Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2021, 10(2), 587-597
Published Online February 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2021.102064

非均匀复变函数的留数理论

张罕奇，陈怡凡，陶继成

中国计量大学应用数学系，浙江 杭州
Email: 2571515108@qq.com, 1732013779@qq.com, jchtaofd@sina.com

收稿日期：2021年1月23日；录用日期：2021年2月17日；发布日期：2021年2月26日

摘 要

本文利用非均匀的洛朗级数理论给出了非均匀复变函数留数的定义，获得了非均匀复变函数留数定理，利用非均匀洛朗展式获得n阶极点处非均匀留数的计算公式，利用非均匀留数定理给出非均匀复数的幅角原理。

关键词

非均匀复变函数，留数理论，柯西留数定理，幅角原理

The Theory of Residue for Heterogeneous Complex Variables Functions

Hanqi Zhang, Yifan Chen, Jicheng Tao

Department of Applied Mathematics, China Jiliang University, Hangzhou Zhejiang
Email: 2571515108@qq.com, 1732013779@qq.com, jchtaofd@sina.com

Received: Jan. 23rd, 2021; accepted: Feb. 17th, 2021; published: Feb. 26th, 2021

Abstract

In this paper, we give the definition of heterogeneous residue theory by heterogeneous Laurent series. Using heterogeneous Laurent series, we obtain the formula of heterogeneous residues with n-order pole. In the end, we extend argument principle by using the heterogeneous residues theorem.

Keywords

Heterogeneous Complex Variables, Residues Theory, Cauchy Residues Theorem, Argument

文章引用: 张罕奇, 陈怡凡, 陶继成. 非均匀复变函数的留数理论[J]. 应用数学进展, 2021, 10(2): 587-597.
DOI: 10.12677/aam.2021.102064

Principle

1. 引言

作者在文献[1] [2]推广了复变函数理论，建立了非均匀复变函数理论，给出了非均匀拉普拉斯方程与非均匀 Cauchy-Riemann 方程组的关系，获得了非均匀 Cauchy 积分定理，Cauchy 积分公式。随后在文献[3]中建立了非均匀解析函数的级数理论，获得了泰勒级数展开定理，并在此基础上在文献[4]中建立了非均匀双边幂级数的级数理论，给出了非均匀解析函数的孤立奇点分类。本文在此在文献[3] [4]基础上建立非均匀留数的定义以及一些基本的计算留数的方法，从而把文献[5]-[11]中的复变函数理论进一步推广到非均匀复变函数中。为进一步建立非均匀函数的理论与复变函数理论的关系提供坚实的基础。

2. 预备知识

2.1 非均匀复数的定义

考虑到复数在各个领域的广泛应用，我们对复数单位做进一步推广，定义非均匀复数，细节见文献[1]。

定义集合 $C_K=\{z\,|\,z=a+jb\}$，其中 a,b 为实数 R， $j^2=-k,k\ge 0$.

在 C_K 中引入数乘

$$z=a+jb,z\in C_K,m\in R,mz=ma+jmb,$$

在 C_K 中引入加法

$$z_1=a_1+jb_1,z_2=a_2+jb_2,z_1\in C_K,z_2\in C_K,$$

$$z_1+z_2=(a_1+a_2)+j(b_1+b_2).$$

定理 2.1 [1]在上面的数乘、加法和乘法运算下， C_K 为 R 上的一个域，称为非均匀复数域。

2.2. 非均匀复变函数的微分

非均匀复变函数的定义，导数和解析性等概念，类似于复变函数的情况，具体见文献[1]。

定义 2.2 设 g：从 C_K 到 C_K 的映射，则称 $g(z)$ 为 C_K 上的非均匀复函数。

定义 2.3 设函数 $w=g(z)$ 在点的邻域内或者包含 z_0 的区域 D 内有定义，考虑比值

$$\frac{\Delta w}{\Delta z}=\frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}=\frac{g(z_0+\Delta z)-g(z_0)}{\Delta z}\quad(\Delta z\ne 0)$$

