Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2021, 10(2), 453-460
Published Online February 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2021.102051

Hans汉斯

双曲空间中的Moser-Trudinger不等式

郭明娟，王广兰*

临沂大学数学与统计学院，山东 临沂
Email: *guanglanw@126.com

收稿日期：2021年1月17日；录用日期：2021年2月16日；发布日期：2021年2月23日

摘 要

本文利用分割水平集的技巧，借助于非增重排理论和O'Neil's引理，把Moser-Trudinger不等式推广到双曲空间，所得结果推广和改进了近期的相应结果。

关键词

双曲空间，**Moser-Trudinger**不等式，**Adachi-Tabaka**不等式

Moser-Trudinger Inequalities in Hyperbolic Spaces

Mingjuan Guo, Guanglan Wang*

School of Mathematical and Statistics, Linyi University, Linyi Shandong
Email: *guanglanw@126.com

Received: Jan. 17th, 2021; accepted: Feb. 16th, 2021; published: Feb. 23rd, 2021

Abstract

In this paper, the Moser-Trudinger inequality is extended to hyperbolic space by using the technique of level set segmentation, non increasing rearrangement theory and O'Neil's lemma. The results generalize and improve the recent results.

Keywords

Hyperbolic Spaces, Moser-Trudinger Inequality, Adachi-Tabaka Inequality

*通讯作者。

文章引用: 郭明娟, 王广兰. 双曲空间中的 Moser-Trudinger 不等式[J]. 应用数学进展, 2021, 10(2): 453-460.
DOI: 10.12677/aam.2021.102051

双曲空间 H^n 当 $n\ge 2$ 时是完备的，结合黎曼流形知识，截面曲率是常数-1，即：给定是维数以后，任意两个这样的空间是等距的[1]，双曲空间 H^n 中有大量的模空空间，但是，最重要的一类模空间是等分空间模，也就是 Poincaré 模，即双曲空间或者 Lorentz 模。在涉及到旋转对称的时候，Poincaré 球模极其有用，下面，我们利用 Poincaré 球模讨论问题，给定 $n\ge 2$，我们用 B^n 来表示 R^n 中中心在原点的单位球。双曲空间中的 Poincaré 球模是单位球 B^n 赋予下面的距离

$$g(x)=\frac{4}{1-|x|^2}\Big|^2\sum_{i=1}^{n}dx_i^2 .$$

与黎曼距离相匹配的体积元是

$$\mathrm{d}Vlo_g=\frac{2^n}{\left(1-|x|^2\right)^2}\mathrm{d}x .$$

设 $x\in B^n$，用 $\rho(x)=d(x,0)=\ln\frac{1+|x|}{1-|x|}$，表示从 x 到 0 的测地距离，$r>0$ 时，用 $B_g(0,r)$ 表示球心在原点半径为 $r>0$ 的测地开球。仍然用 ∇ 表示 R^n 中 Euclidean 梯度，同时用 $\langle.,.\rangle$ 表示 R^n 中的标准内积，相对于距离 g，在任何切向空间中，双曲梯度 ∇_g 和内积 $\langle.,.\rangle_g$ 为如下形式：

$$\nabla_g=\frac{\left(1-|x|^2\right)^2}{4}\nabla,\ \langle.,.\rangle_g=\frac{4}{\left(1-|x|^2\right)^2}\langle.,.\rangle .$$

为简单起见，对 H^n 里的光滑函数 u，我们用 $|\nabla_g u|_g=\sqrt{\langle\nabla_g u,\nabla_g u\rangle_g}$，因此有如下的关系

$$\int_{B^n}|\nabla_g u|_g^n\,\mathrm{d}V_0l_g=\int_{B^n}|\nabla u|^n\,\mathrm{d}x . \tag{1.1}$$

结合(4.1.1)，我们知道到 Sobolev 空间是 $C_0^\infty\left(B^n\right)$ 完备的形式，当定义在 Poincaré 球模上的空间 $W_0^{1,n}\left(B^n\right)$ 被赋予范数 $\left(\int_{B^n}|\nabla u|^n\right)^{\frac{1}{n}}$ 时，我们把它表示为 $W^{1,n}\left(B^n\right)$。$W_0^{1,n}\left(B^n\right)$ 里径向组成对称的函数构成的子空间我们用 $W_{0,n}^{1,n}\left(B^n\right)$ 表示。

