Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2021, 10(2), 548-556
Published Online February 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2021.102060

Hans汉斯

一类具有脉冲控制的传染性害虫模型*

王桂珍[1]，卓相来[2#]

[1]泰山职业技术学院，山东 泰安
[2]山东科技大学数学与系统科学学院，山东 青岛
Email: tawgzh@163.com, #xlzhuo@126.com

收稿日期：2021年1月23日；录用日期：2021年2月17日；发布日期：2021年2月25日

摘 要

我们首先建立了具有脉冲控制的有关传染性害虫的数学模型，其模型是脉冲微分方程。进而，得到了控制变量的某个临界值。当有传染性的害虫的周期释放数目比这临界值大时，就会存在一个全局渐近稳定的边界周期解；当有传染性的害虫的释放数目比这临界值小时，该系统是持久的，这表示平凡的边界周期解失去了它的稳定性。

关键词

全局渐近稳定性，脉冲控制，持久性

A Class of Mathematical Model Concerning Impulsive Pest Control Strategies*

Guizhen Wang[1], Xianglai Zhuo[2#]

[1]Taishan Polytechnic, Tai'an Shandong
[2]College of Mathematics and Systems Science, Shandong University of Science and Technology, Qingdao Shandong
Email: tawgzh@163.com, #xlzhuo@126.com

Received: Jan. 23rd, 2021; accepted: Feb. 17th, 2021; published: Feb. 25th, 2021

Abstract

In this paper, we first propose a mathematical model concerning an impulsive pest control strategies. Therefore, our models are the impulsive differential equations. And then we obtain some

*山东省本科高校教学改革研究项目，项目批准号：2015M139。
#通讯作者。

文章引用: 王桂珍, 卓相来. 一类具有脉冲控制的传染性害虫模型[J]. 应用数学进展, 2021, 10(2): 548-556.
DOI: 10.12677/aam.2021.102060

critical value of control variable. It is observed that there exists a globally asymptotically stable boundary periodic solution when the amount of infective pests released periodically is larger than this critical value. When the amount of infective pests released is less than this critical value, the system is shown to be permanent, which implies that the trivial boundary periodic solution loses its stability.

Keywords

Global Asymptotic Stability, Impulsive Control, Persistence

1. 引言

随着社会的发展、科学和技术的不断进步，越来越多的农药被用来控制农作物害虫，因为它们能快速地杀死大量成群的害虫，而且有时也是防止粮食减产的惟一可行的方法。然而，人们也逐渐认识到：如此多的农药被广泛地使用，既是人类健康的一个主要杀手，同时也是造成自然环境破坏的一个重要因素。因此，得到很多学者的关注，研究问题主要涉及环境分析和害虫群动力系统的研究。其目的就是利用所有可能的技术及合适的方法使害虫保持在一个恰当的可以控制的范围之内，只要不对经济造成损失即可。

最近，害虫控制模型被很多学者关注[1]-[7]，而且也得到了很多结果。正如我们所知道的，大多数的关于流行病模型的研究报告常常假设疾病孵化可以忽略不计，因此，一旦被感染，每个易受感染的个体(S)立刻成为有传染性的(I)，并且后来获得永久的或暂时的后天免疫性的恢复(R)。建立在这些假设下的模型经常被称作 SIR 或 SIRS 模型。在假设易得病的人满足 logistic 方程，影响速度具有 kIS^q 形式，而且在总数不是常数的情况下，文[8]研究了 SIR 流行病模型。

2. 问题的提出

利用有害物去控制和传染疾病。也即研究用一种流行疾病去控制一种害虫群的控制问题，控制变量是被感染害虫的释放速度。利用控制变量的一个最小变化，使害虫群保持在一个确定的水平之下；我们还假设：被感染的害虫的释放是连续的或具有脉冲性质。因此，我们建立的模型是常微分方程或脉冲微分方程。关于脉冲微分方程的应用在文[9] [10] [11]中有系统的研究。

