

考虑隔离的三维禽流感 Filippov 控制模型的研究

王敬文, 杨友苹

山东师范大学数学与统计学院, 山东 济南

Email: yomiYJS@163.com

收稿日期: 2021年2月16日; 录用日期: 2021年3月11日; 发布日期: 2021年3月19日

摘要

本文深入探究了 3 种不同控制措施对禽流感传播的综合影响, 建立了一个以捕杀受感染的禽类、隔离 (人们受到媒体宣传的影响所进行的自主隔离) 已感染的人类以及利用医疗资源进行积极治疗作为控制措施的 SI-SIR 禽流感模型. 基于阈值策略, 我们将 SI-SIR 禽流感模型扩展到一个三维的 Filippov 系统, 把感染禽类以及感染人类的总和作为是否采取控制措施的参考指标: 如果总和未超过阈值 I_T , 则不采取任何措施; 然而, 一旦总和超过阈值 I_T , 则需要立即采取控制措施. 依据阈值水平 I_T , 模型的解最终稳定到一个地方病平衡点或者一个伪平衡点. 数值模拟表明, 一个好的阈值策略可以有效控制禽流感的发展, 以使禽流感的发展保持在可接受或期望的水平.

关键词

Filippov系统, 禽流感, 阈值策略, 全局稳定性

A Study of a Three-Dimensional Filippov Control Model for Avian Influenza Considering Isolation

Jingwen Wang, Youping Yang

School of Mathematics and Statistics, Shandong Normal University, Jinan Shandong

Email: yomiYJS@163.com

Received: Feb. 16th, 2021; accepted: Mar. 11th, 2021; published: Mar. 19th, 2021

Abstract

In this paper, we explore the comprehensive impact of three different control measures on the spread of avian influenza, and establish an SI-SIR avian influenza model with culling of infected birds, isolating (the autonomous isolation of people influenced by media propaganda) infected humans, and using active treatment of medical resources as control measures. Based on the threshold strategy, the SI-SIR avian influenza model is extended to a three-dimensional Filippov system. The total number of infected birds and humans is taken as the reference index of whether to take control measures: if the sum does not exceed the threshold I_T , no action will be taken; however, once the sum exceeds the threshold I_T , immediate control measures are required. According to the threshold level I_T , the solution of the model finally stabilizes at an endemic equilibrium or a pseudo-equilibrium. The numerical simulation shows that a good threshold strategy can effectively control the development of avian influenza, so as to keep the development of avian influenza in an acceptable or desired level.

Keywords

Filippov System, Avian Influenza, Threshold Strategy, Global Stability

Copyright © 2021 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

高致病性甲型禽流感病毒会导致较高的群体死亡率 [1]. 这类流感不仅会对受影响地区的家禽业造成重大经济损失, 同时对人类也构成了潜在的严重威胁 [1, 2]. 因此, 确定有效的控制策略以消除禽流感或者至少把禽流感的影响降低到一个可接受的水平是一个亟待解决的问题. 中国政府自 2013 年 3 月第一例病例报道以来 [3], 开始通过网站和官方通讯社每日发布甲型 H7N9 禽流感的有关数据 [4]. 同时, 在南京、广州、上海等一些城市关闭了部分家禽市场, 扑杀家禽并对环境进行消毒 [5, 6], 其中前两种措施被证实是防止禽流感传播的有效方法 [7].

人们会通过直接或间接接触死亡或感染的家禽而感染禽流感 [8]. 感染禽流感的人在早期可能会出现发烧、咳嗽、呼吸困难等症状 [9]. 同一时期感染人数的增加将引起公共卫生部门的注意, 公众媒体也会进行相关报道, 在媒体宣传的影响下, 人们会主动减少与禽类接触并戴口罩进行日常防护, 自主隔离从而减少感染禽流感的风险. 此外, 考虑加大医疗资源投入, 提高病人的收治比例, 也是预防禽流感爆发的重要手段 [10, 11]. 2003 年的非典和 2009 年的新流感大流行通过多种措施 (医疗, 隔离等) 的干预得到了良好控制 [12, 13]. 这表明我们需要将数学模型拓展到这些主要干预措施结合的研究中去. 基于此, 本文将通过一个 Filippov 系统讨论 3 种不同控制措施对禽流感传播的综合影响, 并给出 Filippov 系统的全局动力行为.

2. 模型的建立

禽流感病毒在禽类中的爆发会对家禽业造成严重破坏, 尽管目前禽流感没有治愈方法, 但可以通过捕杀受感染的禽类来控制禽流感的传播. 由于完全捕杀受感染的禽类通常是不可能的, 在生物学以及经济学上也是不可取的, 因此应采取控制措施, 将受感染的禽类数量保持在可接受的水平. 为了尽量减少禽流感的影响, 我们采取了多种干预措施. 在疫情爆发初期阶段, 特别是在没有药物和疫苗的情况下, 隔离是一种常规的控制方法来降低疾病的传播率. 通常我们认为, 政府只在感染数量达到阈值水平时才实施相应的干预策略. 其中, 感染的数量是实施控制措施的关键参考指标. 因此, 我们提出了一个以捕杀受感染的禽类、隔离已感染的人类以及利用医疗资源进行积极治疗作为控制措施的 SI-SIR 禽流感模型, 建立了如下非光滑的动力系统:

$$\begin{cases} \frac{dS_a}{dt} = r_a S_a \left(1 - \frac{S_a}{K_a}\right) - \beta_a S_a I_a, \\ \frac{dI_a}{dt} = \beta_a S_a I_a - (\mu_a + d_a) I_a - \varepsilon \mu_c I_a, \\ \frac{dS_h}{dt} = \Lambda - \beta_h (1 - q\varepsilon) S_h I_a - \mu_h S_h, \\ \frac{dI_h}{dt} = \beta_h (1 - q\varepsilon) S_h I_a - (\mu_h + d_h) I_h - \varepsilon \mu_b I_h, \\ \frac{dR_h}{dt} = \varepsilon \mu_b I_h - \mu_h R_h, \end{cases} \quad (1)$$