众所周知，双曲空间 H^n 中的对称问题是个很重要的问题。现在，我们来回忆一些双曲空间的重排理论。设 $u:H^n\to R$ 表示下面的函数：

$$V_0l_g\left(\left\{x\in H^n:|u(x)|>t\right\}\right)=\int_{\left\{x\in H^n:|u(x)|>t\right\}}\mathrm{d}V_0l_g<\infty,\ \forall t>0 .$$

对上面的函数 u，它的分布函数用 μ_u 表示，定义为

$$\mu_u=V_0l_g\left(\left\{x\in H^n:|u(x)|>t\right\}\right),\ t>0 .$$

函数 $(0,\infty)\ni t\to\mu_u(t)$ 是非增右连续的。那么 u 的非增重排函数 u^* 定义为

$$u^*(t)=\sup\left\{s>0:\mu_u(s)>t\right\} .$$

注意到 $(0,\infty)\ni t\to u^*(t)$ 是非增的，现在定义 u 径向非增重排函数 $u_g^\#$ 为

$$u_g^\# = u^*\left(V_0 l_g\left(B_g\left(0,\rho(x)\right)\right)\right),\ x\in B^n. \tag{1.2}$$

我们再定义一个 R^n 上的函数 $u_e^\#$：

$$u_g^\# = u^*\left(\sigma_n |x|^n\right),\ x\in B^n. \tag{1.3}$$

这里 σ_n 表示 R 中单位球的体积，因为 $u, u_g^\#, u_e^\#$ 都有同样的非增重排函数，对任意的非增函数 $\Phi:[0,\infty)\to[0,\infty)$，有

$$\int_{B^n}\Phi\left(|u|\right)\mathrm{d}V_0 l_g = \int_{B^n}\Phi\left(u_g^\#\right)\mathrm{d}V_0 l_g = \int_{R^n}\Phi\left(u_E^\#\right)\mathrm{d}x = \int_0^\infty \Phi\left(u^*(t)\right)\mathrm{d}t. \tag{1.4}$$

这个不等式是两次变换替换的结果，但是，由 Pólya-Szego 原则，有

$$\int_{B^n}\left|\nabla_g u_g^\#\right|_g^n \mathrm{d}V_0 l_g \le \int_{B^n}\left|\nabla_g u\right|_g^n \mathrm{d}V_0 l_g.$$

引理 1. 设 $n>2$，对任意的 $0\le\lambda\le\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^n$，$0<\beta<n$，那么对所有的

$u\in C_0^\infty\left(B^n\right):\left\|\nabla_g u\right\|_{n,g}^n - \lambda\|u\|_{n,g}^n \le 1$，有

$$\int_{B^n}\frac{\phi\left(\alpha_n\left(1-\dfrac{\beta}{\alpha}\right)|u|^{\frac{n}{n-1}}\right)}{\rho^\beta J(\theta,\rho)}\mathrm{d}Vol_g < \infty.$$

这里，$\rho = \ln\dfrac{1+|x|}{1-|x|},\ J(\theta,\rho) = \left(\dfrac{\sinh\rho}{\rho}\right)^{n-1}$。

证明：参考 Lam 和 Lu 等人[2] [3] [4] [5] [6]使用分割水平集的方法，设 $\Omega(u)=\left\{x\in B^n,\left|u(x\ge 1)\right|\right\}$，则有如下不等式

$$\begin{aligned}\int_{B^n}\frac{\phi_n\left(\alpha_n\left(1-\dfrac{\beta}{\alpha}\right)|u|^{\frac{n}{n-1}}\right)}{\rho(x)^\beta J(\theta,\rho)}\mathrm{d}V &\le \int_{\Omega(u)}\frac{\exp\left(\alpha_n\left(1-\dfrac{\beta}{\alpha}\right)|u|^{\frac{n}{n-1}}\right)}{\rho(x)^\beta J(\theta,\rho)}\mathrm{d}V + \int_{\beta\setminus\Omega(u)}\frac{\phi_n\left(\alpha_n\left(1-\dfrac{\beta}{\alpha}\right)|u|^{\frac{n}{n-1}}\right)}{\rho(x)^\beta J(\theta,\rho)}\mathrm{d}V \\ &\le I + II\end{aligned} \tag{1.5}$$