如果当 z 按照任意方式趋于 z_0 时，即当 Δz 按照任意方式趋于 0 时，比值 $\Delta w/\Delta z$ 的极限都存在，且其值有限，则称此极限为函数 $g(z)$ 在 z_0 的导数，并记为 $g'(z_0)$，即

$$g'(z_0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0},$$

这时称函数 $g(z)$ 于点 z_0 可导。

ZHO 定义 2.4 如果函数 $w=g(z)$ 在区域 D 内可微，则称 $g(z)$ 为区域 D 内的解析函数，或称函数 $g(z)$ 在区域 D 内解析。函数在某点解析，是指在该点的某一个邻域内是解析的：函数在某个闭域解析，是指在包含该闭域的某区域内解析。

2.3. 非均匀复变函数的积分

非均匀复变函数的积分见文献[2]。

定义 2.5 设非均匀复数域 Z_k 上的有向曲线 C：

$$z=z(t)\ \ (\alpha\le t\le\beta)$$

以 $a=z(\alpha)$ 为起点，$b=z(\beta)$ 为终点，$g(z)$ 沿 C 有定义，顺着 C 从 a 到 b 的方向在 C 上取分点：$a=z_0,z_1,\cdots,z_{n-1},z_n=b$，这样可以将曲线 C 划分为 n 个弧段，在从 z_{t-1} 到 z_t 的每一个弧段上任取一点 ξ_t，那么

$$S_n=\sum_{t=1}^{n}g(\xi_t)\Delta z_t,\ \Delta z_t=z_t-z_{t-1}$$

当分点增多时，弧段逐渐加细，如果和数 S_n 极限存在且为 S，则称 $g(z)$ 沿 C(从 a 到 b)可积，S 为其上的积分，记号为 $\int_C g(z)\mathrm{d}z$，其中 C 为积分路径。

定理 2.6 [2] 设函数 $g(z)$ 在非均匀复数域 C_K 上的单连通区域 D 内解析，C_j 为 D 内任一条周线，则有，$\int_{C_j} g(z)\mathrm{d}z=0$。

定理 2.7 [2] 设区域 D 的边界是非均匀复数域 C_K 上周线(复周线) C_j，函数 $g(z)$ 在 D 内解析，在 $\bar{D}=D+C_j$ 上连续，则有

$$g(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_j}\frac{g(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi\ \ (z\in D)$$

2.4. 非均匀幂级数

非均匀的幂级数主要参考文献[3]。

定理 2.8 [3] 非均匀幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$ 在其收敛椭圆域 $T:|z-a|_k<R$ 内绝对且内闭一致收敛到解析函数 $g(z)$，即

$$g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$$

而且在 T 内，幂级数(2.1)可以逐项求导，即

$$\begin{aligned}g^{(p)}(z)=&c_p p!+c_{p+1}(p+1)P(p-1)\cdots2(z-a)+\cdots\\&+c_n n(n-1)\cdots(n-p+1)(z-a)^p+\cdots\end{aligned}$$

同时(2.1)和(2.2)的收敛椭圆半径 R 相同，其中的系数 c_p 满足关系

$$c_p=\frac{g^{(p)}(a)}{p!}\ \ (p=0,1,2,\cdots)$$

定理 2.9 [3]**：** 设函数 $g(z)$ 是区域 D 内的非均匀解析函数，$a\in D$，则只要椭圆 $T:|z-a|_k<R$ 且 $T\subset D$ 内，则 $g(z)$ 在 T 内能展开成非均匀幂级数：

$$g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n,$$

其中系数

$$c_p=\frac{g^{(p)}(a)}{p!}=\frac{1}{2\pi i}\int_{T_\rho}\frac{g(\xi)\mathrm{d}\xi}{(\xi-a)^{n+1}}\ (p=0,1,2,\cdots),\left(T_\rho=|\xi-a|_k=\rho,\rho<R\right)$$

且展开是唯一的。

2.5. 非均匀复级数洛朗级数的展开和孤立奇点的分类

本节主要罗列洛朗级数的展开和孤立奇点的分类的一些结果，见文献[4]。

设 $\cdots,c_{-n},\cdots,c_0,c_1,\cdots,c_n,\cdots$ 和 a 是非均匀复常数，我们称下面的级数

$$\cdots+c_{-n}(z-a)^{-n}+\cdots+c_{-1}(z-a)^{-1}+c_0+c_1(z-a)+\cdots+c_n(z-a)^n+\cdots$$