为了行文方便，我们提出下面的假设

(H_1)害虫群被分为两类：一类是易受感染的；另一类是有传染性的。

(H_2)易受感染的害虫满足 logistic 增长，而有传染性的疾病通过媒介传播，即传染速度可以用 $\beta S^{2n} I$ 表示。

(H_3)害虫群的总数不是常数，是可以变化的。

并在此基础上建立了下面的数学模型

$$\begin{cases} \dot{S} = rS\left(1-\dfrac{S+\theta I}{k}\right)-\beta S^{2n}I, \\ \dot{I} = \beta S^{2n}I-\omega I+u. \end{cases} \tag{1}$$

和

$$\begin{cases}\dot{S}=rS\left(1-\dfrac{S+\theta I}{k}\right)-\beta S^{2n}I,\ t\neq n\tau,\\ \dot{I}=\beta S^{2n}I-\omega I,\ t\neq n\tau,\\ \Delta I=I\left(t^{+}\right)-I\left(t\right)=\tau u,t=n\tau,\ n=1,2,\cdots.\end{cases}\tag{2}$$

其中，S 和 I 分别表示易受感染的害虫和有传染性的害虫的密度；$r>0$ 表示易受感染害虫的固有增长率；$k>0$ 表示害虫适应环境的能力；$\beta>0$ 表示感染速率；$\omega>0$ 表示有传染性的害虫的死亡率；$0<\theta<1$；$u>0$ 表示被感染害虫的释放速度。在系统(2)中，τ 是脉冲调制周期，τu 表示在每个时间 τ 内受脉冲作用的被感染害虫的总数。

文[12]进一步给出两个假设：

(H_4)被感染的害虫永远不能恢复，有传染性的害虫能再生，而且对作物无损害，而易受感染的害虫可以对作物造成损伤。

(H_5)存在一个临界值 S^M，对于害虫损害来讲，S^M 代表一个最具经济意义的水平。

并得到关于 S，I 的流行病模型为

$$\begin{cases}\dot{S}=rS\left(1-\dfrac{S+\theta I}{k}\right)-\beta S^{2n}I=P\left(S,I\right),\\ \dot{I}=\beta S^{2n}I-\omega I=Q\left(S,I\right).\end{cases}\tag{3}$$

文[12]研究了一类具有连续控制的有关传染性害虫的数学模型即系统(1)和(3)正平衡点的全局渐近稳定性，并得到了控制变量的最小上界。在这篇文章里，我们将继续对一类具有脉冲释放的数学模型，即系统(2)进行研究。

3. 被感染害虫的脉冲释放

为了便于陈述和证明我们的主要结果，我们首先给出下面的定义、符号和引理。记 $R_+=[0,\infty)$，$x(t)=\left(S(t),I(t)\right)\in R_+^2$，$f=\left(f_1,f_2\right)^{\mathrm{T}}$ 表示系统(2)的右边函数 $V:R_+\times R_+^2\to R_+$，而 V 被称作具有 V_0 级是指

1) V 在 $\left(n\tau,(n+1)\tau\right]\times R_+^2$ 上是连续的，而且对于任意的 $x\in R_+^2, n\in Z_+$，极限

$$\lim_{(t,y)\to\left(n\tau^{+},x\right)}V\left(t,y\right)=V\left(n\tau^{+},x\right)$$

存在有限。

2) V 关于 x 满足局部 Lipschitzian 条件。

定义 3.1

对于 $V\in V_0$，$(t,x)\in\left(n\tau,(n+1)\tau\right]\times R_+^2$，定义

$$D^{+}V\left(t,x\right)=\lim_{h\to 0^{+}}\sup\frac{1}{h}\left[V\left(t+h,x+hf\left(t,x\right)\right)-V\left(t,x\right)\right].$$