对于 II，我们需要一个简单而又有技巧的工具，简单验证可知，函数 $J(\theta,\rho)$ 关于 ρ 的单调递减的函数，而且 $J(\theta,\rho)\ge J(\theta,0)=1$，设 $g(\rho)=\dfrac{1}{\rho(x)^\beta J(\theta,\rho)}$，则 $g^*(t)=\left(\dfrac{nt}{\omega_n - 1}\right)^{\frac{\beta}{n}}$，$t>0$。因此有

$$\begin{aligned}\int_{\beta\setminus\Omega(u)}\frac{\phi_n\left(\alpha_n\left(1-\dfrac{\beta}{n}\right)|u|^{\frac{n}{n-1}}\right)}{\rho(x)^\beta J(\theta,\rho)}\mathrm{d}V &\lesssim \int_{B^n\setminus\Omega(u)}\frac{|u|^n}{\rho(x)^\beta}\mathrm{d}V \lesssim \int_{\{|u|<1\}\cap\{\rho\le\|u\|_n\}}\frac{|u|^n}{\rho(x)^\beta}\mathrm{d}V + \int_{\{|u|<1\}\cap\{\rho\ge\|u\|_n\}}\frac{|u|^n}{\rho(x)^\beta}\mathrm{d}V \\ &\lesssim \int_{\{|u|<1\}\cap\{\rho\le\|u\|_n\}}\frac{1}{\rho(x)^\beta}\mathrm{d}V + \int_{\{|u|<1\}\cap\{\rho\ge\|u\|_n\}}\frac{|u|^n}{\rho(x)^\beta}\mathrm{d}V \\ &\lesssim \int_0^{\|u\|_n}\frac{\sinh^3 t}{t^\beta}\mathrm{d}t + \frac{1}{\|u\|_n^\beta}\int_{\{|u|<1\}\cap\{\rho\ge\|u\|_n\}}u^n\mathrm{d}V \le C\end{aligned}$$

对于不等式 I，由重排理论得

$$\int_{\Omega(u)}\frac{\exp(\alpha_n\left(1-\frac{\beta}{\alpha}\right)|u|^{\frac{n}{n-1}}}{\rho(x)^{\beta}J(\theta,\rho)}.$$

类似于[7]和[8]，令 $v=\left(\nabla_g-\lambda^{\frac{1}{n}}\right)u^{\frac{1}{2}}$，那么 $\int_{B^n}|v|^n\le 1$，把 u 写成位势形式：

$$u=u*\left(\left|\nabla_g\right|-\lambda^{\frac{1}{n}}\right)^n=v*\varphi_1$$

由 O’Neil’s 引理[9]和变量替换，经过简单计算可得：

$$\begin{aligned}
I&=\int_0^{|\Omega|}\exp\left(\left(1-\frac{\beta}{n}\right)\alpha_n u^*(t)^{\frac{n}{n-1}}\right)g^*(t)\mathrm{d}t\\
&\le\int_0^{\Omega}\exp\left(\left(1-\frac{\beta}{n}\right)\alpha_n\left|\frac{1}{t}\int_0^t v^*(s)\mathrm{d}s\int_0^t\varphi_1^*(s)\mathrm{d}s+\int_0^{\infty}v^*(s)\varphi_1^*(s)\mathrm{d}s\right|^{\frac{n}{n-1}}\right)g^*(t)\mathrm{d}t\\
&\le\int_0^{\Omega}\int_0^{+\infty}\exp\left(\left(1-\frac{\beta}{n}\right)\alpha_n\left|\frac{1}{\Omega_0\mathrm{e}^{-t}}\int_0^{\Omega_0\mathrm{e}^{-t}}v^*(s)\mathrm{d}s\int_0^{\Omega_0\mathrm{e}^{-t}}\varphi_1^*(s)\mathrm{d}s+\int_{\Omega_0\mathrm{e}^{-t}}^{\infty}v^*(s)\varphi_1^*(s)\mathrm{d}s\right|^{\frac{n}{n-1}}\right)g^*(t)\mathrm{d}t\\
&=\Omega_0\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-F(t)}\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

