, some properties and theorems of convolution are summarized, and the application of convolution in probability theory is deeply analyzed, so that the solution of probability density and other questions can be quickly answered, and the convolution formula is promoted, further deepening the application of convolution formula.

Keywords

Convolution, Convolution Formula, Application, Generalization

文章引用: 谢维. 卷积公式的应用与推广[J]. 应用数学进展, 2021, 10(12): 4446-4453.
DOI: 10.12677/aam.2021.1012473

1. 引言

卷积的概念在很早以前就已经被提出来了，在各个领域都有广泛地应用。而这一概念最开始是在物理领域首先被提出来的，且卷积主要应用信号处理方面，但其实卷积在物理上并没有清晰、明白的意义。而卷积通过发展，已经不再局限于物理领域，在工程、地震、统计学、油田勘测、数学领域等方面也有着巨大的发展。卷积在这些领域的意义就有所不同了，但其在提到卷积的物理意义及其它的应用时它的形式结构是不变的。卷积经过发展在数学学科得以应用，已经有越来越多国内外的学者研究如何更好地将卷积应用于数学当中，从而就有了物理上的卷积到数学概率论中的卷积公式，故研究卷积公式相关领域的内容就显得异常必要。

本文主要介绍的是卷积在概率论方面的应用，且详细地总结了卷积的概念及应用。主要目的是使学习者学习概率论中有关卷积的知识时，能够深入理解卷积公式和卷积的概念和特性，使学习者能够把所有零散的知识集中起来，完整地去把握知识，而求 $Z=X+Y$ 等等随机变量的密度函数一直都是概率论的考查的要点和易错点，故学习者在学习这部分内容时常常出错，因为卷积的计算与二重积分紧密结合，现通过介绍卷积公式，将二重积分化为一重积分，从而就避免通过分布函数法来计算，大大地简化计算量。现将卷积公式在连续性和离散型随机变量中的应用进行了总结与分析，且对卷积公式进行了推广来解决更多相关难题，帮助学习者更加了解和掌握卷积公式。

2. 卷积的定义

设 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 是定义在 R 上的两个函数，则积分 $S(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(x-\tau)\mathrm{d}\tau$ 称为 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 的卷积，记为：$f_1(x)*f_2(x)$。其中 $\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(x-\tau)\mathrm{d}\tau$ 是以 τ 为变量，且 x 是使函数 f_2 移动 $-\tau$ 的量[1]。

对 $S(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(x-\tau)\mathrm{d}\tau$

i) 若 $x<0$，$f_1(x)=0$，则 $S(x)=\int_{0}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(x-\tau)\mathrm{d}\tau$

ii) 若 $x<0$，$f_2(x)=0$，故对 $f_2(x-\tau)$，$x-\tau<0$，$f_2(x-\tau)<0$，则 $S(x)=\int_{-\infty}^{x} f_1(\tau) f_2(x-\tau)\mathrm{d}\tau$

iii) 若 $x<0$，$f_1(x)=0$，$f_2(x)=0$，则 $S(x)=\begin{cases}0, x<0\\ \int_0^x f_1(\tau) f_2(x-\tau)\mathrm{d}\tau, x\ge 0\end{cases}$

另两个序列的卷积定义为：

$$y(n)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)h(n-m)=x(n)*h(n) \quad (\text{星号*表示卷积})$$

对于序列 $x(n)$ 和 $h(n)$，当 $n=0$ 时，$h(m)$ 的 n 取反方向是 $h(-m)$；另外，n 是使 h 移动 $-m$ 的量，得到的结果同时也随着 n 的变化而改变。

3. 卷积公式的应用

3.1. 卷积公式

3.1.1. 连续型

定理 1 [2] 设 (X,Y) 是二维连续型随机变量，它的概率密度为 $f(x,y)$，则 $Z=X+Y$ 仍为连续型随机

变量，其概率密度为

$$f_{X+Y}(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,y)\mathrm{d}y \tag{1}$$

或

$$f_{X+Y}(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)\mathrm{d}x \tag{2}$$

给定 $Z=g(x,y)$，通常需要求 $F_Z(z)$， $f_Z(z)$，这里是由两个变元依据关系映射到一个变元，因此，求得 $F_Z(z)$ 后，经过一个求导，很容易求得 $f_Z(z)$。