记系统(2)的解为 $x(t)=\left(S(t),I(t)\right):R_+\to R_+^2$，$x(t)$ 在 $\left(n\tau,(n+1)\tau\right]\times R_+^2, n\in Z_+$ 上是连续可微的，而且 $x\left(n\tau^{+}\right)=\lim\limits_{t\to n\tau^{+}}x(t)$ 存在。由于系统(2)具有光滑性[5]，所以系统(2)的解是全局存在惟一的。

下面的引理是明显的。

引理 3.1 假设 $x(t)$ 是系统(2)的一个解，满足 $x\left(0^{+}\right)\geq 0$，那么对于所有的 $t\geq 0$，都有 $x(t)\geq 0$。而且，

如果 $x\left(0^{+}\right)>0$，那么对于所有的 $t>0$，都有 $x(t)>0$。

引理 3.2 (比较定理，[12])记 $V: R_{+}\times R_{+}^{2}\to R_{+}$， $V\in V_{0}$，假设

$$\begin{cases} D^{+}V\left(t,x(t)\right)\le g\left(t,V\left(t,x(t)\right)\right),\ t\ne n\tau, \\ V\left(t,x\left(t^{+}\right)\right)\le \Psi_{n}\left(V\left(t,x(t)\right)\right),\quad t=n\tau, \end{cases} \tag{4}$$

这里 $g: R_{+}\times R_{+}\to R$ 在 $\left(n\tau,(n+1)\tau\right]\times R_{+}$ 上连续，而且对于任意的 $z\in R_{+}$， $n\in Z_{+}$，极限

$$\lim_{(t,y)\to\left(n\tau^{+},z\right)} g(t,y)=g\left(n\tau^{+},z\right)$$

存在有限； $\Psi_{n}: R_{+}\to R_{+}$ 单调不减。记 $R(t)$ 是下面脉冲微分方程

$$\begin{cases} \dot{v}(t)=g\left(t,v(t)\right),\ t\ne n\tau, \\ v\left(t^{+}\right)=\psi_{n}\left(v(t)\right),\ t=n\tau, \\ v\left(0^{+}\right)=v(0), \end{cases} \tag{5}$$

在 $[0,+\infty)$ 上的最大解。那么只要 $V\left(0^{+},x_{0}\right)\le v_{0}$ 就有 $V\left(t,x(t)\right)\le R(t)$，$t\ge 0$，这里 $x(t)$ 是系统(2)的任一解。

往下，我们将证明系统(2)解的最终一致有界性。

引理 3.3 存在 $M_{2}>0$，使得对于系统(2)的任一解 $\left(S(t),I(t)\right)$，只要 t 充分大，就有 $S(t)\le M_{2}$， $I(t)\le M_{2}$。

证明 定义函数 $V(t)=S(t)+I(t)$，通过直接计算可得

$$\begin{cases} D^{+}V(t)+\omega V(t)=(r+\omega)S-\dfrac{rS^{2}+r\theta SI}{k},\ t\ne n\tau, \\ V\left(n\tau^{+}\right)=V(n\tau)+\tau u,\ n=1,2,\cdots. \end{cases} \tag{6}$$

易知方程(6)的右边函数有界。因此，存在 $L>0$ 使得

$$\begin{cases} D^{+}V(t)+\omega V(t)<L,\ t\ne n\tau, \\ V\left(n\tau^{+}\right)=V(n\tau)+\tau u,\ n=1,2,\cdots. \end{cases}$$

由比较定理知，对于任意的 $t\in\left(n\tau,(n+1)\tau\right]$ 有

$$V(t)\le\left(V\left(0^{+}\right)-\frac{L}{\omega}\right)\mathrm{e}^{-\omega t}+\frac{\tau u\left(1-\mathrm{e}^{-n\omega\tau}\right)}{1-\mathrm{e}^{-\omega\tau}}\mathrm{e}^{-\omega(t-n\tau)}+\frac{L}{\omega}$$

