Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2021, 10(12), 4469-4476**
Published Online December 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2021.1012475

Hans汉斯

扩散的Beddington-DeAngelis捕食模型中空间异性的作用

郝雅婷，张丽娜*

西北师范大学数学与统计学院，甘肃 兰州

收稿日期：2021年11月27日；录用日期：2021年12月17日；发布日期：2021年12月29日

摘 要

本文研究空间异性环境下具有Beddington-DeAngelis型功能反应函数的Leslie-Gower捕食模型。首先应用线性化方法分析半平凡解的稳定性，发现空间异性环境中半平凡解的稳定性会随扩散系数的变化而改变。其次应用局部分支定理讨论正平衡解的存在性，并对分支方向和分支解的稳定性进行刻画。

关键词

捕食模型，Beddington-DeAngelis型功能反应函数，空间异性，稳定性，局部分支

The Effect of Spatial Heterogeneity on the Diffusion Beddington-DeAngelis Predator-Prey Model

Yating Hao, Lina Zhang*

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

Received: Nov. 27th, 2021; accepted: Dec. 17th, 2021; published: Dec. 29th, 2021

Abstract

In this paper, we study the Leslie-Gower predator-prey model with Beddington-DeAngelis type functional response in the spatially heterogeneous environment. First, the linearization method is used to analyze the stability of the semi-trivial solutions. It is found that the stability of the semi-trivial solution in the spatially heterogeneous environment will change with the diffusion coefficient varies. Secondly, the local bifurcation theory is used to discuss the existence of the pos-

*通讯作者。

文章引用: 郝雅婷, 张丽娜. 扩散的 Beddington-DeAngelis 捕食模型中空间异性的作用[J]. 应用数学进展, 2021, 10(12): 4469-4476. DOI: 10.12677/aam.2021.1012475

itive steady state solution, and the bifurcation direction and the stability of bifurcation solution are investigated.

Keywords

Predator-Prey Model, Beddington-DeAngelis Functional Response, Spatial Heterogeneity, Stability, Local Bifurcation

Copyright © 2021 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 引言

自 20 世纪 20 年代 Lotka 和 Volterra 开创性工作之后，许多重要的生物模型被陆续提出并得到广泛研究。2003 年 Aziz-Alaoui 和 Okiye [1]提出了如下模型

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=u\left(a_1-b_1u\right)-\dfrac{c_1uv}{u+k_1}, & t>0, \\ \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=v\left(a_2-\dfrac{b_2v}{k_2+u}\right), & t>0, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 u,v 分别表示食饵和捕食者的种群密度，参数 $a_i,b_i,k_i\left(i=1,2\right)$ 和 c_1 均是正常数。a_1,a_2 为食饵和捕食者的内禀增长率，b_1 表示食饵种内竞争系数。函数 $c_1u/\left(u+k_1\right)$ 是 Holling II 型功能反应函数，它刻画了捕食者的捕食行为。函数 $\left(k_2+u\right)/b_2$ 表示捕食者 v 的环境容纳量，被称为修正的 Leslie-Gower 项，生物上意味着当食饵 u 严重匮乏之时，环境对捕食者 v 仍具有一定的承载能力。

模型(1.1)及其各种变种模型得到了广泛的研究[2] [3] [4] [5]。对模型(1.1)的改变主要集中在两个方面。一方面对模型(1.1)的第一个方程引入不同的功能反应函数，例如文献[6]引入了 Holling III 型功能反应函数，文献[7]引入了 Monod-Haldane 型功能反应函数，文献[8]引入了 Beddington-DeAngelis 型功能反应函数。另一方面可以调整模型(1.1)的第二个方程中物种 v 的环境容纳量。当 $k_2=0$ 时，模型(1.1)就是著名的 Holling-Tanner 捕食模型。文献[7]和文献[9]讨论了环境容纳量函数为 $\left(k_2+u^2\right)/b_2$ 的模型。本文主要研究具有 Beddington-DeAngelis 型功能反应函数，并且环境容纳量函数为 $\left(k_2+u^2\right)/b_2$ 的 Leslie-Gower 捕食模型

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=u\left(a_1-b_1u\right)-\dfrac{c_1uv}{1+r_1u+m_1v}, & t>0, \\ \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=v\left(a_2-\dfrac{b_2v}{k_2+u^2}\right), & t>0. \end{cases} \tag{1.2}$$