并且

$$\varepsilon = \begin{cases} 0, & I_a + I_h - I_T < 0, \\ 1, & I_a + I_h - I_T > 0, \end{cases} \quad (2)$$

其中, q 是指人类的隔离率, μ_c 代表感染禽类的捕杀率, μ_b 表示人类通过积极医学治疗的恢复率. 系统 (1) 中其他参数的含义以及数值详见表 1.

Table 1. Parameters in system (1)

表 1. 系统 (1) 中的参数

参数	意义	值	参考文献
r_a	禽类的固定增长率	0.2	假设
K_a	禽类种群的最大环境容纳量	600	[14]
β_a	感染禽类向易感禽类的传染率	0.001	[8]
μ_a	禽类的自然死亡率	$1/(2 * 365)$	[15]
d_a	禽类的因病死亡率	0.05	[8]
μ_c	对感染禽类的捕杀率	0.2	假设
Λ	人类的招募率	1020/365	假设
β_h	感染禽类向易感人类的传染率	6.7×10^{-6}	假设
q	人类的隔离率	0.5	假设
μ_h	人类的自然死亡率	$1/(30 * 70)$	假设
d_h	人类的因病死亡率	0.3445	[16]
μ_b	人类通过积极进行医学治疗而产生的恢复率	0.01	假设

一般而言, 我们假设 $0 < q < 1$, $\mu_c > \mu_b$, 并且 $S_h + I_h$ 等于常数 Λ/μ_h . 从而, 系统 (1) 可被改写为

$$\begin{cases} \frac{dS_a}{dt} = r_a S_a (1 - \frac{S_a}{K_a}) - \beta_a S_a I_a, \\ \frac{dI_a}{dt} = \beta_a S_a I_a - (\mu_a + d_a) I_a - \varepsilon \mu_c I_a, \\ \frac{dI_h}{dt} = \beta_h (1 - q\varepsilon) (\frac{\Lambda}{\mu_h} - I_h) I_a - (\mu_h + d_h) I_h - \varepsilon \mu_b I_h. \end{cases} \quad (3)$$

为了便于描述, 我们定义 $\sigma(Z) = I_a + I_h - I_T$, 其中 $Z = (S_a, I_a, I_h)^T \in R_+^3$,

$$f_1(Z) = \begin{pmatrix} r_a S_a (1 - \frac{S_a}{K_a}) - \beta_a S_a I_a \\ \beta_a S_a I_a - (\mu_a + d_a) I_a \\ \beta_h (\frac{\Lambda}{\mu_h} - I_h) I_a - (\mu_h + d_h) I_h \end{pmatrix}, \quad (4)$$

$$f_2(Z) = \begin{pmatrix} r_a S_a (1 - \frac{S_a}{K_a}) - \beta_a S_a I_a \\ \beta_a S_a I_a - (\mu_a + d_a) I_a - \mu_c I_a \\ \beta_h (1 - q) (\frac{\Lambda}{\mu_h} - I_h) I_a - (\mu_h + d_h) I_h - \mu_b I_h \end{pmatrix}. \quad (5)$$

因此, 系统 (3) 以及 (2) 可以表示为

$$\dot{Z} = \begin{cases} f_1(Z), & Z \in G_1, \\ f_2(Z), & Z \in G_2, \end{cases} \quad (6)$$

其中 $G_{1ah} = \{Z \in R_+^3 | \sigma(Z) < 0\}$, $G_{2ah} = \{Z \in R_+^3 | \sigma(Z) > 0\}$. 此外, 流形 G_s 可以表示为 $G_s = \{Z \in R_+^3 | \sigma(Z) = 0\}$, 并且垂直于 G_s 的法向量表示为 $n_{ah} = (0, 1, 1)^T$.

基于以上建立的模型, 在接下来的部分我们将分别研究 G_{1ah} 区域以及 G_{2ah} 区域的动力学行为, 然后给出滑模的存在性证明及其动力学行为, 最后讨论全局的动力学行为.

2.1. 区域 G_{1ah} 中子系统的动力学行为

在 G_{1ah} 区域中系统 (6) 的动力学可以表示为

$$\begin{pmatrix} S'_a \\ I'_a \\ I'_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_a S_a (1 - \frac{S_a}{K_a}) - \beta_a S_a I_a \\ \beta_a S_a I_a - (\mu_a + d_a) I_a \\ \beta_h (\frac{\Lambda}{\mu_h} - I_h) I_a - (\mu_h + d_h) I_h \end{pmatrix}. \quad (7)$$

在子系统 (7) 中, 有两个无病平衡点 $EE_{11}^0 = (0, 0, 0)$, $EE_{12}^0 = (K_a, 0, 0)$, 一个地方病平衡点 $EE_1^* = (S_{a1}^*, I_{a1}^*, I_{h1}^*)$, 其中

$$\begin{aligned} S_{a1}^* &= \frac{\mu_a + d_a}{\beta_a}, \\ I_{a1}^* &= \frac{r_a}{\beta_a R_1} (R_1 - 1), \\ I_{h1}^* &= \frac{\beta_h \Lambda I_{a1}^*}{\mu_h (\beta_h I_{a1}^* + \mu_h + d_h)}, \\ R_1 &= \frac{\beta_a K_a}{\mu_a + d_a}. \end{aligned}$$

接下来通过定理 2.1.1 给出以上平衡点的稳定性.