因此 $V(t)$ 最终有界，于是存在 $M_{2}>0$，使得对于系统(2)的任一解 $\left(S(t),I(t)\right)$，只要 t 充分大，就有 $S(t)\le M_{2}$， $I(t)\le M_{2}$。证毕。

下面，我们考虑系统(2)的辅助系统

$$\begin{cases} I'(t)=-\omega I(t),\ t\ne n\tau, \\ \Delta I(t)=I\left(t^{+}\right)-I(t)=\tau u,\ t=n\tau, \\ I\left(0^{+}\right)=I_{0}\ge 0. \end{cases} \tag{7}$$

当 $n\tau<t<(n+1)\tau$ 时，系统(7)的解是

$$I(t)=\left(I\left(0^{+}\right)-\frac{\tau u}{1-\mathrm{e}^{-\omega\tau}}\right)\mathrm{e}^{-\omega t}+\frac{\tau u\mathrm{e}^{-\omega(t-n\tau)}}{1-\mathrm{e}^{-\omega\tau}}.$$

由此我们得到

引理 3.4 系统(7)有一个正周期解 $I^*(t)$，而且对于系统(7)的任一个解 $I(t)$，当 $t\to\infty$ 时，总有 $\left|I(t)-I^*(t)\right|\to 0$。这里 $I^*(t)=\dfrac{\tau u\mathrm{e}^{-\omega(t-n\tau)}}{1-\mathrm{e}^{-\omega\tau}}$，$I^*(0^+)=\dfrac{\tau u}{1-\mathrm{e}^{-\omega\tau}}$。

现在，我们研究系统(2)的边界周期解的稳定性。易知系统(2)有一个边界周期解 $\left(0,I^*(t)\right)$。即

$$\left(0,I^*(t)\right)=\left(0,\frac{\tau u\mathrm{e}^{-\omega(t-n\tau)}}{1-\mathrm{e}^{-\omega\tau}}\right),\quad n\tau<t\le(n+1)\tau .$$

定理 3.1 系统(2)的边界周期解 $\left(0,I^*(t)\right)$ 是全局渐近稳定的，只要

$$u>\frac{k\omega}{\theta}. \tag{8}$$

证明 通过研究解的微小参数扰动，我们可以确定边界周期解 $\left(0,I^*(t)\right)$ 的稳定性。

记 $\left(S(t),I(t)\right)$ 是系统(2)的任一解，而且 $S(t)=u_1(t)$，$I(t)=u_2(t)+I^*(t)$。系统(2)在 $\left(0,I^*(t)\right)$ 的相应线性系统是

$$\begin{cases}\dot{u}_1(t)=ru_1-\dfrac{r\theta I^*(t)u_1}{k}, & t\ne n\tau,\\ \dot{u}_2(t)=-\omega u_2, & t\ne n\tau,\\ u_1(t^+)=u_1(t), & t=n\tau,\\ u_2(t^+)=u_2(t), & t=n\tau.\end{cases} \tag{9}$$

记 $\phi(t)$ 是(9)的基解矩阵，则 $\phi(t)$ 满足

$$\frac{\mathrm{d}\phi(t)}{\mathrm{d}t}=\begin{pmatrix} r-\dfrac{r\theta I^*(t)}{k} & 0\\ 0 & -\omega\end{pmatrix}\phi(t)=A\phi(t), \tag{10}$$

而且 $\phi(0)=I$，这里 I 是单位矩阵。因此，基解矩阵是

$$\phi(t)=\begin{pmatrix}\exp\left(\int_0^t\left(r-\dfrac{r\theta}{k}I^*(s)\right)\mathrm{d}s\right) & 0\\ \Delta & \exp(-\omega t)\end{pmatrix}.$$

这里我们忽略矩阵中 Δ 的精确表达式，因为下面的研究过程用不到。

系统(9)的第 3 和第 4 个方程可以写为

$$\begin{pmatrix}u_1(n\tau^+)\\ u_2(n\tau^+)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1(n\tau)\\ u_2(n\tau)\end{pmatrix}.$$