经无量纲化，$u=\sqrt{k_2}\bar{u}$，$v=b_1\sqrt{k_2}\bar{v}/c_1$，$t=\bar{t}/\left(b_1\sqrt{k_2}\right)$，$a=a_1/\left(b_1\sqrt{k_2}\right)$，$b=a_2/\left(b_1\sqrt{k_2}\right)$，$r=r_1\sqrt{k_2}$，$e=b_1m_1\sqrt{k_2}/c_1$，$m=b_2/\left(c_1k_2\right)$，并将 $\bar{u},\bar{v},\bar{t}$ 仍记为 u,v,t，则系统(1.2)化为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=u\left(a-u\right)-\dfrac{uv}{1+ru+ev}, & t>0, \\ \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=v\left(b-\dfrac{mv}{1+u^2}\right), & t>0. \end{cases} \tag{1.3}$$

众所周知，常微分模型是基于物种空间均匀分布的假设而建立的。在现实生态环境中，物种的空间分布往往是不均匀的，物种会从自身高密度区域向低密度区域扩散[3] [6]。此外，物种生存空间中的资源分布往往也是不均匀的，数学上可以用变化的生长函数 $a(x)$ 和 $b(x)$ 来表示。基于上述考虑，我们将物种的扩散和空间非均匀因素引入模型(1.4)，得到如下模型

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}=d_1\Delta u+u\left(a(x)-u-\dfrac{v}{1+ru+ev}\right), & (x,t)\in(\Omega\times(0,\infty)), \\ \dfrac{\partial v}{\partial t}=d_1\Delta v+v\left(b(x)-\dfrac{mv}{1+u^2}\right), & (x,t)\in(\Omega\times(0,\infty)), \\ \partial_n u=\partial_n v=0, & (x,t)\in(\partial\Omega\times(0,\infty)), \\ u(x,0)=\varphi(x)\geq(\not\equiv)0,\ v(x,0)=\psi(x)\geq(\not\equiv)0, & x\in\Omega, \end{cases} \tag{1.4}$$

其中 Δ 表示 $\mathbb{R}^N\,(N\geq1)$ 上的拉普拉斯算子，Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 中具有光滑边界的有界区域，d_1,d_2 分别是食饵 u 和捕食者 v 的扩散系数，n 是 $\partial\Omega$ 上的单位外法向量，齐次 Neumann 边界条件表示两物种在边界 $\partial\Omega$ 上流量为 0。

在模型(1.4)中，我们总假设 $a(x),b(x)\in C^r(\bar\Omega)\,(r\in(0,1))$ 不是常数，且在 $\bar\Omega$ 上有 $a(x)>0$，$b(x)>0$。这里函数 $a(x),b(x)$ 表示空间环境是异性的。近年来，许多学者就空间异性环境对生物种群模型的影响进行了深入研究并提出许多有趣的问题[9] [10] [11] [12]。他们的研究结果表明，空间异性环境对生态系统作用显著。因此，研究种群模型时考虑空间异性环境是非常有必要的。本文主要关注空间异性环境对模型(1.4)动力学行为的影响。首先我们应用线性化方法分析半平凡解的稳定性，这些稳定性的判断与一类线性椭圆算子的主特征值有关。其次应用局部分支定理讨论共存解的存在性，分支方向以及分支解的稳定性。本文中，对 $\bar\Omega$ 内任意给定的连续函数 $g(x)$，记

$$\check{g}=\min\nolimits_{\bar\Omega}g(x),\ \hat{g}=\max\nolimits_{\bar\Omega}g(x),\ \bar g=\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega g(x)\mathrm{d}x.$$

2. 预备知识及线性稳定性分析

首先，我们介绍后面讨论中需要用到的几个引理。考虑单物种模型的平衡态问题

$$d\Delta u+u(m(x)-u)=0,\ x\in\Omega,\quad \frac{\partial u}{\partial n}=0,\ x\in\partial\Omega, \tag{2.1}$$

这里 $m(x)\in C^r(\bar\Omega)$，在 $\bar\Omega$ 上为正且不是常函数。由文献[13]知，当且仅当 $\mu_1(d,m)<0$ 时系统(2.1)有唯一正解，记为 $\theta_{d,m}$，并且 $\int_\Omega m(x)\mathrm{d}x<\int_\Omega\theta_{d,m}\mathrm{d}x$。进一步，$\theta_{d,m}$ 满足下列性质。