定理 2.1.1. (i) 无病平衡点 EE_{11}^0 总是不稳定的;

(ii) 如果 $R_1 < 1$, 那么无病平衡点 EE_{12}^0 是局部渐近稳定的;

(iii) 如果 $R_1 > 1$, 那么地方病平衡点 EE_1^* 是局部渐近稳定的.

证明. 子系统 (7) 的雅可比矩阵为

$$\mathbf{J}_1(S_a, I_a, I_h) = \begin{pmatrix} r_a - \frac{2r_a S_a}{K_a} - \beta_a I_a & -\beta_a S_a & 0 \\ \beta_a I_a & \beta_a S_a - (\mu_a + d_a) & 0 \\ 0 & \beta_h \left(\frac{\Lambda}{\mu_h} - I_h \right) & -\beta_h I_a - (\mu_h + d_h) \end{pmatrix}.$$

(i) 对于无病平衡点 EE_{11}^0 , 通过求解特征方程 $|\lambda E - \mathbf{J}_1(EE_{11}^0)|=0$, 可得 $\lambda_1 = r_a > 0$, $\lambda_2 = -(\mu_a + d_a) < 0$, $\lambda_3 = -(\mu_h + d_h) < 0$. 由于存在正特征根, 因此无病平衡点 EE_{11}^0 总是不稳定的.

(ii) 在无病平衡点 EE_{12}^0 处的特征方程为 $|\lambda E - \mathbf{J}_1(EE_{12}^0)| = 0$, 解得 $\lambda_1 = -r_a < 0$, $\lambda_2 = (\mu_a + d_a)(R_1 - 1) < 0$, 如果 $R_1 < 1$, 有 $\lambda_3 = -(\mu_h + d_h) < 0$. 因此, 如果 $R_1 < 1$, 则 $\mathbf{J}_1(EE_{12}^0)$ 的所有特征值都是负的, 即无病平衡点 EE_{12}^0 是局部渐近稳定的.

(iii) 当 $R_1 > 1$ 时, 地方病平衡点 EE_1^* 存在. 在点 EE_1^* 处的特征方程为

$$\lambda^3 + \alpha_1 \lambda^2 + \alpha_2 \lambda + \alpha_3 = 0,$$

其中

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{r_a}{R_1} + \beta_h I_{a1}^* + \mu_h + d_h > 0, \\ \alpha_2 &= \frac{r_a}{R_1} (\beta_h I_{a1}^* + \mu_h + d_h) + \beta_a^2 S_{a1}^* I_{a1}^* > 0, \\ \alpha_3 &= \beta_a^2 S_{a1}^* I_{a1}^* (\beta_h I_{a1}^* + \mu_h + d_h) > 0. \end{aligned}$$

进一步计算可得

$$\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_3 = \frac{\alpha_1 r_a}{R_1} (\beta_h I_{a1}^* + \mu_h + d_h) + \frac{r_a \beta_a^2 S_{a1}^* I_{a1}^*}{R_1} > 0.$$

根据 Hurwitz 判据 [17] 可知, $\mathbf{J}_1(EE_1^*)$ 的所有特征值都具有负实部. 因此, 地方病平衡点 EE_1^* 是局部渐近稳定的.

2.2. 区域 G_{2ah} 中子系统的动力学行为

在 G_{2ah} 区域中系统 (6) 的动力学可以表示为

$$\begin{pmatrix} S'_a \\ I'_a \\ I'_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_a S_a (1 - \frac{S_a}{K_a}) - \beta_a S_a I_a \\ \beta_a S_a I_a - (\mu_a + d_a + \mu_c) I_a \\ \beta_h (1 - q) (\frac{\Lambda}{\mu_h} - I_h) I_a - (\mu_h + d_h + \mu_b) I_h \end{pmatrix}. \tag{8}$$

在子系统 (8) 中, 有两个无病平衡点 $EE_{21}^0 = (0, 0, 0)$, $EE_{22}^0 = (K_a, 0, 0)$, 一个地方病平衡点 $EE_2^* = (S_{a2}^*, I_{a2}^*, I_{h2}^*)$, 其中

$$\begin{aligned} S_{a2}^* &= \frac{\mu_a + d_a + \mu_c}{\beta_a}, \\ I_{a2}^* &= \frac{r_a}{\beta_a R_2} (R_2 - 1), \\ I_{h2}^* &= \frac{\beta_h \Lambda (1 - q) I_{a2}^*}{\mu_h (\beta_h (1 - q) I_{a2}^* + \mu_h + d_h + \mu_b)}, \\ R_2 &= \frac{\beta_a K_a}{\mu_a + d_a + \mu_c}. \end{aligned}$$

并且

$$\begin{aligned}
 R_1 &= \frac{\beta_a K_a}{\mu_a + d_a} > \frac{\beta_a K_a}{\mu_a + d_a + \mu_c} = R_2, \\
 S_{a1}^* &= \frac{\mu_a + d_a}{\beta_a} < \frac{\mu_a + d_a + \mu_c}{\beta_a} = S_{a2}^*, \\
 I_{a1}^* &= \frac{r_a}{\beta_a R_1} (R_1 - 1) > \frac{r_a}{\beta_a R_2} (R_2 - 1) = I_{a2}^*, \\
 I_{h1}^* &= \frac{\beta_h \Lambda I_{a1}^*}{\mu_h (\beta_h I_{a1}^* + \mu_h + d_h)}, \\
 &> \frac{\beta_h \Lambda (1 - q) I_{a2}^*}{\mu_h (\beta_h (1 - q) I_{a2}^* + \mu_h + d_h)}, \\
 &> \frac{\beta_h \Lambda (1 - q) I_{a2}^*}{\mu_h (\beta_h (1 - q) I_{a2}^* + \mu_h + d_h + \mu_b)} = I_{h2}^*.
 \end{aligned}$$

下面, 通过定理 2.2.1 给出以上平衡点的稳定性.