边界周期解 $\left(0,I^*(t)\right)$ 的稳定性由下面的单位矩阵的特征值决定。

$$M=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\phi(\tau)=\phi(\tau).$$

这里

$$\lambda_1=\mathrm{e}^{-\omega\tau}<1,\quad \lambda_2=\exp\left(\int_0^\tau\left(r-\frac{r\theta}{k}I^*(s)\right)\mathrm{d}s\right).$$

由 Floquet 理论[4]，如果$|\lambda_2|<1$，也即条件(8)成立，则边界周期解$\left(0, I^*(t)\right)$是局部稳定的。

下面，我们将证明全局吸引性。给定$\varepsilon>0$，使得$\rho=\exp\left(\int_0^\tau\left(r-\frac{r\theta}{k}\left(I^*(s)-\varepsilon\right)\right)\mathrm{d}s\right)<1$。

注意$\dot{I}(t)\geq-\omega I(t)$，由引理 3.2 和 3.3，只要 t 充分大，就有

$$I(t)>I^*(t)-\varepsilon . \tag{11}$$

为简化计，我们假设(11)对任意的$t\geq 0$成立。因此由方程(2)和(11)得

$$\dot{S}(t)\leq rS(t)\left(1-\frac{\theta}{k}\left(I^*-\varepsilon\right)\right) \tag{12}$$

在区间$\left(n\tau,(n+1)\tau\right]$积分(12)得

$$S\left((n+1)\tau\right)\leq S(n\tau)\exp\left(\int_{n\tau}^{(n+1)\tau}\left(r-\frac{r\theta}{k}\left(I^*(t)-\varepsilon\right)\right)\mathrm{d}t\right)=S(n\tau)\rho.$$

于是，当$n\to\infty$时，$S(n\tau)\leq S\left(0^+\right)\rho^n\to 0$，所以当$t\to\infty$时，$S(t)\to 0$。

往下我们证明当$t\to\infty$时，$I(t)\to I^*(t)$。对于$0<\varepsilon\leq\omega$，存在$t_0>0$，使对所有的$t\geq t_0$都有$0<\beta S^{2n}<\varepsilon$。不失一般性，假设对所有的$t\geq 0$都有$0<\beta S^{2n}<\varepsilon$，于是由系统(3)得

$$-\omega I(t)\leq\dot{I}(t)=\beta S^{2n}I(t)-\omega I(t)\leq(\varepsilon-\omega)I(t) \tag{13}$$

由引理 3.2 和 3.3 得$y_1(t)\leq I(t)\leq y_2(t)$，而且当$t\to\infty$时，$y_1(t)\to I^*(t), y_2(t)\to y_2^*(t)$，这里$y_1(t)$，$y_2(t)$分别是下述系统的解；

$$\begin{cases} y_1'(t)=-\omega y_1(t),\ t\neq n\tau, \\ \Delta y_1(t)=y_1\left(t^+\right)-y_1(t)=\tau u,\ t=n\tau, \\ y_1\left(0^+\right)=I_0\geq 0, \end{cases} \tag{14}$$

和

$$\begin{cases} y_2'(t)=(\varepsilon-\omega)y_2(t),\ t\neq n\tau, \\ \Delta y_2(t)=y_2\left(t^+\right)-y_2(t)=\tau u,\ t=n\tau, \\ y_2\left(0^+\right)=I_0\geq 0, \end{cases} \tag{15}$$

$$y_2^*(t)=\frac{\tau u\mathrm{e}^{(\varepsilon-\omega)(t-n\tau)}}{1-\mathrm{e}^{(\varepsilon-\omega)\tau}}, n\tau<t\leq(n+1)\tau .$$

因此，只要 t 充分大，ε_1充分小，就有$I^*(t)-\varepsilon_1<I(t)<y_2^*(t)+\varepsilon_1$。由于当$\varepsilon\to 0$时，$y_2^*(t)\to I^*(t)$，因此，当$t\to\infty$时，$I(t)\to I^*(t)$。证毕。