引理 2.1 [14]映射 $d\to\theta_{d,m}$ 连续，且 $\lim\limits_{d\to0}\theta_{d,m}=m(x)$，$\lim\limits_{d\to\infty}\theta_{d,m}=\bar m$ 在 $\bar\Omega$ 上一致成立。设 d 为正常数，$h\in L^\infty(\Omega)$。特征值问题

$$d\Delta\psi+h(x)\psi+\mu\psi=0,x\in\Omega,\quad \frac{\partial\psi}{\partial n}=0,x\in\partial\Omega \tag{2.2}$$

的第 k 个特征值记为 $\mu_k(d,h)$，则由文献[13]知下述结论成立。

引理 2.2 特征值问题(2.2)的主特征值 $\mu_1(d,h)$ 关于 d 光滑，关于 h 连续。并且

i) 若 $\int_\Omega h\mathrm{d}x\geq0$ 且 $h\not\equiv0$，则对所有的 $d>0$ 都有 $\mu_1(d,h)<0$；

ii) $\mu_1(d,h)$ 关于 d 严格单调递增，并且 $\lim\limits_{d\to0}\mu_1(d,h)=\min\limits_{\bar\Omega}(-h)$，$\lim\limits_{d\to\infty}\mu_1(d,h)=-\bar h$；

iii) 若在 $\bar\Omega$ 上 $h_1(x)\leq(\not\equiv)h_2(x)$，则 $\mu_1(d,h_1)>\mu_1(d,h_2)$。

为了描述$\int_{\Omega} h\mathrm{d}x<0$时(2.2)的主特征值。我们需引入下面带有不定权重的特征值问题

$$\Delta\varphi+\lambda h(x)\varphi=0, x\in\Omega,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial n}=0, x\in\partial\Omega, \tag{2.3}$$

这里 h 不是常值函数且在Ω内变号。如果(2.3)中$\lambda=\lambda_1(h)$有一个正解，则称$\lambda_1(h)$是(2.3)的一个主特征值。文献[14]中的结果表明，$\lambda_1(h)$有界且非负。当$\int_{\Omega} h\mathrm{d}x\ge 0$时$\lambda_1(h)=0$，当$\int_{\Omega} h\mathrm{d}x<0$时$\lambda_1(h)>0$。

当$\int_{\Omega} h\mathrm{d}x<0$时，(2.2)的主特征值$\mu_1(d,h)$与(2.3)的主特征值$\lambda_1(h)$之间的关系由下面的引理给出。

引理 2.3 如果$\int_{\Omega} h\mathrm{d}x<0$且 h 在Ω内变号，那么当$d<1/\lambda_1(h)$时$\mu_1(d,h)<0$，当$d=1/\lambda_1(h)$时$\mu_1(d,h)=0$，当$d>1/\lambda_1(h)$时$\mu_1(d,h)>0$。

容易看到系统(1.4)有一个平凡平衡解$(0,0)$，两个半平凡平衡解$(\theta_{d_1,a},0)$和$(0,\theta_{d_2,b}/m)$。本节的主要结果如下。

定理 2.1 $(\theta_{d_1,a},0)$是不稳定的。当$\mu_1(d_1,a(x)-M)>0$时，$(0,\theta_{d_2,b}/m)$是局部渐近稳定的；当$\mu_1(d_1,a(x)-M)<0$时，$(0,\theta_{d_2,b}/m)$是不稳定的，这里$M=\theta_{d_2,b}/(m+e\theta_{d_2,b})$。

证明 根据线性化原理，$(\theta_{d_1,a},0)$的稳定性由特征值问题

$$\begin{cases} d_1\Delta\Phi+\left(a(x)-2\theta_{d_1,a}\right)\Phi-\dfrac{\theta_{d_1,a}}{1+r\theta_{d_1,a}}\Psi+\lambda\Phi=0, & x\in\Omega,\\ d_2\Delta\Psi+b(x)\Psi+\lambda\Psi=0, & x\in\Omega,\\ \partial_n\Phi=\partial_n\Psi=0, & x\in\partial\Omega \end{cases} \tag{2.4}$$