定理 2.2.1. (i) 无病平衡点 EE_{21}^0 总是不稳定的;

(ii) 如果 $R_2 < 1$, 那么无病平衡点 EE_{22}^0 是局部渐近稳定的;

(iii) 如果 $R_2 > 1$, 那么地方病平衡点 EE_2^* 是局部渐近稳定的

证明. 子系统 (8) 的雅可比矩阵为

$$\mathbf{J}_2(S_a, I_a, I_h) = \begin{pmatrix} r_a - \frac{2r_a S_a}{K_a} - \beta_a I_a & -\beta_a S_a & 0 \\ \beta_a I_a & \beta_a S_a - (\mu_a + d_a + \mu_c) & 0 \\ 0 & \beta_h (1 - q) \left(\frac{\Lambda}{\mu_h} - I_h \right) & -\beta_h (1 - q) I_a - (\mu_h + d_h + \mu_b) \end{pmatrix}.$$

(i) 对于无病平衡点 EE_{21}^0 , 通过求解特征方程 $|\lambda E - \mathbf{J}_2(E_{21}^0)| = 0$, 可得 $\lambda_1 = r_a > 0$, $\lambda_2 = -(\mu_a + d_a + \mu_c) < 0$, $\lambda_3 = -(\mu_h + d_h + \mu_b) < 0$. 由于存在正特征根, 因此无病平衡点 EE_{21}^0 总是不稳定的.

(ii) 在无病平衡点 EE_{22}^0 处的特征方程为 $|\lambda E - \mathbf{J}_2(E_{22}^0)| = 0$, 解得 $\lambda_1 = -r_a < 0$, $\lambda_2 = (\mu_a + d_a + \mu_c)(R_2 - 1) < 0$, 如果 $R_2 < 1$, 有 $\lambda_3 = -(\mu_h + d_h + \mu_b) < 0$. 因此, 如果 $R_2 < 1$, 则 $\mathbf{J}_2(EE_{22}^0)$ 的所有特征值都是负的, 即无病平衡点 EE_{22}^0 是局部渐近稳定的.

(iii) 当 $R_2 > 1$ 时, 地方病平衡点 EE_2^* 存在. 在点 EE_2^* 处的特征方程为

$$\lambda^3 + \gamma_1 \lambda^2 + \gamma_2 \lambda + \gamma_3 = 0,$$

其中

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{r_a}{R_2} + \beta_h(1-q)I_{a2}^* + \mu_h + d_h + \mu_b > 0, \\ \gamma_2 &= \frac{r_a}{R_2}[\beta_h(1-q)I_{a2}^* + \mu_h + d_h + \mu_b] + \beta_a^2 S_{a2}^* I_{a2}^* > 0, \\ \gamma_3 &= \beta_a^2 S_{a2}^* I_{a2}^* [\beta_h(1-q)I_{a2}^* + \mu_h + d_h + \mu_b] > 0. \end{aligned}$$

进一步计算可得

$$\gamma_1\gamma_2 - \gamma_3 = \frac{\gamma_1 r_a}{R_2} [\beta_h(1-q)I_{a2}^* + \mu_h + d_h + \mu_b] + \frac{r_a \beta_a^2 S_{a2}^* I_{a2}^*}{R_2} > 0.$$

根据 Hurwitz 判据 [17] 可知, $\mathbf{J}_2(EE_2^*)$ 的所有特征值都具有负实部. 因此, 地方病平衡点 EE_2^* 是局部渐近稳定的.

2.3. 滑动模型的动力学行为

为了研究系统 (6) 滑模的动力学, 我们首先验证了它的存在性. 在 G_s 上有 $I_a + I_h - I_T = 0$. 下面计算,

$$\begin{aligned} \langle n, f_1 \rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_a S_a (1 - \frac{S_a}{K_a}) - \beta_a S_a I_a \\ \beta_a S_a I_a - (\mu_a + d_a) I_a \\ \beta_h (\frac{\Lambda}{\mu_h} - I_h) I_a - (\mu_h + d_h) I_h \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \beta_a S_a I_a - (\mu_a + d_a) I_a + \beta_h \left(\frac{\Lambda}{\mu_h} - I_T + I_a \right) I_a - (\mu_h + d_h) (I_T - I_a) \\ &= \beta_a S_a I_a + h_1(I_a), \end{aligned}$$

其中,

$$h_1(I_a) = \beta_h I_a^2 + \left(\beta_h \left(\frac{\Lambda}{\mu_h} - I_T \right) + (\mu_h + d_h) - (\mu_a + d_a) \right) I_a - (\mu_h + d_h) I_T,$$