注意 由定理 3.1，我们得到了控制变量的某个临界值，当有传染性的害虫的周期释放数目比这临界值大时，就会存在一个全局渐近稳定的边界周期解。

往下我们将研究系统(2)的持久性，为了方便，我们先给出下面的定义：

定义 3.2 如果存在正常数$M\geq m>0$（与S, I的初值无关)和确定的时间T_0，使得对于系统(2)的任一解$\left(S(t), I(t)\right)$，只要$S\left(0^+\right)>0$，$I\left(0^+\right)>0$，对于任意的$t>T_0$（T_0可以与初值$\left(S\left(0^+\right), I\left(0^+\right)\right)$有关)，总有$m\leq S(t)\leq M$，$m\leq I(t)\leq M$，则称系统(2)是持久的。

定理 3.2 系统(2)是持久的，只要

$$u<\frac{k\omega}{\theta}. \tag{16}$$

证明 假设$\left(S(t),I(t)\right)$是系统(2)的满足$S(0)>0,\ I(0)>0$的任一解，由引理 3.3，存在正常数$M(<L)$，只要 t 充分大，就有$S(t)\le M$，$I(t)\le M$。为方便计，假设对所有的$t\ge 0$都有$S(t)\le M$，$I(t)\le M$。由(11)得，只要 t 充分大，就有$I(t)>I^*(t)-\varepsilon$，于是$I(t)\ge\frac{\tau u\mathrm{e}^{-\omega t}}{1-\mathrm{e}^{-\omega\tau}}-\varepsilon_2\triangleq m_2$，$\varepsilon_2>0$。

因此，只要确定$m_1>0$使$S(t)\ge m_1$，分以下两步

1) 首先令$m_3>0,\ \varepsilon_1>0$充分小，使

$$m_3<\frac{\omega}{\beta},\ \delta=\beta m_3^{2n}-\omega<0,$$

$$\sigma=r\tau-\frac{rm_3\tau}{k}+\left(\frac{r\theta}{k}+m_3\beta\right)\frac{\tau u}{\delta}-m_3^{2n-1}\beta\varepsilon_1\tau>0,$$

$$\eta=r-\frac{rm_3}{k}-\frac{r\theta M}{k}-m_3^{2n-1}\beta M<0,$$

我们将证明$S(t)<m_3$不会对所有的$t\ge 0$成立。否则

$$\dot I(t)=\beta S^{2n}(t)I(t)-\omega I(t)\le I(t)\left(\beta m_3^{2n}-\omega\right)=\delta I(t)$$

由引理 3.2 和 3.3 得$I(t)\le y_3(t)$，而且当$t\to\infty$时$y_3(t)\to y_3^*(t)$，这里$y_3(t)$满足

$$\begin{cases}y_3'(t)=\left(\beta m_3^{2n}-\omega\right)y_3(t),\ t\ne n\tau,\\ \Delta y_3(t)=y_3\left(t^+\right)-y_3(t)=\tau u,\ t=n\tau,\\ y_3\left(0^+\right)=I_0\ge 0,\end{cases} \tag{17}$$

而且

$$y_3^*(t)=\frac{\tau u\mathrm{e}^{\delta(t-n\tau)}}{1-\mathrm{e}^{\delta\tau}},\ n\tau<t\le(n+1)\tau.$$

因此，存在$T_1>0$，只要$t>T_1$，就有

$$I(t)\le y_3(t)\le y_3^*(t)+\varepsilon_1$$

$$\dot S(t)\ge S(t)\left(r-\frac{rm_3}{k}-\frac{r\theta}{k}\left(y_3^*(t)+\varepsilon_1\right)-m_3^{2n-1}\beta\left(y_3^*(t)+\varepsilon_1\right)\right). \tag{18}$$