决定，其中$M=\theta_{d_2,b}/(m+e\theta_{d_2,b})$。若$\Psi\not\equiv 0$，则$\lambda\in\left\{\mu_k\left(d_2,b(x)\right)\right\}_{k=1}^{+\infty}$。若$\Psi\equiv 0$，则$\Phi\neq 0$，$\lambda\in\left\{\mu_k\left(d_1,a(x)-2\theta_{d_1,a}\right)\right\}_{k=1}^{+\infty}$。由引理 2.2(iii)可知

$$\mu_1\left(d_2,b(x)\right)<\mu_1\left(d_2,b(x)-\theta_{d_2,b}\right)=0,$$

$$\mu_1\left(d_1,a(x)-2\theta_{d_1,a}\right)>\mu_1\left(d_1,a(x)-\theta_{d_1,a}\right)=0.$$

下面证明$\mu_1\left(d_2,b(x)\right)$是(2.4)的一个特征值。设$\psi^*$是算子$-d_2\Delta-b(x)$的主特征函数。记$L=-d_1\Delta-a(x)+2\theta_{d_1,a}-\mu_1\left(d_2,b(x)\right)$。易见

$$\mu_1\left(d_1,a(x)-2\theta_{d_1,a}+\mu_1\left(d_2,b(x)\right)\right)>\mu_1\left(d_1,a(x)-\theta_{d_1,a}\right)=0,$$

所以 L 的所有特征值都是正的，因此 L 是可逆的。那么$\mu_1\left(d_2,b(x)\right)$是(2.4)的一个特征值，其特征函数是$(\Phi,\Psi)=\left(L^{-1}\left(-\dfrac{\theta_{d_1,a}\psi^*}{1+r\theta_{d_1,a}}\right),\psi^*\right)$。因此半平凡平衡解$(\theta_{d_1,a},0)$是不稳定的。

下面我们讨论$(0,\theta_{d_2,b}/m)$的稳定性，它的稳定性由特征值问题

$$\begin{cases} d_1\Delta\Phi+\left(a(x)-M\right)\Phi+\lambda\Phi=0, & x\in\Omega,\\ d_2\Delta\Psi+b(x)\Psi-2\theta_{d_2,b}\Psi+\lambda\Psi=0, & x\in\Omega,\\ \partial_n\Phi=\partial_n\Psi=0, & x\in\partial\Omega \end{cases} \tag{2.5}$$

确定，其中$M=\theta_{d_2,b}/(m+e\theta_{d_2,b})$。显然，

$$\lambda\in\left\{\mu_k\left(d_1,a(x)-M\right)\right\}_{k=1}^{+\infty}\cup\left\{\mu_k\left(d_2,b(x)-2\theta_{d_2,b}\right)\right\}_{k=1}^{+\infty}.$$

由引理 2.2(iii)可知 $\mu_1\left(d_2,b(x)-2\theta_{d_2,b}\right)>\mu_1\left(d_2,b(x)-\theta_{d_2,b}\right)=0$，所以 $\left(0,\theta_{d_2,b}/m\right)$ 的稳定性由 $\mu_1\left(d_1,a(x)-M\right)$ 的符号所决定。当 $\mu_1\left(d_1,a(x)-M\right)>0$ 时，$\left(0,\theta_{d_2,b}/m\right)$ 局部渐近稳定；当 $\mu_1\left(d_1,a(x)-M\right)<0$ 时，$\left(0,\theta_{d_2,b}/m\right)$ 不稳定。定理 2.1 得证。

注 2.1 类似地，可以证明系统(1.4)的平凡解 $(0,0)$ 是不稳定的。由于 $(0,0)$ 和 $\left(\theta_{d_1,a},0\right)$ 都是不稳定的，所以 $\left(0,\theta_{d_2,b}/m\right)$ 不稳定就意味着共存解的存在。事实上，利用锥上的不动点指标理论可以证明，当 $\mu_1\left(d_1,a(x)-M\right)<0$ 时，系统(1.4)至少存在一个正平衡解。其证明过程是标准的，这里省略证明过程。在第 3 节我们将使用分支理论证明正平衡解的存在性。