一般求解 $F_Z(z)$，可用的思路是：

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(g(X,Y)\le z)=\iint g(x,y)\le zf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

化为二重积分求解，可以得到的是关于 z 的方程，思路非常很清晰。

对 $Z=X+Y$ 这种特殊的连续型随机变量，当然可以按照一般方法做，但是特殊性赋予了这类问题以规律，因此有公式解法。

$$F_Z(z)=P(X+Y\le z)=\iint\limits_{x+y\le z} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{z-x} f(x,y)\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}y\int_{-\infty}^{z-y} f(x,y)\mathrm{d}x$$

接下来是对变上限求导的应用，因为我们需要对 z 求导，且上限是 $\phi(z)=z-x$，$\left[\int\phi(x)f(t)\mathrm{d}t\right]_x'=f(\phi(x))\phi(x)'$，所以，这里运用起来就是：

$$f_Z(z)=\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{z-x} f(x,y)\mathrm{d}y\right]'=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)\mathrm{d}x$$

这就是由基本原理推导出来的公式，因为有区分度，所以这个公式很重要。同时原理要熟知，推导要快。

若 X、Y 相互独立，X 的边缘概率密度分别为 $f_X(x)$，Y 的边缘概率密度为 $f_Y(y)$，则 $X+Y$ 的密度函数 $f_{X+Y}(z)$ 为：

$$f_{X+Y}(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)f_Y(y)\mathrm{d}y \tag{3}$$

或

$$f_{X+Y}(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)\mathrm{d}x \tag{4}$$

这两个公式称 f_X 和 f_Y 的卷积公式，记为 f_X*f_Y，则

$$f_X*f_Y=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)f_Y(y)\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)\mathrm{d}x$$

使用上述四个公式求解 $Z=X+Y$ 的概率密度 $f_z(z)$ 的方法，叫做卷积公式法。

3.1.2. 离散型

定理 2 [3]设 (ξ,η) 是二维离散型随机变量，它的分布列 $P(\xi=i,\eta=j)=p_{ij}$，$i=0,1,2,\cdots$，$j=0,1,2,\cdots$，则 $\xi+\eta$ 仍为离散型随机变量，

$$P(\xi+\eta=n)=P(\xi=i,\eta=n-i)=\sum_{i=0}^{n} p_{i,n-i},\quad i=0,1,2,\cdots$$

若离散型随机变量 ξ 与 η 相互独立，它们的概率函数(分布列)分别为 $P(\xi=k)=a_k$， $k=0,1,2,\cdots$；

$P(\eta=k)=b_k$，$k=0,1,2,\cdots$，则 $\xi+\eta$ 的概率函数为：

$$P(\xi+\eta=n)=\sum_{k=0}^{n}a_k b_{n-k}=\sum_{k=0}^{n}b_k a_{n-k}，\quad n=0,1,2,\cdots$$

例 3.1.1 若 X，Y 独立，$P(X=k)=a_k$，$k=0,1,2,\cdots$，$P(X=k)=b_k$，$k=0,1,2,\cdots$，求 $Z=X+Y$ 的概率函数。

解
$$\begin{aligned}P(Z=r)&=P(X+Y=r)\\&=\sum_{i=0}^{r}P(X=i,Y=r-i)\\&=\sum_{i=0}^{r}P(X=i)P(Y=r-i)\\&=a_0b_r+a_1b_{r-1}+\cdots+a_rb_0，\ r=0,1,2,\cdots\end{aligned}$$

3.2. 连续型随机变量 $Z = X + Y$ 两种求法的比较

对求两个随机变量之和的概率密度，一种办法是分布函数法，从定义出发解决问题；一种办法是卷积公式法，直接用卷积公式解决问题。下面给出一道例题，用两种办法进行计算[4]。

例 3.2.2 若 X、Y 独立，它们的概率密度都为 $f(x,y)=\begin{cases}1,0\le x\le 1\\0,\text{else}\end{cases}$，求 $Z=X+Y$ 的概率函数。