为非均匀双边幂级数，简记为 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n(z-a)^n$。

定理 2.10 [4] 若(3.2)式收敛椭圆半径为 R，且 $r<R$，则非均匀双边幂级数(3.1)在椭圆环 $r<|z-a|_k<R$ 内绝对收敛且内闭一致收敛到解析函数 $g(z)$。

定理 2.11 [4] 若非均匀函数 $g(z)$ 在椭圆环 $H:r<|z-a|_k<R$ 内非均匀解析函数，则 $g(z)$ 在 H 内一定能展开成双边幂级数：$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n(z-a)^n$

其中系数

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{T_\rho}\frac{g(\xi)\mathrm{d}\xi}{(\xi-a)^{n+1}}\left(n=0,\pm1,\pm2,\cdots\right),\left(T_\rho=|\xi-a|_k=\rho,r<\rho<R\right)$$

且展开是唯一的。

定义 2.12 [4] 若非均匀解析函数 $g(z)$ 在点 a 不是非均匀解析函数，但 a 的任何邻域都有 $g(z)$ 的非均匀解析点，则称 a 为 $g(z)$ 的非均匀奇点。设函数非均匀函数 $g(z)$ 在 a 点的去心椭圆域 $\mathring{U}(a)=\left\{Z\middle|0<|Z-a|_k<r\right\}$ 内解析且 a 为非均匀奇点，则称 a 为 $g(z)$ 的非均匀孤立奇点。

由定理 2.11，$g(z)$ 在 $\mathring{U}(a)=\left\{Z\middle|0<|Z-a|_k<r\right\}$ 内展开成幂级数形式 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n(z-a)^n$。

定义 2.13 [4] 设 a 为 $g(z)$ 的非均匀孤立奇点。

1) 若 $g(z)$ 在 a 的主要部分为零，则称 a 为 $g(z)$ 的非均匀可去奇点。

2) 若 $g(z)$ 的主要部分为有限项：

$$\frac{c_{-m}}{(z-a)^m}+\frac{c_{-m+1}}{(z-a)^{m-1}}+\cdots+\frac{c_{-1}}{z-a}$$

且 $c_{-m}\neq0$，则称 a 为 $g(z)$ 的 m 阶非均匀极点，若 $m=1$ 则称 a 为非均匀单极点。

(3)若 $g(z)$ 在 a 的主要部分为无限项，则称 a 为 $g(z)$ 的非均匀本质奇点。

在文献[4]中，作者给出三类非均匀奇点的等价性刻画。

定理 2.14 [4] 设 a 为 $g(z)$ 的非均匀可去奇点，则下面三条都可以作为非均匀可去奇点的定义

1) $g(z)$ 在 a 的主要部分为零。

2) $\lim_{z\to a}g(z)=b(\neq\infty)$。

3) $g(z)$ 在 a 的某邻域内有界。

定理 2.15 [4] 设 a 为 $g(z)$ 的 m 阶非均匀极点，则下面三条都可以作为 m 阶非均匀极点的定义

1) $g(z)$ 在 a 的主要部分为

$$\frac{c_{-m}}{(z-a)^m}+\frac{c_{-m+1}}{(z-a)^{m-1}}+\cdots+\frac{c_{-1}}{z-a}\text{，且 } c_{-m}\neq 0$$

2) $g(z)$ 在 a 的邻域内可以表示为，

$$g(z)=\frac{\omega(z)}{(z-a)^m}$$

且 $\omega(z)(\omega(a)\neq 0)$ 为 a 的邻域内的非均匀解析函数。

3) $f(z)=\dfrac{1}{g(z)}$ 以点 a 为 m 阶零点。$m=1$ 时，称为非均匀简单极点(simple pole)。

由定理 2.15 (3)，我们有，

定理 2.16 [4] 设 a 为 $g(z)$ 的非均匀极点的充要条件是 $\lim\limits_{z\to a} g(z)=\infty$。

定理 2.17 [4] 设 a 为 $g(z)$ 的非均匀本质奇点等价于下面的结论：

1) $g(z)$ 关于 a 点展开的主要部分有无穷项。

2) $\lim\limits_{z\to a} g(z)\neq\begin{cases}\infty\\ b\end{cases}$，即极限不存在。

3) $f(z)=\dfrac{1}{g(z)}$ 以点 a 为非均匀本质奇点。

下面利用非均匀本质奇点分类推广 **Weierstrass 稠密性定理**

定理 2.18 (Weierstrass 定理)若 a 为非均匀函数 $g(z)$ 的非均匀本质奇点，任给 $\delta>0$，则对任意有限非均匀复数 A 以及正数 $\varepsilon>0$，在 $0<|z-a|_k<\delta$ 内有一点 z，使得 $|g(z)-A|_k<\varepsilon$ 成立，即 $g(z)$ 在非均匀本质奇点的领域内的取值在 C 上是稠密的。