下面，我们详细分析 $\mu_1\left(d_1,a(x)-M\right)$ 的符号，得到下述结果。

定理 2.2 i) 若 $\check{M}>\hat{a}$，则 $\left(0,\theta_{d_2,b}/m\right)$ 局部渐近稳定；

ii) 若 $\bar{M}<\bar{a}$，则 $\left(0,\theta_{d_2,b}/m\right)$ 不稳定；

iii) 假设 $\bar{M}>\bar{a}$ 且 $a(x)-M$ 在 Ω 内变号，则存在一个 d_1^* 使得当 $d_1<d_1^*$ 时 $\left(0,\theta_{d_2,b}/m\right)$ 不稳定，而当 $d_1>d_1^*$ 时 $\left(0,\theta_{d_2,b}/m\right)$ 局部渐近稳定。这里 $M=\theta_{d_2,b}/\left(m+e\theta_{d_2,b}\right)$。

证明 由引理 2.2 可知，$\mu_1\left(d_1,a(x)-M\right)$ 关于 d_1 严格单调递增，且满足

$$\lim_{d_1\to 0}\mu_1\left(d_1,a(x)-M\right)=\min\left(M-a(x)\right)\geq \check{M}-\hat{a},$$

$$\lim_{d_1\to\infty}\mu_1\left(d_1,a(x)-M\right)=\bar{M}-\bar{a}.$$

若 $\bar{M}<\bar{a}$，则对所有的 $d_1>0$ 有 $\mu_1\left(d_1,a(x)-M\right)<0$；若 $\check{M}>\hat{a}$，则对所有的 $d_1>0$ 有 $\mu_1\left(d_1,a(x)-M\right)>0$。接着讨论 $\bar{M}>\bar{a}$ 的情况。若 $a(x)-M$ 在 Ω 内变号，那么根据引理 2.3 知，存在 $d_1^*=1/\lambda_1\left(a(x)-M\right)$，当 $d_1>d_1^*$ 时，$\mu_1\left(d_1,a(x)-M\right)>0$；当 $d_1<d_1^*$ 时，$\mu_1\left(d_1,a(x)-M\right)<0$。结合定理 2.1 可知，定理 2.2 成立。

注 2.2 当 a 和 b 都是正常数时，系统(1.4)有食饵物种为 0 的半平凡解 $(0,b/m)$。利用线性化分析易于证明，当 $a<b/(m+eb)$ 时 $(0,b/m)$ 是线性稳定的，当 $a>b/(m+eb)$ 时 $(0,b/m)$ 是不稳定的。即在空间同性环境下 $(0,b/m)$ 的稳定性与扩散系数无关。而在空间异性环境下，定理 2.2(iii)的结果表明，随着扩散系数 d_1 的变化 $\left(0,\theta_{d_2,b}/m\right)$ 的稳定性会发生改变。由此可见空间异性环境激发了物种扩散的作用，生物上意味着食饵物种 u 采取慢扩散策略有利于 u 物种入侵成功。

3. 平衡态的局部分支

本节，我们将应用局部分支定理，以食饵的扩散率 d_1 为分支参数，分析(1.4)的半平凡平衡态的分支现象。(1.4)的正平衡态为

$$\begin{cases} d_1\Delta u+u\left(a(x)-u-\dfrac{v}{1+ru+ev}\right)=0, & x\in\Omega, \\ d_2\Delta v+v\left(b(x)-\dfrac{mv}{1+u^2}\right)=0, & x\in\Omega, \\ \partial_n u=\partial_n v=0, & x\in\partial\Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

对任意的 $p>N$，记

$$X=\left\{(u,v)\in W^{2,p}(\Omega)\times W^{2,p}(\Omega):\frac{\partial u}{\partial n}=\frac{\partial v}{\partial n}=0,x\in\partial\Omega\right\},\quad Y=L^p(\Omega)\times L^p(\Omega).$$

定义算子 $F\left(d_1,u,v\right):\mathbb{R}^+\times X\to Y$

$$F(d_1,u,v)=\begin{pmatrix} d_1\Delta u+u\left(a(x)-u-\dfrac{v}{1+ru+ev}\right) \\ d_2\Delta v+v\left(b(x)-\dfrac{mv}{1+u^2}\right)\end{pmatrix},$$

注意，对于每个固定的参数值 $d_1\in\mathbb{R}^+$，都有 $F\left(d_1,0,\theta_{d_2,b}/m\right)=0$。易得导算子 $D_{d_1}F(d_1,u,v)$，$F_{(u,v)}(d_1,u,v)$ 和 $D_{d_1}F_{(u,v)}(d_1,u,v)$ 在 $\left(d_1,0,\theta_{d_2,b}/m\right)$ 的某个邻域内连续存在。