1) 卷积公式法

由于变量 X、Y 为连续型且 X 与 Y 独立，可选用上述公式(3) $f_z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)\mathrm{d}x$，又因二者取值范围都为[0, 1]，故我们可以由

$$\begin{cases}0\le x\le 1\\0\le z-x\le 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0\le x\le 1\\z-1\le x\le z\end{cases}$$

又因 z 在不同范围时，积分的上下限取值也会随之改变，

故当 $z<0$ 或 $z>2$ 时，$f_z(z)=0$；

当 $0\le z<1$ 时，$f_z(z)=\int_0^z \mathrm{d}x=z$；

当 $1\le z<2$ 时，$f_z(z)=\int_{z-1}^{1}\mathrm{d}x=2-z$。

于是 $f_z(z)=\begin{cases}z,0\le z<1;\\2-z,1\le z<2;\\0,\text{eles}.\end{cases}$

2) 分布函数法

因 X 和 Y 独立，它们的概率密度都为 $f(x,y)=\begin{cases}1,0\le x\le 1\\0,\text{else}\end{cases}$，则二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$，由此可得到

$$f(x,y)=\begin{cases}1,0\le x\le 1,0\le y\le 1\\0,\text{else}\end{cases}$$

则 $F_Z(z)=P(Z\le z)=P(X+Y\le z)=\iint\limits_{x+y\le z}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。

当 $z<0$ 时，$F_Z(z)=0$；

当 $0 \le z < 1$ 时，$F_Z(z) = \int_0^{z-1} 1\mathrm{d}x \int_0^1 \mathrm{d}y + \int_{z-1}^1 \quad = \int_0^z z - x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}z^2$；

当 $1 \le z < 2$ 时，$F_Z(z) = \int_0^{z-1} 1\mathrm{d}x \int_0^1 \mathrm{d}y + \int_{z-1}^1 1\mathrm{d}x \int_0^{z-x} \mathrm{d}y = \int_0^{z-1} 1\mathrm{d}x + \int_{z-1}^1 z - x\mathrm{d}x = 2z - \frac{1}{2}z^2$；

当 $z \ge 2$ 时，$F_Z(z) = 1$。

因 $f_Z(z) = F_Z'(z)$，$f_z(z) = \begin{cases} z, 0 \le z < 1; \\ 2 - z, 1 \le z < 2; \\ 0, \text{eles.} \end{cases}$

通过上面的例题，可以发现分布函数法是用定义去解题，而卷积公式正是由定义推导而来，故相对于分布函数法来说，卷积公式的优点更多。若二维随机变量 (X,Y) 不是服从的二维均匀分布[5]，那么在这种情况下采用卷积公式解题才是最优秀的方法，一是由于 z 的取值更加方便得出，二是使用卷积公式计算是使用的一重积分。

4. 卷积公式的推广

4.1. 推广的卷积公式

求解概率密度常常出现在求解概率论的相关题型中，且在本科升学研究生的考试当中更是每年从不缺席的题型，但其难度却比教材上的题型高出许多。学习者在解题的过程中，最喜欢用的方法是分布函数法，这也是最基础的解法，但该方法解题过程耗费时间较长，且非常容易出错。而有些学习者还根据常规的卷积公式去计算，但是有些题型，看似可以用卷积公式计算，你却会发现无论怎么去利用公式，却得不出答案。故此一个新的解题方法应运而生，专门用来解决此类题型，这种方法比我们常用的卷积公式法，适用的题型更多，更方便记忆，这种方法被叫做推广的卷积公式。

设随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)$，令随机变量 $Z = g(X,Y)$。

若 $\frac{\partial g}{\partial x}$，$\frac{\partial g}{\partial y}$ 存在且连续，且 $\frac{\partial g(x,y)}{\partial y} > 0$ 或 $\frac{\partial g(x,y)}{\partial y} < 0$，则随机变量 Z 的概率密度为

$$f_z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, h(x,z)) \cdot \left| \frac{\partial h(x,z)}{\partial z} \right| \mathrm{d}x$$

若 $\frac{\partial g}{\partial x}$，$\frac{\partial g}{\partial y}$ 存在且连续，且 $\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} > 0$ 或 $\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} < 0$，则随机变量 Z 的概率密度为

$$f_z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(h(x,z), y) \cdot \left| \frac{\partial h(y,z)}{\partial z} \right| \mathrm{d}y$$