证明：假设存在非均匀复数 A 及 $\varepsilon>0$，在 $0<|z-a|_k<\delta$ 内 $|g(z)-A|_k>\varepsilon$。于是，令

$$f(z)=\frac{g(z)-A}{z-a}.$$

$f(z)$ 在 $0<|z-a|_k<\delta$ 上解析，此时，a 为 $f(z)$ 的非均匀极点，由其定义

$$f(z)=\frac{c_{-m}}{(z-a)^m}+\cdots+\frac{c_{-1}}{z-a}+c_0+c_1(z-a)+\cdots,$$

于是，

$$g(z)=\frac{c_{-m}}{(z-a)^{m-1}}+\cdots+\frac{c_{-2}}{z-a}+(A+c_{-1})+c_0(z-a)+\cdots.$$

由于 m 是给定的，所以 a 不是非均匀函数 $g(z)$ 的非均匀本质奇点，这与定理的条件矛盾。

2.6. 无穷远点的非均匀孤立奇点

若非均匀解析函数 $g(z)$ 只有一个非均匀孤立奇点 $z=\infty$。令 $\zeta=\dfrac{1}{z}$，$g(z)$ 的非均匀孤立奇点 $z=\infty$ 的

性质转化到 $f(\zeta)=g(z)=g\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ 在 $\zeta=0$ 的性质。

设 $f(\zeta)$ 在 $\xi=0$ 的非均匀洛朗级数展开为：

$$f(\zeta)=\sum_{-\infty}^{\infty}c_{-n}\zeta^{n}=\sum_{n=0}^{\infty}c_{-n}\zeta^{n}+\sum_{n=1}^{\infty}c_{n}\zeta^{-n}=\varphi(\zeta)+\psi(\zeta).$$

$\psi(\zeta)$ 均匀解析函数 $f(\zeta)$ 主要部分， $\varphi(\zeta)$ 是其解析部分。

下面利用 $f(\zeta)$ 在 $\xi=0$ 的非均匀洛朗级数展开给出非均匀解析函数 $g(z)$ 在 $z=\infty$ 的分类定义：

定义 2.19 若 $\xi=0$ 为 $f(\zeta)$ 非均匀可去奇点，则称 $z=\infty$ 为 $g(z)$ 的非均匀可去奇点；若 $\xi=0$ 为 $f(\zeta)$ 的非均匀 m 阶极点，则称 $z=\infty$ 为 $g(z)$ 的非均匀 m 阶极点；若 $\xi=0$ 为 $f(\zeta)$ 非均匀本质奇点，则称 $z=\infty$ 为 $g(z)$ 的非均匀本质奇点。