定理 3.1 若 $\bar{a}<\bar{M}$，且 $a(x)-M$ 在 Ω 内变号，那么当且仅当 $d_1=d_1^*\triangleq 1/\lambda\left(a(x)-M\right)$ 时，系统(1.4)在 $\left(0,\theta_{d_2,b}/m\right)$ 处分支出半平凡解曲线 $\left(d_1,0,\theta_{d_2,b}/m\right)$。更准确地来说，存在 $\delta>0$，使得(1.4)在 $\left(d_1^*,0,\theta_{d_2,b}/m\right)\in\mathbb{R}^+\times X$ 附近的所有正平衡解都可参数化为

$$\left\{\left(d_1,u(s),v(s)\right)=\left(d_1(s),s\varphi^*+s^2u_1(s),\theta_{d_2,b}/m+s^2v_1(s)\right)\in R\times X:0<s<\delta\right\}\tag{3.2}$$

这里 φ^* 在(3.3)中有定义，$d_1(0)=d_1^*$，$\left(u_1(s),v_1(s)\right)$ 在 X 中 $KerF_{(u,v)}\left(d_1^*,0,\theta_{d_2,b}/m\right)$ 的补空间内是有界光滑函数族。此外，解 $\left(d_1^*,0,\theta_{d_2,b}/m\right)$ 的分支方向，可用 $d'(0)$ 的符号表示。

证明 由引理 2.3 和定理 3.1 的假设容易知道 $\mu_1\left(d_1^*,a(x)-M\right)=0$。因为 $\mu_1\left(d_2,b(x)-2\theta_{d_2,b}\right)>0$，所以 $\mu_1\left(d_1^*,a(x)-M\right)=0$ 是(2.5)的主特征值。因此，存在 $\varphi^*>0$ 使得

$$d_1^*\Delta\varphi^*+\left(a(x)-M\right)\varphi^*=0,x\in\Omega,\quad \frac{\partial\varphi^*}{\partial n}=0,x\in\partial\Omega,\tag{3.3}$$

求得 $F_{(u,v)}\left(d_1^*,0,\theta_{d_2,b}/m\right)$ 是一个自伴算子，故有 $\mathrm{Ker}\left(F_{(u,v)}\left(d_1^*,0,\theta_{d_2,b}/m\right)\right)=\mathrm{span}\left\{\left(\varphi^*,0\right)\right\}$，从而 $\mathrm{dimKer}\left(F_{(u,v)}\left(d_1^*,0,\theta_{d_2,b}/m\right)\right)=1$。进而，由 Fredholm 二择一定理知

$$\mathrm{codimRange}\left(F_{(u,v)}\left(d_1^*,0,\theta_{d_2,b}/m\right)\right)=1.$$

此外，$F_{(u,v)}\left(d_1^*,0,\theta_{d_2,b}/m\right)\left(\varphi^*,0\right)\not\subset\mathrm{Range}\left(F_{(u,v)}\left(d_1^*,0,\theta_{d_2,b}/m\right)\right)$，可由局部分支定理得到定理 3.1 结论的前半部分。

将(3.2)代入(3.1)的第一个方程，两边同时除以 s 且关于 s 求导一次，令 $s=0$ 且等号两边同乘以 φ^*，并在 Ω 上积分，应用分部积分和边界条件，可得

$$d_1'(0)\int_\Omega\left|\nabla\varphi^*\right|^2\mathrm{d}x=\int_\Omega\left(\frac{rm\theta_{d_2,b}}{m^2+2em\theta_{d_2,b}+e^2\theta_{d_2,b}^2}-1\right)\varphi^{*^3}\mathrm{d}x,$$