这里

$$F(t)=t-\left(1-\frac{\beta}{\alpha}\right)\alpha_n\left|\frac{1}{\Omega_0\mathrm{e}^{-t}}\int_0^{\Omega_0\mathrm{e}^{-t}}v^*(s)\mathrm{d}s\int_0^{\Omega_0\mathrm{e}^{-t}}\varphi_1^*(s)\mathrm{d}s+\int_{\Omega_0\mathrm{e}^{-t}}^{\infty}v^*(s)\varphi_1^*(s)\mathrm{d}s\right|^{\frac{n}{n-1}}-\ln g^*\left(\Omega_0\mathrm{e}^{-t}\right)$$

令

$$\begin{aligned}
\psi(t)&=\sqrt{\Omega_0\mathrm{e}^{-t}}v^*\left(\Omega_0\mathrm{e}^{-t}\right),\\
\varphi(t)&=\sqrt{\alpha_n\Omega_0\mathrm{e}^{-t}}\varphi_1^*\left(\Omega_0\mathrm{e}^{-t}\right)
\end{aligned}$$

则 $F(t)$ 可以表示成如下的形式：

$$\begin{aligned}
F(t)&=t-\left(1-\frac{\beta}{n}\right)\left(\mathrm{e}^t\int_t^{\infty}\mathrm{e}^{-\frac{s}{2}}\psi(s)\mathrm{d}s\int_t^{\infty}\mathrm{e}^{-\frac{s}{2}}\varphi(s)\mathrm{d}s+\int_{-\infty}^t\psi(s)\varphi(s)\mathrm{d}s\right)^{\frac{n}{n-1}}-\ln g^*\left(\Omega_0\mathrm{e}^{-t}\right)\\
&=t-\left(1-\frac{\beta}{n}\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty}a(s,t)\varphi(s)\mathrm{d}s\right)^{\frac{n}{n-1}}-\ln g^*\left(\Omega_0\mathrm{e}^{-t}\right)
\end{aligned}$$

令 $a(s,t)$ 为如下形式

$$a(s,t)=\begin{cases}\varphi(s),\ s<t\\ \mathrm{e}^t\left(\int_t^{\infty}\mathrm{e}^{-\frac{r}{2}}\varphi(r)\mathrm{d}r\right)\mathrm{e}^{-\frac{s}{2}},\ s>t\end{cases}$$

下面我们需要证明 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-F(t)}\mathrm{d}t<C$。这里的 C 是 φ 有关的常数。(从现在开始，我们统一用 C 表示某个合适的正常数，可能行与行之间是不同的数)。现在，我们需要证明：

1) 存在与 φ 有关的常数满足 $\inf_{t\ge 0}F(t)\ge -C$；

2) 设 $E_\lambda=\{t\ge 0:F(t)\le\lambda\}$，那么存在依赖于 φ 的两个常数 C_1 和 C_2 满足

$$\left|E_\lambda\right| \le C_1\left|\lambda\right| + C_2 .$$

参考[7]中引理 5.1 的方法可知

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(s,t)\psi(s)\mathrm{d}s\right)^{\frac{n}{n-1}} \le t + C .$$

这里的 C 是与 φ 有关的常数，结合 $g^*(t) \le \left(\frac{nt}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{\beta}{n}}$ 可得

$$\begin{aligned}
F(t) &= t - \left(1-\frac{\beta}{n}\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} a(s,t)\psi(s)\mathrm{d}s\right)^{\frac{n}{n-1}} - \ln g^*\left(\Omega_0 \mathrm{e}^{-t}\right) \\
&\ge t - \left(1-\frac{\beta}{n}\right)(t+C) + \frac{\beta}{n}\left(\ln\frac{n\Omega_0}{\omega_{n-1}} - t\right) \\
&= \left(\frac{\beta}{n}-1\right) + \frac{\beta}{n}\ln\frac{n\Omega_0}{\omega_{n-1}} \\
&= C
\end{aligned}$$