利用文献[3]和定义 2.19，在 $z=\infty$ 处有如下的三类非均匀奇点的等价性刻画：

定理 2.20 设 ∞ 为 $g(z)$ 的非均匀可去奇点，则下面三条与非均匀可去奇点等价

1) $g(z)$ 在 ∞ 的主要部分为零。

2) $\lim\limits_{z\to\infty}g(z)=b(\neq\infty)$ 。

3) $g(z)$ 在 ∞ 的某邻域内有界。

定理 2.21 设 ∞ 为 $g(z)$ 的 m 阶非均匀极点，则下面三条都与 m 阶非均匀极点等价

1) $g(z)$ 在 ∞ 的主要部分为

$$b_1z+b_2z^2+\cdots+b_mz^m\left(b_m\neq0\right),$$

2) $g(z)$ 在 ∞ 的邻域内可以表示为，

$$g(z)=\omega(z)z^m$$

且 $\omega(z)(\omega(\infty)\neq0)$ 为 ∞ 的邻域内的非均匀解析函数。

3) $f(z)=\dfrac{1}{g(z)}$ 以点 ∞ 为 m 阶零点。 $m=1$ 时，称为非均匀单极点。

定理 2.22 设 ∞ 为 $g(z)$ 的非均匀极点的充要条件是 $\lim\limits_{z\to\infty}g(z)=\infty$ 。

定理 2.23 设 ∞ 为 $g(z)$ 的非均匀本质奇点，则下面条件与非均匀本质奇点等价：

1) $g(z)$ 关于 ∞ 点展开的主要部分有无穷项。

2) $\lim\limits_{z\to\infty}g(z)\neq\begin{cases}b\\\infty\end{cases}$，即极限不存在。

3) $f(z)=\dfrac{1}{g(z)}$ 以点 ∞ 为非均匀本质奇点。

3. 非均匀留数及留数定理

3.1. 非均匀留数的定义

设非均匀复变函数 $g(z)$ 在一周线 l 围成的区域内只有一个非均匀孤立奇点 z_0， $g(z)$ 在以 z_0 为圆心而半径趋于零的圆环域上展开的非均匀洛朗级数表示

$$g(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k\left(z-z_0\right)^k.$$

在非均匀洛朗级数的周线 l 内任取一个足够小的包含 z_0 的回路 l_0，由非均匀柯西积分定理，则有

DOI: 10.12677/aam.2021.102064

$$\int_l g(z)\mathrm{d}z = \int_{l_0} g(z)\mathrm{d}z$$

于是有，

$$\int_l g(z)\mathrm{d}z = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \int_{l_0} (z-z_0)^k \,\mathrm{d}z$$

因此，

$$\int_l g(z)\mathrm{d}z = 2\pi j a_{-1}$$

当 l 包围着 $g(z)$ 的 n 个非均匀孤立奇点时，作回路 $l_1, l_2, \cdots, l_n$ 分别包围这 n 个非均匀孤立奇点，由柯西积分定理

$$\int_l g(z)\mathrm{d}z = \int_{l_1} g(z)\mathrm{d}z + \int_{l_2} g(z)\mathrm{d}z + \cdots + \int_{l_n} g(z)\mathrm{d}z.$$

于是，可以得到非均匀复变函数的留数的定义。

定义 3.1 设非均匀复变函数 $g(z)$ 以有限点 a 为孤立奇点，即 $g(z)$ 在点 a 的某去心邻域 $0<|z-a|_k<R$ 内非均匀解析，则称积分

$$\frac{\sqrt{k}}{2\pi j}\int_{\Gamma} g(z)\mathrm{d}z \left(\Gamma : |z-a|_k = \rho, 0<\rho<R\right)$$

为 $g(z)$ 在点 a 的非均匀留数，记为 $\underset{z=a}{Res}\, g(z)$。其中， $j^2=-k, k>0$ 。

由非均匀柯西积分定理知道，当 $0<\rho<R$ 时，非均匀留数的值与 ρ 无关，利用非均匀洛朗系数公式，有

$$\underset{z=a}{Res}\, g(z) = c_{-1},$$

这里 c_{-1} 是 $g(z)$ 在 $z=a$ 处的非均匀洛朗展式中 $1/z$ 这一项的系数。

定理 3.2 若非均匀复变函数 $g(z)$ 在复周线 C 所围的区域 D 内有限个非均匀孤立奇点 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，且在复周线围成的闭域 $\bar{D} = D + C$ 上除 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 外连续，则

$$\frac{\sqrt{k}}{2\pi j}\int_{C} g(z)\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{n} \underset{z=a_k}{Res}\, g(z)$$

证：以 a_k 为心，充分小的正数 ρ_k 为半径作圆周 $\Gamma_k : |z-a_k|_k = \rho_k \,(k=1,2,\cdots,n)$，使这些圆周及其内部均含于 D，并且彼此相交。由复周线的非均匀柯西积分定理有

$$\int_{C} g(z)\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{n} \int_{\Gamma_k} g(z)\mathrm{d}z$$

由非均匀留数的定义，有

$$\frac{\sqrt{k}}{2\pi j}\int_{\Gamma_k} g(z)\mathrm{d}z = \underset{z=a_k}{Res}\, g(z)$$