这里记 $N=\int_\Omega\left(\dfrac{rm\theta_{d_2,b}}{m^2+2em\theta_{d_2,b}+e^2\theta_{d_2,b}^2}-1\right)\varphi^{*^3}\mathrm{d}x$，由于 $\int_\Omega\left|\nabla\varphi^*\right|^2\mathrm{d}x>0$，所以 $d_1'(0)$ 的符号由 N 决定，且有如下结论

i) 当 $N>0$ 时，$d_1'(0)>0$，为右向跨临界分支；

ii) 当 $N<0$ 时，$d_1'(0)<0$，为左向跨临界分支。

下面，我们将研究定理 3.1 中得到的局部分支解 $\left(u(s),v(s)\right)$ 的线性稳定性。

定理 3.2 在定理 3.1 的条件下，对于每个 $s>0$，有如下结论：

i) 当 $d_1'(0)<0$ 时，分支解 $\left(d_1,u(s),v(s)\right)=\left(d_1(s),s\varphi^*+s^2u_1(s),\theta_{d_2,b}/m+s^2v_1(s)\right)$ 是局部渐近稳定的；

ii) 当 $d_1'(0)>0$ 时，分支解 $\left(d_1,u(s),v(s)\right)=\left(d_1(s),s\varphi^*+s^2u_1(s),\theta_{d_2,b}/m+s^2v_1(s)\right)$ 是不稳定的。

证明 为了研究(3.1)的分支解 $\left(u(s),v(s)\right)$ 关于 s 的稳定性，我们考虑如下线性特征值问题

DOI: 10.12677/aam.2021.1012475

$$\begin{cases} d_1\Delta\Phi_1+\left(a(x)-2u(s)-\dfrac{r(s)(1+ev(s))}{(1+ru(s)+ev(s))^2}\right)\Phi_1-\dfrac{u(s)(1+ru(s))}{(1+ru(s)+ev(s))^2}\Psi_1+\eta\Phi_1=0, & x\in\Omega,\\ d_2\Delta\Psi_1+\left(b(x)-\dfrac{2mv(s)}{1+u^2(s)}\right)\Psi_1+\dfrac{2mu(s)v^2(s)}{(1+u^2(s))^2}\Phi_1+\eta\Psi_1=0, & x\in\Omega,\\ \partial_n\Phi_1=\partial_n\Psi_1=0, & x\in\partial\Omega, \end{cases}$$

在 $(u(s),v(s))$ 处的线性化算子记为 Γ_s，其特征值为 $-\eta$，对应的特征函数为 (Φ_1,Ψ_1)。$(0,\theta_{d_2,b}/m)$ 处的线性化算子记为 Γ_0。由前面的计算证明易知 Γ_0 有简单特征根 0，对应的特征函数为 $(\varphi^*,0)$，$-\eta$ 是 Γ_s 实部最大的特征值。再引入 Γ_0 的扰动算子 Γ_{d_1}，其特征值设为 $-\gamma$，对应的特征函数为 (Φ_2,Ψ_2)，于是当 $|d_1-d_1^*|\ll 1$ 时，$-\gamma$ 也是 Γ_{d_1} 的简单特征值，且 $d_1\to d_1^*,\gamma\to 0,\Phi_2\to\varphi^*,\Psi_2\to 0$。对于 Γ_s 的特征值 $-\eta$ 与 Γ_{d_1} 的特征值 $-\gamma$ 有[15]：$\lim\limits_{s\to 0}\dfrac{sd_1'(s)\gamma'(d_1)}{\eta(s)}=-1,0<s<\delta$。

下面我们计算 $\gamma'(d_1)$。由上述分析可知 Γ_{d_1} 的特征值 $-\gamma$ 满足下述特征值问题：

$$\begin{cases} d_1\Delta\Phi_2+(a(x)-M)\Phi_2+\gamma\Phi_2=0, & x\in\Omega,\\ d_2\Delta\Psi_2+(b(x)-2\theta_{d_2,b})\Psi_2+\gamma\Psi_2=0, & x\in\Omega,\\ \partial_n\Phi_2=\partial_n\Psi_2=0, & x\in\partial\Omega, \end{cases}$$

对上述第一个方程乘以 Φ_2，并在 Ω 上积分，应用分部积分进行简单的计算，对 d_1 求导，当 $s\to 0$ 时，有

$$\gamma'(d_1^*)=\frac{\int_\Omega|\nabla\varphi^*|^2\mathrm{d}x}{\int_\Omega\varphi^{*2}\mathrm{d}x}>0,$$