取$N_1\in Z_+$，满足$N_1\tau\ge T_1$，在区间$\left(n\tau,(n+1)\tau\right]$，$n>N_1$上积分(18)得

$$S\left((n+1)\tau\right)\ge S\left(n\tau^+\right)\exp\left(\int_{n\tau}^{(n+1)\tau}\Delta\mathrm{d}t\right)=S(n\tau)\mathrm{e}^{\sigma}.$$

这里$\Delta=r-\frac{rm_3}{k}-\frac{r\theta}{k}\left(y_3^*(t)+\varepsilon_1\right)-m_3^{2n-1}\beta\left(y_3^*(t)+\varepsilon_1\right)$。

于是，当$k\to\infty$时，$S\left((N_1+k)\tau\right)\ge S(N_1\tau)\mathrm{e}^{k\sigma}\to\infty$. 这与$S(t)$的有界性矛盾。因此，存在$t_1>0$，使$S(t_1)\ge m_3$。

2) 其次，如果$S(t)\ge m_3$对所有的$t\ge t_1$成立，结论自然成立。因此，我们只需考虑离开区域

$\Gamma=\left\{\left(S(t),I(t)\right)\in R_{+}^{2}:S(t)<m_3\right\}$ 后又进入该区域的那些解。记 $t^*=\inf_{t\ge t_1}\left\{t:S(t)<m_3\right\}$，则 $S(t)\ge m_3$，$t\in\left[t_1,t^*\right)$，且由于 $S(t)$ 连续，所以 $S\left(t^*\right)=m_3$。选取 $n_2,n_3\in Z_+$，使

$$n_2\tau>\frac{1}{\delta}\ln\frac{\varepsilon_1}{M+\tau u},\ \mathrm{e}^{n_2\eta\tau}\mathrm{e}^{n_3\sigma}>1.$$

记 $T=n_2\tau+n_3\tau$，则我们可以断言，存在 $t_2\in\left(t^*,t^*+T\right]$ 使得 $S\left(t_2\right)>m_3$。否则，我们在 $y_3^*\left(t^{*+}\right)=I\left(t^{*+}\right)$ 下考虑(17)得

$$y_3(t)=\left(y_3\left(\left(n_1+1\right)\tau^+\right)-\frac{\tau u}{1-\mathrm{e}^{\delta\tau}}\right)\mathrm{e}^{\left(t-\left(n_1+1\right)\tau\right)\delta}+y_3^*(t),\ n\tau<t\le(n+1)\tau,n_1+1<n<n_1+1+n_2+n_3.$$

于是

$$\left|y_3(t)-y_3^*(t)\right|<(M+\tau u)\mathrm{e}^{\left(t-\left(n_1+1\right)\tau\right)\delta}<\varepsilon_1,\ I(t)\le y_3(t)\le y_3^*(t)+\varepsilon_1,\ t^*+n_2\tau\le t\le t^*+T,$$

这说明(18)在区间 $t^*+n_2\tau\le t\le t^*+T$ 成立，与第一步类似可得 $S\left(t^*+T\right)\ge S\left(t^*+n_2\tau\right)\mathrm{e}^{n_3\sigma}$。于是由(2)的第一个方程得

$$\dot{S}(t)\ge S(t)\left(r-\frac{rm_3}{k}-\frac{r\theta M}{k}-m_3^{2n-1}\beta M\right)=\eta S(t).$$

在区间 $\left[t^*,t^*+n_2\tau\right]$ 上积分得 $S\left(t^*+n_2\tau\right)\ge S\left(t^*\right)\mathrm{e}^{n_2\eta\tau}=m_3\mathrm{e}^{n_2\eta\tau}$，因此，$S\left(t^*+T\right)\ge m_3\mathrm{e}^{n_2\eta\tau}\mathrm{e}^{n_3\sigma}>m_3$，矛盾。