两个随机变量和、差、积、商的分布都是推广的卷积公式的特例，下面只给出其中两个的计算。

1) 和($Z = X + Y$)的分布：由 $z = x + y$ 可得 $y = z - x$，故 $f_z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x) \cdot |1| \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x)\mathrm{d}x$；或者由 $z = x + y$ 可得 $x = z - y$，故 $f_z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y, y)\mathrm{d}y$。

例 4.1.1 (X,Y) 是二维随机变量，设其概率密度为 $f(x,y) = \begin{cases} \lambda^2 \mathrm{e}^{-\lambda x}, 0 < y < x \\ 0, \text{其他} \end{cases}$，$\lambda > 0$，求 $Z = 2X + Y$ 的概率密度 $f_z(z)$。

解 由推广的卷积公式得，

$z = 2x + y$ 可得 $h(x,z) = z - 2x$，则 $\frac{\partial(z-2x)}{\partial z} = 1$，于是

$$f_z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-2x)\cdot|1|\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-2x)\mathrm{d}x$$

由 $0<z-2x<x$ 可得 $\begin{cases} x>0 \\ \dfrac{z}{3}<x<\dfrac{z}{2} \end{cases}$。

故 i) 当 $z\le 0$ 时，$f_z(z)=0$；

ii) 当 $z>0$ 时，$f_z(z)=\int_{\frac{z}{3}}^{\frac{z}{2}} \lambda^2 \mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x=\lambda\left(\mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{3}z}-\mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{2}z}\right)$

于是，$f_z(z)=\begin{cases} \lambda\left(\mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{3}z}-\mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{2}z}\right), z>0 \\ 0, z\le 0 \end{cases}$

2) 商($Z=\dfrac{X}{Y}$)的分布：由可得 $y=xz$，故 $f_z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,xz)\cdot|x|\mathrm{d}x$。

例 4.1.2 设两个随机变量 X、Y 分布相同且独立，都具有相同的概率密度为 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1000}{x^2}, x>1000, \\ 0,\text{其它}. \end{cases}$ 求 $Z=\dfrac{X}{Y}$ 的概率密度 $f_z(z)$。

解 因为随机变量 X 与 Y 相互独立，则

$$f_{XY}(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\frac{1000000}{x^2y^2}, x>1000, y>1000$$

由推广的卷积公式得，由 $z=\dfrac{y}{x}$ 可得 $y=xz$，故 $f_z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,xz)\cdot|x|\mathrm{d}x$。

由 $x>1000$，$xz>1000$，得 $\begin{cases} x>1000, \\ x>\dfrac{1000}{z}. \end{cases}$

故 i) 当 $z\le 0$ 时，$f_z(z)=0$；

ii) 当 $0<z\le 1$ 时，$f_z(z)=\int_{\frac{z}{1000}}^{+\infty}\dfrac{1000000}{x^3z^2}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}$

iii) 当 $z>1$ 时，$f_z(z)=\int_{1000}^{+\infty}\dfrac{1000000}{x^3z^2}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2z^2}$

于是 $f_z(z)=\begin{cases} 0, z\le 0; \\ \dfrac{1}{2}, 0<z\le 1; \\ \dfrac{1}{2z^2}, z>1. \end{cases}$

4.2. 三重卷积公式及其应用

利用卷积公式代入问题中，能够快速、简便的求出两个随机变量代数运算后的概率密度，但其实卷积公式也能应用到求解三个随机变量之和，且同样好用。求三个随机变量之和的概率密度一般是用定义来求解，但面临着计算复杂，且易出错的问题，故此由求解两个随机变量之和的概率密度的方法推出三重卷积公式，方便学习者学习。

定理 3 设 X_1,X_2,X_3 三个随机变量的联合概率密度函数为 $f(x_1,x_2,x_3)$，则 $Z=X_1+X_2+X_3$ 的概率密度函数为 $f_z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1,x_2,z-x_1-x_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$ [6]。