对任意 $z=a_k$ 都满足上式，使复周线 C 包围的 n 个小周线恰好包围 n 个非均匀孤立奇点，对其求和即得所求

$$\frac{\sqrt{k}}{2\pi j}\int_{C} g(z)\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{n} \underset{z=a_k}{Res}\, g(z).$$

3.2. 函数在无穷远点的非均匀留数

定义 3.3 设 ∞ 为非均匀复变函数 $g(z)$ 的一个非均匀孤立奇点，即 $g(z)$ 是整函数，则称

$$\frac{\sqrt{k}}{2\pi j}\int_{\Gamma^-} g(z)\mathrm{d}z\left(\Gamma:|z|_k=\rho>r\right)$$

为 $g(z)$ 在点 ∞ 的非均匀留数，记为 $\underset{z=\infty}{Res}\, g(z)$,这里 Γ^- 是指顺时针方向。

设 $g(z)$ 在 $0\le r<|z|_k<+\infty$ 内的洛朗展式为

$$g(z)=\cdots+\frac{c_{-n}}{z^n}+\cdots+\frac{c_{-1}}{z}+c_0+c_1z+\cdots+c_nz^n+\cdots,$$

逐项积分

$$\underset{z=\infty}{Res}\, g(z)=\frac{\sqrt{k}}{2\pi j}\int_{\Gamma^-} g(z)\mathrm{d}z=-c_{-1},$$

因此，可以通过求解 $g(z)$ 在零点的非均匀留数计算其在 ∞ 点的非均匀留数。

定理 3.4 若非均匀复变函数 $g(z)$ 在扩充复平面上存在有限个孤立奇点，则 $g(z)$ 在扩充复平面各点的非均匀留数和为零。

证： 取复周线 Γ 使其包围复平面上的有限个孤立奇点

$$\frac{\sqrt{k}}{2\pi j}\int_{\Gamma} g(z)\mathrm{d}z=\sum_{k=1}^{n}\underset{z=a_k}{Res}\, g(z)$$

两边除以 $2\pi j/\sqrt{k}$ ，复周线 Γ 反向就有

$$\sum_{k=1}^{n}\underset{z=a_k}{Res}\, g(z)+\underset{z=\infty}{Res}\, g(z)=0$$

3.3. 非均匀留数的求法

定理 3.5 设 a 为 $g(z)$ 的 n 阶非均匀极点， $g(z)=\varphi(z)/(z-a)^n$ ，其中 $\varphi(z)$ 在点 a 非均匀解析，$\varphi(z)\ne 0$ ，则

$$\underset{z=a}{Res}\, g(z)=\frac{\varphi^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}.$$

这里符号 $\varphi^{(0)}(a)$ 代表 $\varphi(a)$，且有 $\varphi^{(n-1)}(a)=\lim\limits_{z\to a}\varphi^{(n-1)}(z)$。

证： 由非均匀留数的定义，有

$$\underset{z=a}{Res}\, g(z)=\frac{\sqrt{k}}{2\pi j}\int_{\Gamma}\frac{\varphi(z)}{(z-a)^n}\mathrm{d}z=\frac{\varphi^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}.$$

推论 3.6 设 a 为 $g(z)$ 的一阶非均匀极点，

$$\varphi(z)=(z-a)g(z)$$

则

$$\underset{z=a}{Res}\, g(z)=\varphi(a).$$

推论 3.7 设 a 为 $g(z)$ 的二阶非均匀极点，

$$\varphi(z)=(z-a)^2 g(z)$$

则

$$\underset{z=a}{Res}\, g(z)=\varphi'(a)$$

定理 3.8 设 a 为 $g(z)=\dfrac{\varphi(z)}{\phi(z)}$ 的一阶非均匀极点(只要 $\varphi(z)$ 及 $\phi(z)$ 在点 a 解析，且 $\varphi(a)\neq 0$，$\phi(a)=0$，$\phi'(a)\neq 0$)，则 $\underset{z=a}{Res}\, g(z)=\varphi(a)/\phi'(a)$。

证：因 a 为 $g(z)=\varphi(z)/\phi'(z)$ 的一阶极点，故

$$\underset{z=a}{Res}\, g(z)=\lim_{z\to a}\frac{\varphi(a)}{\phi(a)}(z-a)=\lim_{z\to a}\frac{\varphi(z)}{\dfrac{\phi(z)-\phi(a)}{z-a}}=\frac{\varphi(a)}{\phi'(a)}$$