1) 得证

下面，我们证明 2)。设 $R>0$，不失一般性，假设 $E_\lambda \cap [R,\infty) \ne \phi$。设 $t_1, t_2 \in E_\lambda \cap [R,\infty) \ne \phi$，并且 $t_1 > t_2$。那么，经过计算可得：

$$\begin{aligned}
t_2 - \lambda &\le \left(1-\frac{\beta}{n}\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} a(s,t)\psi(s)\mathrm{d}s\right)^{\frac{n}{n-1}} + \ln g^*\left(\Omega_0 \mathrm{e}^{-t}\right) \\
&\le \left(1-\frac{\beta}{n}\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} a(s,t)\psi(s)\mathrm{d}s\right)^{\frac{n}{n-1}} - \frac{\beta}{n}\left(\ln\frac{n\Omega_0}{\omega_3} - t_2\right)
\end{aligned}$$

因此

$$t_2 - \lambda \le \left(1-\frac{\beta}{n}\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} a(s,t)\psi(s)\mathrm{d}s\right)^{\frac{n}{n-1}} - \frac{\beta}{n}\left(\ln\frac{n\Omega_0}{\omega_3} - t_2\right)$$

后续计算完全类似于文献[10]的方法，此处我们略去这些计算。

定理 1. 设 $n \ge 2, 0 \le \beta \le n$，则对任意的 $0 \le \lambda \le \left(\frac{n-1}{n}\right)^n$，

$$\sup_{u\in W^{1,n}(H^n), \|\nabla_g u\|_{n,g}^n - \lambda\|u\|_{n,g}^n \le 1} \int_{B^n} \frac{\phi_n\left(\alpha_n\left(1-\frac{\beta}{n}\right)|u|^{\frac{n}{n-1}}\right)}{\rho^\beta} \mathrm{d}V_0 l_g < \infty \tag{1.6}$$

成立，而且，当 $\alpha > \alpha_n$ 时，上式取不到上确界。

证明：由[11]可知

$$\frac{1}{\rho^\beta} \le 1 + \frac{1}{\rho^\beta J(\theta,\rho)} \cdot \underset{\theta\in R^{n-1},\rho\in[0,1]}{J}(\theta,\rho) \le \left(1+\frac{1}{\rho^\beta J(\theta,\rho)}\right)C .$$

则

$$
\begin{aligned}
&\int_{B^n}\frac{\phi_n\left(\alpha_n\left(1-\frac{\beta}{n}\right)|u|^{\frac{n}{n-1}}\right)}{\rho^\beta}\mathrm{d}V_0 l_g\\
&\le\int_{B^n}\frac{\phi_n\left(\alpha_n\left(1-\frac{\beta}{n}\right)\left|u_g^{\#}(x)\right|^{\frac{n}{n-1}}\right)}{\rho^\beta}\mathrm{d}V_0 l_g\\
&\le c\int_{B^n}\frac{\phi_n\left(\alpha_n\left(1-\frac{\beta}{n}\right)\left|u_g^{\#}\right|^{\frac{n}{n-1}}\right)}{\rho^\beta}\mathrm{d}V_0 l_g+C\int_{B^n}\phi_n\left(\alpha_n\left(1-\frac{\beta}{n}\right)\left|u_g^{\#}\right|^{\frac{n}{n-1}}\right)\mathrm{d}V_0 l_g\\
&=C(I+II)
\end{aligned}
$$

由引理 1 可得 $I\le C$，由[12]中定理 1 可得 $II\le C$。

注意到，定理(1)中的 λ 达不到 $\left(\frac{n-1}{n}\right)^n$，一个很自然的问题是什么条件下 λ 可以取到 $\left(\frac{n-1}{n}\right)^n$，下面的定理 2 给出了回答。

定理 2： 设 $n\ge 2$，$0<\beta<n$，则当 $\alpha<\alpha_n$ 时

$$
\sup_{u\in W^{1,n}(H^n),\|\nabla_g u\|_{n,g}^n-\frac{n-1}{n}\|u\|_{n,g}^n\le 1}\int_{B^n}\frac{\phi_n\left(\alpha\left(1-\frac{\beta}{n}\right)|u|^{\frac{n}{n-1}}\right)}{\rho^\beta}\mathrm{d}V_0 l_g\le C\left(\|u\|_{n,g}^{n-\beta}+\|u\|_{n,g}^n\right) \tag{1.7}
$$