再计算,

$$\begin{aligned} \langle n, f_2 \rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_a S_a (1 - \frac{S_a}{K_a}) - \beta_a S_a I_a \\ \beta_a S_a I_a - (\mu_a + d_a + \mu_c) I_a \\ \beta_h (1-q) (\frac{\Lambda}{\mu_h} - I_h) I_a - (\mu_h + d_h + \mu_b) I_h \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \beta_a S_a I_a - (\mu_a + d_a + \mu_c) I_a + \beta_h (1-q) \left(\frac{\Lambda}{\mu_h} - I_T + I_a \right) I_a - (\mu_h + d_h + \mu_b) (I_T - I_a) \\ &= \beta_a S_a I_a + h_2(I_a), \end{aligned}$$

其中,

$$\begin{aligned} h_2(I_a) &= \beta_h(1-q)I_a^2 + \left(\beta_h(1-q) \left(\frac{\Lambda}{\mu_h} - I_T \right) + (\mu_h + d_h + \mu_b) - (\mu_a + d_a + \mu_c) \right) I_a \\ &\quad - (\mu_h + d_h + \mu_b)I_T \\ &= h_1(I_a) - q\beta_h I_a^2 - \left(q\beta_h \left(\frac{\Lambda}{\mu_h} - I_T \right) + \mu_c \right) I_a - \mu_b(I_T - I_a) \\ &< h_1(I_a). \end{aligned}$$

当满足 $\langle n, f_1 \rangle > 0$ 并且 $\langle n, f_2 \rangle < 0$ 时, 滑模存在. 我们有

$$\begin{aligned} \langle n, f_1 \rangle > 0 &\Rightarrow S_a > H_1(I_a) = -\frac{h_1(I_a)}{\beta_a I_a}, \\ \langle n, f_1 \rangle < 0 &\Rightarrow S_a < H_2(I_a) = -\frac{h_2(I_a)}{\beta_a I_a}, \end{aligned}$$

其中 $H_2(I_a) > H_1(I_a)$. 此外, $h_1(0) < 0$ 并且 $h_1(I_a) = 0$ 只有一个正根. 如果满足 $\Lambda\beta_h < \mu_h(\mu_a + d_a)$ (即, $h_1(I_T) < 0$), 那么在区间 $(0, I_T)$ 上 $h_1(I_a)$ 是负的且有 $H_2(I_a) > H_1(I_a) > 0$. 因此, 滑模域 $\Sigma_2 \subset G_s$ 可以定义为

$$\Sigma_2 \triangleq \{(S_a, I_a, I_h) \in G_s : H_1(I_a) < S_a < H_2(I_a), I_a + I_h = I_T\}.$$

下面我们通过 Utkin 等效控制法 [8] 去求滑模方程. 又因为 $\sigma(I_a, I_h) = I_a + I_h - I_T = 0$, 因此

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dt} &= \frac{\partial \sigma}{\partial I_a} \frac{dI_a}{dt} + \frac{\partial \sigma}{\partial I_h} \frac{dI_h}{dt} \\ &= \beta_a S_a I_a - (\mu_a + d_a)I_a - \varepsilon \mu_c I_a + \beta_h(1-q\varepsilon) \left(\frac{\Lambda}{\mu_h} - I_h \right) I_a - (\mu_h + d_h)I_h - \varepsilon \mu_b I_h \\ &= 0. \end{aligned}$$

对上式中的 ε 求解可得

$$\begin{aligned} \varepsilon(I_a) &= \frac{\beta_a S_a I_a - (\mu_a + d_a)I_a + \beta_h \left(\frac{\Lambda}{\mu_h} - I_h \right) I_a - (\mu_h + d_h)I_h}{\mu_c I_a + q\beta_h \left(\frac{\Lambda}{\mu_h} - I_h \right) I_a + \mu_b I_h} \\ &= \frac{\beta_a S_a I_a - (\mu_a + d_a)I_a + \beta_h \left(\frac{\Lambda}{\mu_h} - I_T \right) I_a + \beta_h I_a^2 - (\mu_h + d_h)I_T + (\mu_h + d_h)I_a}{q\beta_h I_a^2 + [q\beta_h \left(\frac{\Lambda}{\mu_h} - I_T \right) + (\mu_c - \mu_b)]I_a + \mu_b I_T}. \end{aligned}$$

将 $\varepsilon(I_a)$ 代入系统 (3), 又由于 $\frac{d\sigma}{dt} = 0$, 我们有 $\frac{dI_a}{dt} + \frac{dI_h}{dt} = 0$. 因此, 滑模的动力学可由以下微分方程

给出

$$\begin{cases} \frac{dS_a}{dt} = r_a S_a \left(1 - \frac{S_a}{K_a}\right) - \beta_a S_a I_a, \\ \frac{dI_a}{dt} = \beta_a S_a I_a - (\mu_a + d_a) I_a - \varepsilon(I_a) \mu_c I_a \\ \quad = I_a \frac{[\beta_a S_a \mu_b - (\mu_a + d_a) \mu_b + (\mu_h + d_h) \mu_c] (I_T - I_a) + \beta_h \left(\frac{\Lambda}{\mu_h} - I_T + I_a\right) I_a [q \beta_a S_a - q(\mu_a + d_a) - \mu_c]}{q \beta_h I_a^2 + [q \beta_h \left(\frac{\Lambda}{\mu_h} - I_T\right) + (\mu_c - \mu_b)] I_a + \mu_b I_T}, \\ \frac{dI_b}{dt} = -\frac{dI_a}{dt}. \end{cases} \quad (9)$$

引理 2.3.1. 如果满足 $C_1 < 0, C_2 < 0, C_4 > 0$, 则一元三次方程

$$g(I_a) = C_1 I_a^3 + C_2 I_a^2 + C_3 I_a + C_4 = 0, \quad (10)$$

有且只有一个正根.