记 $\bar{t}=\inf_{t\ge t^*}\left\{t:S(t)\ge m_3\right\}$，则 $S(\bar{t})\ge m_3$，于是对于任意的 $t\in\left[t^*,\bar{t}\right]$ 总有

$$S(t)\ge S\left(t^*\right)m_3\mathrm{e}^{\left(t-t^*\right)\eta}\ge m_3\mathrm{e}^{\left(n_2+n_3\right)\eta\tau}\triangleq m_1.$$

对于 $t>\bar{t}$，由于 $S(\bar{t})\ge m_3$，用类似的研究可得，对于任意的 $t\ge t_1$ 都有 $S(t)>m_1$。证毕。

注意 由定理 3.2，我们得到了控制变量的某个临界值，当有传染性的害虫的释放数目比这临界值小时，该系统是持久的，这表示平凡的边界周期解失去了它的稳定性。

参考文献

[1] Barclay, H.J. (1982) Models for Pest Control Using Predator Release, Habitat Management and Pesticide Release in Combination. *Journal of Applied Ecology*, **19**, 337-348. https://doi.org/10.2307/2403471

[2] Grasman, J., Van Herwaarden, O.A., Hemerik, L. and Van Lenteren, J.C. (2001) A Two-Component Model of Host-Parasitoid Interactions: Determination of the Size of Inundative Releases of Parasitoids in Biological Pest Control. *Mathematical Biosciences*, **169**, 207-216. https://doi.org/10.1016/S0025-5564(00)00051-1

[3] Tang, S.Y., Xiao, Y.N., Chen, L.S. and Cheke, R.A. (2005) Integrated Pest Management Models and Their Dynamical Behaviour. *Bulletin of Mathematical Biology*, **67**, 115-135. https://doi.org/10.1016/j.bulm.2004.06.005

[4] Van Lenteren, J.C. (1995) Integrated Pest Management in Protected Crops. In: Dent, D., Ed., *Integrated Pest Management*, Chapman and Hall, London, 311-320.

[5] Zhuo, X.L. and Zhang, F.X. (2018) Stability for a New Discrete Ratio-Dependent Predator-Prey System. *Qualitative Theory of Dynamical Systems* (*QTDS*), **17**, 189-202. https://doi.org/10.1007/s12346-017-0228-1

[6] Zhuo, X.L. (2018) Global Attractability and Permanence for a New Stage-Structured Delay Impulsive Ecosystem. *Journal of Applied Analysis and Computation* (*JAAC*), **8**, 457-457. https://doi.org/10.11948/2018.457

[7] Li, Y.Y., Zhang, F.X. and Zhuo, X.L. (2020) Flip Bifurcation of a Discrete Predator-Prey Model with Modified Leslie-Gower and Holling-Type III Schemes. *Mathematical Biosciences and Engineering* (*MBE*), **17**, 2003-2015. https://doi.org/10.3934/mbe.2020106

[8] Zhang, X.A. and Chen, L.S. (1999) The Periodic Solution of a Class of Epidemic Models. *Computers & Mathematics with Applications*, **38**, 61-71. https://doi.org/10.1016/S0898-1221(99)00206-0

[9] Bainov, D.D. and Simeonov, P.S. (1993) Impulsive Differential Equations: Periodic Solutions and Applications. Longman Scientific and Technical, Burnt, Mill, 4-90.

[10] Kulev, G.K. and Bainov, D.D. (1989) On the Asymptotic Stability of Systems with Impulses by the Direct Method of Lyapunov. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **140**, 324-340. https://doi.org/10.1016/0022-247X(89)90067-X

[11] Simeonov, P.S. and Bainov, D.D. (1986) Stability with Respect to Part of the Variables in System with Impulsive Effect. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **117**, 247-263. https://doi.org/10.1016/0022-247X(86)90259-3

[12] Lakshmikantham, V., Bainov, D.D. and Simeonov, P.S. (1989) Theory of Impulsive Differential Equations. World Scientific, Singapore, 16-23. https://doi.org/10.1142/0906