成立。

证明：

$$
\begin{aligned}
&\int_{B^n}\frac{\phi_n\left(\alpha\left(1-\frac{\beta}{n}\right)|u|^{\frac{n}{n-1}}\right)}{(1+|u|)^{\frac{n}{n-1}}\rho^\beta}\mathrm{d}V_0 l_g\\
&\le C\int_{B^n}\frac{\phi_n\left(\alpha\left(1-\frac{\beta}{n}\right)|u|^{\frac{n}{n-1}}\right)}{(1+|u|)^{\frac{n}{n-1}}\rho^\beta J(\theta,\rho)}\mathrm{d}V_0 l_g+C\int_{B^n}\frac{\phi_n\left(\alpha\left(1-\frac{\beta}{n}\right)|u|^{\frac{n}{n-1}}\right)}{(1+|u|)^{\frac{n}{n-1}}}\mathrm{d}V_0 l_g\\
&=C(I_1+I_2)
\end{aligned}
$$

由[13]中 Adachi-Tabaka 不等式可知，如果 $u\in W^{1,n}(B^n),\|\nabla_g u\|_{n,g}^n-\left(\frac{n-1}{n}\right)^n\|u\|_{n,g}^n\le 1$，当 $\alpha<\alpha_n$ 时有

$$
\begin{aligned}
I_2&=\int_{B^n}\frac{\phi\left(\alpha\left(1-\frac{\beta}{n}\right)|u|^{\frac{n}{n-1}}\right)}{(1+|u|)^{\frac{n}{n-1}}}\mathrm{d}V_0 l_g\\
&\le\int_{B^n}\frac{\phi\left(\alpha|u|^{\frac{n}{n-1}}\right)}{(1+|u|)^{\frac{n}{n-1}}}\mathrm{d}V_0 l_g\\
&\le\|u\|_{n,g}^n
\end{aligned}
$$

$J(\theta,\rho)=\left(\frac{\sinh\rho}{\rho}\right)^{n-1}$，令 $g(\rho)=\frac{1}{\rho^{\beta}J(\theta,\rho)}$ 那么 $g^{*}(t)=\left(\frac{nt}{\omega_{n-1}}\right)^{-\frac{\beta}{n}}$，再令 $h(x)=\frac{1}{|x|^{\beta}}$，那么 $h^{*}(t)=\left(\frac{nt}{\omega_{n-1}}\right)^{-\frac{\beta}{n}}$，由 1.4 和[14]可得当 $\alpha\le\alpha_n$ 时

$$\begin{aligned}I_1&\le\int_{R^n}\frac{\phi_n\left(\alpha\left(1-\frac{\beta}{n}\right)u_e^{\#\frac{n}{n-1}}\right)}{\left(1+\left|u_e^{\#}\right|\right)^{\frac{n}{n-1}}|x|^{\beta}}\mathrm{d}x\\&\le\int_{R^n}\frac{\phi_n\left(\alpha\left(1-\frac{\beta}{n}\right)u_e^{\#\frac{n}{n-1}}\right)}{\left(1+\left|u_e^{\#}\right|\right)^{\frac{n}{n-1}\left(1-\frac{\beta}{n}\right)}|x|^{\beta}}\mathrm{d}x\\&\le C\left\|u_e^{\#}\right\|_n^{n-\beta}\\&\le C\|u\|_{n,g}^{n-\beta}\end{aligned}$$

因此，

$$\int_{B^n}\frac{\phi_n\left(\alpha\left(1-\frac{\beta}{n}\right)|u|^{\frac{n}{n-1}}\right)}{\left(1+|u|\right)^{\frac{n}{n-1}}\rho^{\beta}}\mathrm{d}V_0 l_g\le C\left(\|u\|_{n,g}^{n-\beta}+\|u\|_{n,g}^{n}\right)$$

即：

$$\sup_{u\in W^{1,n}(H^n),\|\nabla_g u\|_{n,g}^{n}-\left(\frac{n-1}{n}\right)^n\|u\|_{n,g}^{n}\le 1}\frac{1}{\|u\|_{n,g}^{n-\beta}+\|u\|_{n,g}^{n}}\int_{B^n}\frac{\phi_n\left(\alpha\left(1-\frac{\beta}{n}\right)|u|^{\frac{n}{n-1}}\right)}{\left(1+|u|\right)^{\frac{n}{n-1}}\rho^{\beta}}<\infty$$

我们注意到：当 $\lambda=0,\beta=0$ 时，定理 1 包含 Moser-Trudinger 不等式。(1.4)作为特殊情况之一；当 $\beta=0$ 时，定理 1 是[12]中定理 1.1 改进的形式，而且，根据(1.4)中常数的最佳性质，可以知道(1.7)中 $\alpha_n\left(1-\frac{\beta}{n}\right)$ 也是最佳的。在断点情况，即当 $\lambda=\left(\frac{n-1}{n}\right)^n$ 时，(1.7)中的上确界是取不到，此情形下，[14] [15]把 Hardy-Moser-Trudinger 不等式从[16]的二维空间推广到了任意维数空间。

参考文献

[1] Wolf, J. (1967) Space of Constant Curvature. McGraw-Hill, New York.