证明

$$
\begin{aligned}
F_Z(z)&=p\{Z\le z\}=p\{X_1+X_2+X_3\le z\}\\
&=\iiint\limits_{x_1+x_2+x_3\le z} f(x_1,x_2,x_3)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\\
&=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int\limits_{x_2+x_2\le z-x_1} f(x_1,x_2,x_3)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_Z(z)=F_Z'(z)&=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\left(\iint\limits_{x_2+x_3\le z-x_1} f(x_1,x_2,x_3)\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\right)}{\mathrm{d}z}\mathrm{d}x_1\\
&=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{z-x_1-x_2} f(x_1,x_2,x_3)\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\right)}{\mathrm{d}z}\mathrm{d}x_1\\
&=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1,x_2,z-x_1-x_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2
\end{aligned}
$$

则 $Z=X_1+X_2+X_3$ 的概率密度函数为 $f_z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1,x_2,z-x_1-x_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$。

当三个随机变量 X_1,X_2,X_3 两两独立时，且 $f_{X_1}(x_1),f_{X_2}(x_2),f_{X_3}(x_3)$ 分别是 X_1,X_2,X_3 的概率密度函数，有 $f_z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1,x_2,z-x_1-x_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(x_1)\cdot f_{X_2}(x_2)f_{X_3}(z-x_1-x_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$。

例 4.2.1 设随机变量 x_1,x_2,x_3 分布相同且独立，及三个随机变量概率密度都为 $f(x)=\begin{cases}2\mathrm{e}^{-2x},x>0\\0,x\le 0\end{cases}$，求 $z=x_1+x_2+x_3$ 的概率密度 $f_z(z)$。

解 直接由三重卷积公式得

$$
\begin{aligned}
f_z(z)&=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x_1)f_2(x_2)f_3(z-x_1-x_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\\
&=\begin{cases}\int_0^z\left[\int_0^{z-x_1}2x_1\mathrm{e}^{-2x_1}\cdot 2x_2\mathrm{e}^{-2x_2}\cdot 2(z-x_1-x_2)\mathrm{e}^{-2(z-x_1-x_2)}\mathrm{d}x_2\right]\mathrm{d}x_1,z>0\\0,z\le 0\end{cases}\\
&=\begin{cases}8\mathrm{e}^{-2z}\int_0^z x_1\mathrm{d}x_1\int_0^{z-x_1}x_2(z-x_1-x_2)\mathrm{d}x_2,z>0\\0,z\le 0\end{cases}\\
&=\begin{cases}\dfrac{z^5\cdot\mathrm{e}^{-2z}}{15},z>0\\0,z\le 0\end{cases}
\end{aligned}
$$

5. 结论

卷积是学习者学习了高等数学之后新接触的一种运算，涉及到积分、级数，看起来比较复杂。本文通过对卷积的定义以及连续型和离散型二维随机变量卷积公式加以总结可以加深对卷积公式的理解，使得学习者对卷积公式的印象不再单一、片面，而是一个有历史、有发展的全面、整体的印象。经过对比卷积公式法和分布函数法两种方法，进一步加深学习者对两种计算方法的了解，在做题时能快速根据题型选择最适合的方法。且推广了卷积公式得到两个随机变量四则运算和三个随机变量之和的公式，得到了求解概率密度时新的方法，在求解一些复杂、生僻题型时能够快速找到方法、得出答案，比求解概率

密度传统的分布函数法和卷积公式法更加简便和快捷，使得卷积公式在解决数学问题方面有了更多的应用。

参考文献

[1] 王艳丽, 李俊. 卷积公式的另外一种证法及其应用[J]. 安顺学院学报, 2011, 13(6): 134-136.

[2] 盛骤, 谢式千, 潘承毅. 概率论与数理统计[M]. 北京: 高等教育出版社, 2001: 72-76.

[3] 茆诗松. 概率论与数理统计教程[M]. 北京: 高等教育出版社, 2004: 61-69.

[4] 霍海峰, 温鲜. 二维连续型随机变量卷积公式探讨[J]. 价值工程, 2011, 30(27): 305.

[5] 李瑞阁, 黄尧. 服从均匀分布的多个独立随机变量和的密度函数公式[J]. 南阳师范学院学报, 2007(3): 18-20.

[6] 毛惠良. 多重卷积公式及其应用[J]. 工科数学, 1995(3): 173-176.