综上所述，当 $s\in(0,\delta)$ 时，由于 $\gamma'(d_1)>0$，所以有以下结论：

i) 若 $d_1'(s)<0$，则 $-\eta(s)<0$，Γ_s 是线性稳定的；

ii) 若 $d_1'(s)>0$，则 $-\eta(s)>0$，Γ_s 是不稳定的。

基金项目

国家自然科学基金(11761063)。

参考文献

[1] Aziz-Alaoui, M.A. and Daher Okiye, M. (2003) Boundedness and Global Stability for a Predator-Prey Model with Modified Leslie-Gower and Holling-Type II Schemes. *Applied Mathematics Letters*, **16**, 1069-1075. https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2005.10.003

[2] Nindjin, A.F., Aziz-Alaoui, M.A. and Cadivel, M. (2006) Analysis of a Predator-Prey Model with Modified Leslie-Gower and Holling-Type II Schemes with Delay. *Nonlinear Analysis*: *Real World Applications*, **7**, 1104-1118. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2013.03.064

[3] Zhou, J. and Shi, J.P. (2013) The Existence, Bifurcation and Stability of Positive Stationary Solutions of a Diffusive Leslie-Gower Predator-Prey Model with Holling Type-II Functional Responses. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **405**, 618-630. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2013.03.064

[4] Guan, X.N., Wang, W.M. and Cai, Y.L. (2011) Spatiotemporal Dynamics of a Leslie-Gower Predatorprey Model Incorporating a Prey Refuge. *Nonlinear Analysis*: *Real World Applications*, **12**, 2385-2395. https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2011.02.011

[5] Camara, B.I. and Aziz-Alaoui, M.A. (2009) Turing and Hopf Patterns Formation in a Predator-Prey Model with Leslie-Gower-Type Functional Response. *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems, Series B*, **16**, 479-488.

[6] Yang, W.S. and Li, Y.Q. (2013) Dynamics of a Diffusive Predator-Prey Model with Modified Leslie-Gower and Hol-

ling-Type III Schemes. *Computers & Mathematics with Applications*, **65**, 1727-1737. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2013.04.004

[7] Li, S.B., Wu, J.H. and Nie, H. (2015) Steady-State Bifurcation and Hopf Bifurcation for a Diffusive Leslie-Gower Predator-Prey Model. *Computers and Mathematics with Applications*, **70**, 3043-3056. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2015.10.017

[8] Liu, G.D., Chang, Z.B., Meng, X.Z. and Liu, S.Y. (2020) Optimality for a Diffusive Predator-Prey System in a Spatially Heterogeneous Environment Incorporating a Prey Refuge. *Applied Mathematics & Computation*, **384**, Article ID: 125385. https://doi.org/10.1016/j.amc.2020.125385

[9] Zou, R. and Guo, S.J. (2020) Dynamics of a Diffusive Leslie-Gower Predator-Prey Model in Spatially Heterogeneous Environment. *Discrete & Continuous Dynamical Systems B*, **25**, 4189-4210.

[10] Du, Y.H. and Shi, J.P. (2006) Some Recent Results on Diffusive Predator-Prey Models in Spatially Heterogeneous Environment. In: Brunner, H. and Zou, X. (Authors), *Nonlinear Dynamics and Evolution Equations*, American Mathematical Society, Providence, 95-135. https://doi.org/10.1090/fic/048/05

[11] Lou, Y. and Wang, B. (2017) Local Dynamics of a Diffusive Predator—Prey Model in Spatially Heterogeneous Environment. *Journal of Fixed Point Theory and Applications*, **19**, 755-772. https://doi.org/10.1007/s11784-016-0372-2

[12] Choi, W.A. and Ahn, I.B. (2020) Predator-Prey Interaction Systems with Non-Uniform Dispersal in a Spatially Heterogeneous Environment. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **485**, Article No. 123860. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2020.123860

[13] Cantrell, R.S. and Cosner, C. (2004) Spatial Ecology via Reaction-diffusion Equations. John Wiley and Sons, Ltd., Chichester. https://doi.org/10.1002/0470871296

[14] He, X.Q. and Ni, W.M. (2013) The Effects of Diffusion and Spatial Variation in Lotka-Volterracompetition-Diffusion System I: Heterogeneity vs. Homogeneity. *Journal of Differential Equations*, **254**, 528-546. https://doi.org/10.1016/j.jde.2012.08.032

[15] Smoller, J. (1999) Shock Waves and Reaction—Diffusion Equations. Spring-Verlag, New York.