证明. 由于

$$g(0) = C_4 > 0, \quad g(+\infty) < 0.$$

根据中间值定理可知, 方程 (10) 至少有一个正根. 因此, 我们考虑以下所有的情况.

(i) 方程 (10) 有三个实根, 根据韦达定理有

$$I_{a1} I_{a2} I_{a3} = -\frac{C_4}{C_1} > 0, \quad (11)$$

$$I_{a1} + I_{a2} + I_{a3} = -\frac{C_2}{C_1} < 0. \quad (12)$$

根据 (11) 式可知方程 (10) 有一个正根以及两个负根, 或者有三个正根. 又由 (12) 式可知方程 (10) 至少存在一个负根. 因此, 方程 (10) 有唯一的正根.

(ii) 方程 (10) 有一个正根以及一对复根, 我们将其表示为 $z, x + yi, x - yi$, 其中 x, y, z 都是正数, 我们有

$$\begin{aligned} g(I_a) &= [I_a - (x + yi)][I_a - (x - yi)](I_a - z) \\ &= I_a^3 - (2x + z)I_a^2 + (x^2 + y^2 + 2xz)I_a - z(x^2 + y^2) = 0. \end{aligned}$$

与方程 (10) 相比可知, 上式满足 $-(2x + z) < 0$, 这与 $C_2/C_1 > 0$ 相矛盾.

因此, 方程 (10) 有且只有一个正根.

引理 2.3.2. 如果满足 $\eta_2 < 0, \eta_4 > 0$ (这里的 η_2 和 η_4 在证明中给出), 并且 $EE_s^* \in \Sigma_2$, 则滑模系统 (9) 存在唯一的正伪平衡点 $EE_s^* = \left(K_a - \frac{K_a \beta_a I_{as}^*}{r_a}, I_{as}^*, I_c - I_{as}^*\right)$.

证明. 令 $dS_a/dt = 0$ 并且 $dI_a/dt = 0$, 可得

$$S_a = K_a - \frac{K_a \beta_a I_a}{r_a}, \quad (13)$$

并且

$$[\beta_a S_a \mu_b - (\mu_a + d_a) \mu_b + (\mu_h + d_h) \mu_c] (I_T - I_a) + \beta_h \left(\frac{\Lambda}{\mu_h} - I_T + I_a \right) I_a [q \beta_a S_a - q(\mu_a + d_a) - \mu_c] = 0. \quad (14)$$

将式 (10) 代入到式 (11), 我们得到一个关于 I_a 的方程,

$$\eta_1 I_a^3 + \eta_2 I_a^2 + \eta_3 I_a + \eta_4 = 0, \quad (15)$$

其中

$$\eta_1 = -q \beta_h \beta_a^2 K_a < 0,$$

$$\eta_2 = \beta_a^2 K_a \mu_b - q \beta_h \beta_a^2 K_a \left(\frac{\Lambda}{\mu_h} - I_T \right) + \beta_h [q \beta_a K_a r_a - r_a q(\mu_a + d_a) - r_a \mu_c],$$

$$\begin{aligned} \eta_3 = & -\beta_a^2 K_a \mu_b I_T - \beta_a K_a \mu_b r_a + (\mu_a + d_a) \mu_b r_a - r_a \mu_c (\mu_h + d_h) \\ & + \beta_h \left(\frac{\Lambda}{\mu_h} - I_T \right) [q \beta_a K_a r_a - r_a q(\mu_a + d_a) - r_a \mu_c], \end{aligned}$$

$$\eta_4 = [\beta_a \mu_b K_a - (\mu_a + d_a) \mu_b + (\mu_h + d_h) \mu_c] r_a I_T.$$

如果 $\eta_2 < 0$, $\eta_4 > 0$, 根据引理 2.3.1 可知方程 (12) 只有一个正根, 我们将其表示为 I_{as}^* . 根据式 (10) 以及 $I_a + I_h = I_T$ 可得,

$$EE_s^* = (S_{as}^*, I_{as}^*, I_{hs}^*) = \left(K_a - \frac{K_a \beta_a I_{as}^*}{r_a}, I_{as}^*, I_T - I_{as}^* \right).$$

此外, 如果满足 $EE_s^* \in \Sigma_2 \subset G_s$, 则 EE_s^* 是一个伪平衡点.

接下来我们研究伪平衡点 EE_s^* 存在时的稳定性并给出以下定理.

定理 2.3.1. 如果满足 $q(\mu_a + d_a) + \mu_c - q \beta_a S_{as}^* > 0$, 则 $EE_s^* \in \Sigma_2$ 是局部渐近稳定的.

证明. 系统 (9) 前两个方程的雅可比矩阵为

$$\mathbf{J}_s(S_{as}^*, I_{as}^*) = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{pmatrix}, \quad (16)$$

其中

$$\begin{aligned}
 J_{11} &= \frac{\partial \dot{S}_a}{\partial S_a}(S_{as}^*, I_{as}^*) = -\frac{r_a S_{as}^*}{K_a} < 0, \\
 J_{12} &= \frac{\partial \dot{S}_a}{\partial I_a}(S_{as}^*, I_{as}^*) = -\beta_a S_{as}^* < 0, \\
 J_{21} &= \frac{\partial \dot{I}_a}{\partial S_a}(S_{as}^*, I_{as}^*) = \frac{I_{as}^* \left[\beta_a \mu_b (I_T - I_{as}^*) + q \beta_a \beta_h I_{as}^* \left(\frac{\Lambda}{\mu_h} - I_T + I_{as}^* \right) \right]}{q \beta_h I_{as}^{*2} + \left[q \beta_h \left(\frac{\Lambda}{\mu_h} - I_T \right) + (\mu_c - \mu_b) \right] I_{as}^* + \mu_b I_T} > 0,
 \end{aligned}$$