[2] Lam, N. and Lu, G. (2013) A New Approach to Sharp Moser-Trudinger and Adams Type Inequalities: A Rearrangement-Free Argument. *Journal of Differential Equations*, **255**, 298-325. https://doi.org/10.1016/j.jde.2013.04.005

[3] Lam, N. and Lu, G. (2012) Sharp Moser-Trudinger Inequality in the Heisenberg Group at the Critical Case and Applications. *Advances in Mathematics*, **231**, 3259-3287. https://doi.org/10.1016/j.aim.2012.09.004

[4] Lam, N., Lu, G. and Tang, H. (2017) Sharp Affine and Improved Moser-Trudinger-Adams Type Inequalities on Unbounded Domains in the Spirit of Lions. *Journal of Geometric Analysis*, **27**, 300-334. https://doi.org/10.1007/s12220-016-9682-2

[5] Lam, N., Lu, G. and Tang, H. (2014) Sharp Subcritical Moser-Trudinger Inequalities on Heisenberg Groups and Subel-

liptic PDEs. *Nonlinear Analysis*, **95**, 77-92. https://doi.org/10.1016/j.na.2013.08.031

[6] Lam, N., Lu, G. and Zhang, L. (2017) Equivalence of Critical and Subcritical Sharp Trudinger-Moser-Adams Inequalities. *Revista Matemática Iberoamericana*, **33**, 1219-1246. https://doi.org/10.4171/RMI/969

[7] Lu, G. and Yang, Q. (2017) Sharp Hardy-Adams Inequalities for Bi-Laplacian on Hyperbolic Space of Dimension Four. *Advances in Mathematics*, **319**, 567-598. https://doi.org/10.1016/j.aim.2017.08.014

[8] Li, J.G., Lu, G. and Yang, Q. (2018) Fourier Analysis and Optimal Hardy-Adams Inequalities on Hyperbolic Spaces of Any Even Dimension. *Advances in Mathematics*, **333**, 350-385.

[9] O'Neil, R. (1963) Convolution Operators and L(p,q) Spaces. *Duke Mathematical Journal*, **30**, 129-142. https://doi.org/10.1215/S0012-7094-63-03015-1

[10] Adams, D. (1988) A Sharp Inequality of J. Moser for Higher Order Derivatives. *Annals of Mathematics*, **128**, 385-398. https://doi.org/10.2307/1971445

[11] Dong, Y. and Yang, Q. (2016) An Interpolation of Hardy Inequality and Moser-Trudinger Inequality on Riemannian Manifolds with Negative Curvature. *Acta Mathematica Sinica, English Series*, **32**, 856-866. https://doi.org/10.1007/s10114-016-5129-8

[12] Nguyen, V.H. (2018) Improved Moser-Trudinger Type Inequalities in the Hyperbolic Space H. *Nonlinear Analysis*, **168**, 67-80. https://doi.org/10.1016/j.na.2017.11.009

[13] Adachi, S. and Tanaka, K. (2000) Trudinger Type Inequalities in {R} N and Their Best Exponents. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **128**, 2051-2057. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-99-05180-1

[14] Lam, N. and Lu, G. (2015) Sharp Singular Trudinger-Moser-Adams Inequalities with Exact Growth. In: *Geometric Methods in PDE's*, Springer, Berlin, 43-80.

[15] Nguyen, V.H. (2019) The Sharp Hardy-Moser-Trudinger Inequality in Dimension N.

[16] Wang, G. and Ye, D. (2012) A Hardy-Moser-Trudinger Inequality. *Advances in Mathematics*, **230**, 294-320. https://doi.org/10.1016/j.aim.2011.12.001