例 3. 1 计算非均匀积分

$$\int_{|z|=2}\frac{1}{z^2(z-1)}\mathrm{d}z$$

解：被积函数 $f(z)=1/z^2(z-1)$ 在圆周 $|z|=2$ 的内部只有两阶极点 $z=0$ 及一阶极点 $z=1$。由推论 3.6

$$\underset{z=1}{Res}\, f(z)=\left.\frac{1}{z^2}\right|_{z=1}=1;$$

由推论 3.7

$$\underset{z=0}{Res}\, f(z)=\left.\left(\frac{1}{z-1}\right)'\right|_{z=0}=-\left.\frac{1}{(z-1)^2}\right|_{z=0}=-1;$$

故由非均匀留数定理得

$$\int_{|z|=2}\frac{1}{z^2(z-1)}\mathrm{d}z=\frac{2\pi j}{\sqrt{k}}(-1+1)=0$$

例 3. 2 计算非均匀积分

$$\int_{|z|=n+1}\frac{z^{\frac{n(n+1)}{2}-1}}{(1+z)(1+z^2)\cdots(1+z^n)}\mathrm{d}z, n\geq 1$$

解：被积函数 $g(z)$ 有 $n(n+1)/2$ 个极点在积分区域的内部，由第二留数定理，

$$\int_{|z|=n+1}\frac{z^{\frac{n(n+1)}{2}-1}}{(1+z)(1+z^2)\cdots(1+z^n)}\mathrm{d}z=-\frac{2\pi j}{\sqrt{k}}\underset{z=\infty}{Res}\, g(z)$$

利用在无穷远处洛朗展开，可以知道，无穷远远处的留数为-1，因此积分为 $2\pi j/\sqrt{k}$。

4. 非均匀复平面上的幅角原理

幅角原理又称柯西幅角原理，幅角原理可以快速地计算出方程在复数域内孤立零点或孤立奇点的个数。接下来，我们将其推广到非均匀复平面上。

引理 4.1 设 $g(z)$ 是非均匀复平面上的亚纯函数，若 a 是 $g(z)$ 的 p 阶零点或 q 阶极点，则 $g'(z)/g(z)$ 是 $z=a$ 的一阶极点。

证明： 若 a 是 $g(z)$ 的 p 阶零点，则 $g(z)=(z-a)^p f(z)$，$f(z)(f(a)\neq 0)$ 在定义域上解析。

而

$$g'(z)=p(z-a)^{p-1} f(z)+(z-a)^p f'(z),$$

故，

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{p(z-a)^{p-1} f(z)+(z-a)^p f'(z)}{(z-a)^p f(z)}=\frac{p}{z-a}+\frac{f'(z)}{f(z)},$$

又因为 $f(z)(f(a)\neq 0)$ 在定义域上解析，所以 $g'(z)/g(z)$ 是 $z=a$ 的一阶极点。

当 a 是 $g(z)$ 的 q 阶极点时证明方法类似。

定理 4.2 (幅角原理) 若 $g(z)$ 是定义在简单周线 ∂D 所围区域 D 的非均匀亚纯函数，并且在 ∂D 上不存在 $g(z)$ 的零点，则

$$\frac{\sqrt{k}}{2\pi j}\int_{\partial D}\frac{g'(z)}{g(z)}\mathrm{d}z=P-Q.$$

其中，P 为区域 DQ 内 $g(z)$ 零点的个数，Q 为 D 内 $g(z)$ 极点的个数。

证明： 由于 $g(z)$ 在 D 内除了各极点外都是解析的，不妨设 a_i,b_j 分别是 $f(z)$ 在定义域上的零点和极点，根据引理 4.1 及一阶极点的计算公式，有 $\underset{z=a_i}{Res}\frac{f'(z)}{f(z)}=p_i$，$\underset{z=b_j}{Res}\frac{f'(z)}{f(z)}=-q_j$。

所以，由非均匀留数定理

有

$$\frac{\sqrt{k}}{2\pi j}\int_{D}\frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z=\sum_{a_i=1}^{k_1}p_i-\sum_{b_j=1}^{k_2}q_j.$$