并且

$$\begin{aligned}
 J_{22} &= \frac{\partial \dot{I}_a}{\partial I_a}(S_{as}^*, I_{as}^*) \\
 &= \frac{I_{as}^* [-\beta_a S_{as}^* \mu_b + (\mu_a + d_a) \mu_b - (\mu_h + d_h) \mu_c]}{q \beta_h I_{as}^{*2} + \left[q \beta_h \left(\frac{\Lambda}{\mu_h} - I_T \right) + (\mu_c - \mu_b) \right] I_{as}^* + \mu_b I_T} \\
 &\quad + \frac{I_{as}^* \left(-\beta_h \frac{\Lambda}{\mu_h} [q(\mu_a + d_a) + \mu_c - q \beta_a S_{as}^*] + \beta_h [q(\mu_a + d_a) + \mu_c - q \beta_a S_{as}^*] (I_T - I_{as}^*) \right)}{q \beta_h I_{as}^{*2} + \left[q \beta_h \left(\frac{\Lambda}{\mu_h} - I_T \right) + (\mu_c - \mu_b) \right] I_{as}^* + \mu_b I_T} \\
 &\quad - \frac{\beta_h [q(\mu_a + d_a) + \mu_c - q \beta_a S_{as}^*] I_{as}^{*2}}{q \beta_h I_{as}^{*2} + \left[q \beta_h \left(\frac{\Lambda}{\mu_h} - I_T \right) + (\mu_c - \mu_b) \right] I_{as}^* + \mu_b I_T} \\
 &= -\frac{\beta_h [q(\mu_a + d_a) + \mu_c - q \beta_a S_{as}^*] \left(\frac{\Lambda}{\mu_h} - I_T + I_{as}^* \right) I_{as}^{*2}}{\left(q \beta_h I_{as}^{*2} + \left[q \beta_h \left(\frac{\Lambda}{\mu_h} - I_T \right) + (\mu_c - \mu_b) \right] I_{as}^* + \mu_b I_T \right) (I_T - I_{as}^*)} \\
 &\quad - \frac{\beta_h [q(\mu_a + d_a) + \mu_c - q \beta_a S_{as}^*] \left(\frac{\Lambda}{\mu_h} - I_T \right) I_{as}^* + 2 \beta_h [q(\mu_a + d_a) + \mu_c - q \beta_a S_{as}^*] I_{as}^{*2}}{q \beta_h I_{as}^{*2} + \left[q \beta_h \left(\frac{\Lambda}{\mu_h} - I_T \right) + (\mu_c - \mu_b) \right] I_{as}^* + \mu_b I_T}.
 \end{aligned}$$

如果满足 $q(\mu_a + d_a) + \mu_c - q\beta_a S_{as}^* > 0$, 可知 $J_{22} < 0$. 因此, $J_{11} + J_{22} < 0$ 并且 $J_{11} \cdot J_{22} - J_{12} \cdot J_{21} > 0$, 即 (16) 的所有特征值都具有负实部, 则 $EE_s^* \in \Sigma_2$ 是局部渐近稳定的.

2.4. 全局的动力学行为

我们已经研究了 G_{1ah} 区域以及 G_{2ah} 区域的动力学行为, 并给出了滑模的存在性证明及其动力学分析, 接下来我们将讨论 $R_i > 1, i = 1, 2$ 时系统 (6) 的全局动力学行为. 值得注意的是, 选择不同的阈值 I_T , 系统 (6) 将呈现不同的动力学行为. 根据 $I_{a1}^*, I_{h1}^*, I_{a2}^*$ 以及 I_{h2}^* 的关系, 系统 (6) 的动力学行为可以分为三种情况. 为了进一步证明理论结果, 我们进行了一些数值模拟, 并且数值模拟中所用参数的数值已在表 1 中给出.

2.4.1. Case 1: $I_{a1}^* + I_{h1}^* < I_T, I_{a2}^* + I_{h2}^* < I_T$

如果满足 $I_{a1}^* + I_{h1}^* < I_T$ 且 $I_{a2}^* + I_{h2}^* < I_T$, 此时 EE_1^* 和 EE_2^* 都落在 G_{1ah} 区域内, 并且没有平衡点落在 G_{2ah} 区域, 则 E_1^* 是一个真平衡点, EE_2^* 是一个假平衡点, 我们将其分别记为 EE_1^R 和 EE_2^V . 下面我们来说明, 在这种情况下 EE_1^R 将达到稳定.

定理 2.4.1.1 如果满足 $I_{a1}^* + I_{h1}^* < I_T$ 且 $I_{a2}^* + I_{h2}^* < I_T$, 则 EE_1^R 是稳定的.

证明. 在这种条件下, G_{1ah} 区域内只有一个平衡点 EE_1^R , 根据定理 2.1.1 可知, EE_1^R 是稳定的.