令 $\sum_{a_i=1}^{k_1}p_i=P,-\sum_{b_j=1}^{k_2}q_j=-Q$，就得到结论。

现在设 h 是从简单周线 C 到周线 Γ 上非均匀复平面的映射，且 h 在 C 上不存在零点，原点不在 Γ 内。令 c_0 为 C 上一点，由 h 从 c_0 在 Γ 上的像为 τ_0。当 c_0 移动到 c_k，对应地，Γ 上的 τ_0 随之移动到 τ_k。假定点 τ_0 处的幅角主值为 θ_0，当 c_0 沿同一方向绕 C 一周回到 c_0 时，τ_0 也绕 Γ 一周移动到 τ_k，设此时 τ_k 处的幅角主值为 θ_k。映射 h 保证了 $\theta_k-\theta_0=N,N\in\mathbb{Z}$。并且，$\frac{N}{2\pi}=M\in\mathbb{Z}$，$M$ 表示点 τ_k 在沿着 Γ 运动过程中围绕原点的圈数。

定理 4.3 (幅角原理) 若 $g(z)$ 是定义在简单周线 ∂D 所围区域 D 的非均匀亚纯函数，并且在 ∂D 上不存在 $g(z)$ 的零点，则 $M=P-Q$，其中，P 为 D 内 $g(z)$ 零点的个数，Q 为 D 内 $g(z)$ 极点的个数。

证明： 于是，只要证明 $2\pi jM=\sqrt{k}\int_{\partial D}\frac{g'(z)}{g(z)}\mathrm{d}z$，然后由定理 4.2.1 便可得到该结论。

首先，令 $z=z(t)$，将 τ_k 表示成指数形式，就有 $\tau=\rho(t)\mathrm{e}^{j\varphi(t)}$，也就是……再由复合函数求导可得，

$$g'[z(t)]z'(t)=\rho'(t)\mathrm{e}^{j\varphi(t)}+j\rho(t)\mathrm{e}^{j\varphi(t)}\varphi'(t).$$

所以，

$$\int_{\partial D}\frac{g'(z)}{g(z)}\mathrm{d}z=\int_a^b\frac{\rho'(t)}{\rho(t)}\mathrm{d}t+j\int_a^b\varphi'(t)\mathrm{d}t,$$

因为

$$\rho(b)=\rho(a),\varphi(b)-\varphi(a)=\frac{2\pi M}{\sqrt{k}},$$

就可以得到结论 $\int_D\frac{g'(z)}{g(z)}\mathrm{d}z=\frac{2\pi jM}{\sqrt{k}}$。

致　谢

作者对审稿人提出的中肯意见表示感谢！本课题的研究得到中国计量大学 23 届大学生科研计划项目(2020x23078)，2020 年中国计量大学大学生开放实验项目(XL2020082)和 2020 年校级一流本科课程建设项目(200113)的资助。

参考文献

[1] 赵雪娇，陈雲，陶继成. 非均匀复数和非均匀复变函数[J]. 应用数学进展, 2017, 6(1): 69-77.

[2] 陈雲，赵雪娇，陶继成. 非均匀复变函数的积分[J]. 应用数学进展, 2017, 6(2): 153-164.

[3] 杨彦晖，江宇婕，陶继成. 非均匀复变函数的级数理论[J]. 应用数学进展, 2020, 9(2): 178-186.

[4] 杨彦晖，江宇婕，陶继成. 非均匀洛朗级数和孤立奇点分类[J]. 教学方法创新与实践, 2020, 3(3): 1-5.

[5] 戴滨林，杨世海. 复变函数[M]. 上海：复旦大学出版社, 2019.

[6] 钟玉泉. 复变函数论[M]. 北京：高等教育出版社, 2013.

[7] 梁昆淼. 数学物理方法[M]. 北京：高等教育出版社, 1998.

[8] 龚昇. 简明复分析[M]. 合肥：中国科学技术大学出版社, 2009.

[9] Ahlfors, L. (1990) Complex Analysis. China Machine Press, Beijing.

[10] Churchill, R. (1960) Complex Variables and Applications. McGraw-Hill Book Company Inc., 2 Pennsylvania Plaza New York City.

[11] Rudin, W. (1974) Real and Complex Analysis. Osborne McGraw-Hill, Manhattan, New York City, New York.