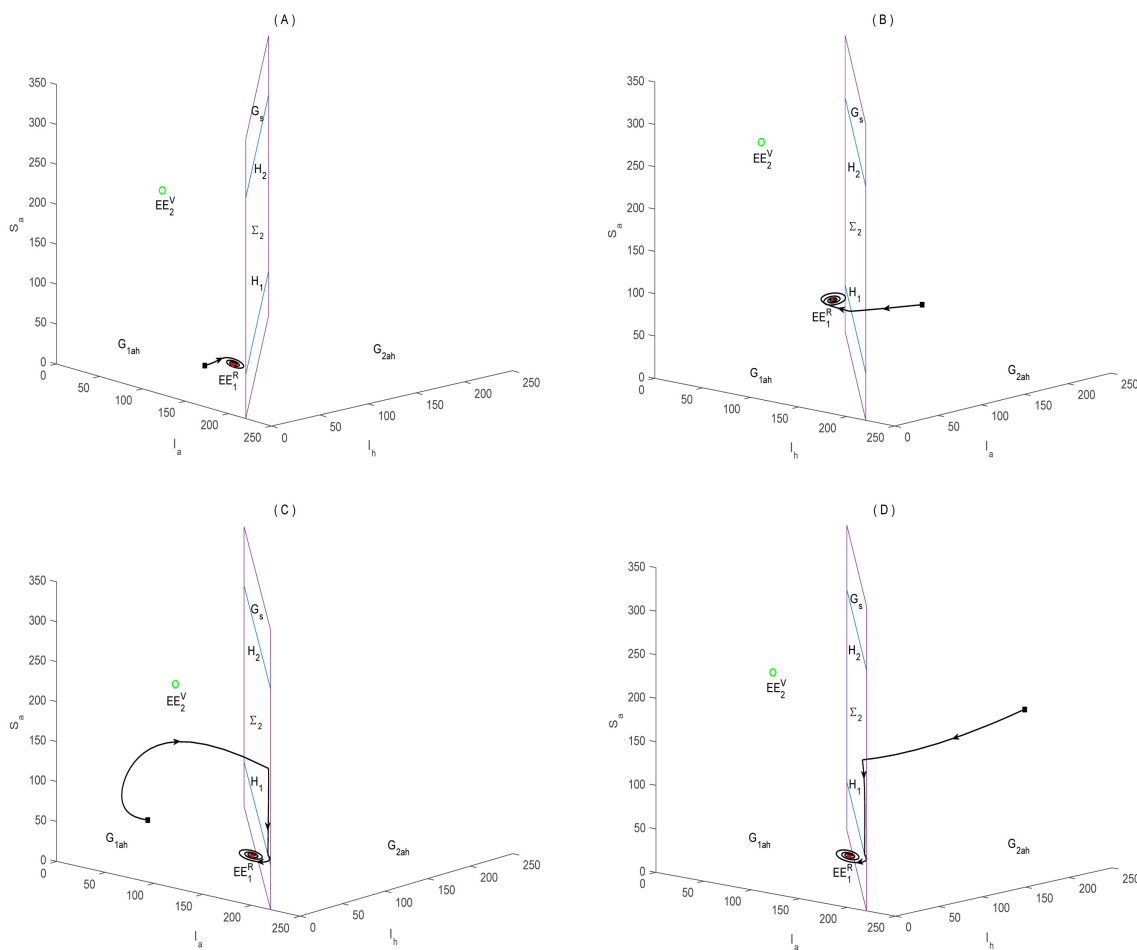


Figure 1. EE_1^R is stable when $I_{a1}^* + I_{h1}^* < I_T$ and $I_{a2}^* + I_{h2}^* < I_T$, where $I_T = 220$

图 1. 当 $I_{a1}^* + I_{h1}^* < I_T$ 且 $I_{a2}^* + I_{h2}^* < I_T$ 时, EE_1^R 是稳定的, 其中 $I_T = 220$

图 1 展示了 $I_{a1}^* + I_{h1}^* < I_T$ 且 $I_{a2}^* + I_{h2}^* < I_T$ 的情况下, $I_T = 220$ 时可能的轨迹情况:

- (a) 从 G_{1ah} 区域出发的轨线直接稳定到真平衡点 EE_1^R .
- (b) 从 G_{2ah} 区域出发的轨线穿过流形 G_s , 进入到 G_{1ah} 区域, 并在 G_{1ah} 区域中稳定到真平衡点 EE_1^R .

(c) 从 G_{1ah} 区域出发的轨线先击中滑动段 $\Sigma_2 \subset G_s$, 并在滑动段上滑到其边界 H_1 , 然后进入 G_{1ah} 区域并最终稳定到真平衡点 EE_1^R .

(d) 从 G_{2ah} 区域出发的轨线先击中滑动段 Σ_2 并滑到其边界 H_1 , 然后进入 G_{1ah} 区域并最终稳定到真平衡点 EE_1^R .

2.4.2. Case 2: $I_{a1}^* + I_{h1}^* > I_T, I_{a2}^* + I_{h2}^* > I_T$

当 $I_{a1}^* + I_{h1}^* > I_T$ 且 $I_{a2}^* + I_{h2}^* > I_T$ 时, EE_1^* 和 EE_2^* 都落在 G_{2ah} 区域, 并且没有平衡点位于 G_{1ah} 区域. 在这种情况下, EE_1^* 是假平衡点而 EE_2^* 是真平衡点, 我们将其分别记为 EE_1^V 和 EE_2^R . 下面我们通过定理 2.4.2.1 来说明 EE_2^R 能够达到稳定.

定理 2.4.2.1 如果满足 $I_{a1}^* + I_{h1}^* > I_T$ 且 $I_{a2}^* + I_{h2}^* > I_T$, 则 EE_2^R 是稳定的.

证明. 在这种情况下, G_{2ah} 区域中只有一个平衡点 EE_2^R . 在定理 2.2.1 中我们已经证明了 EE_2^R 是稳定的. 下面我们通过图 2 来进一步说明.

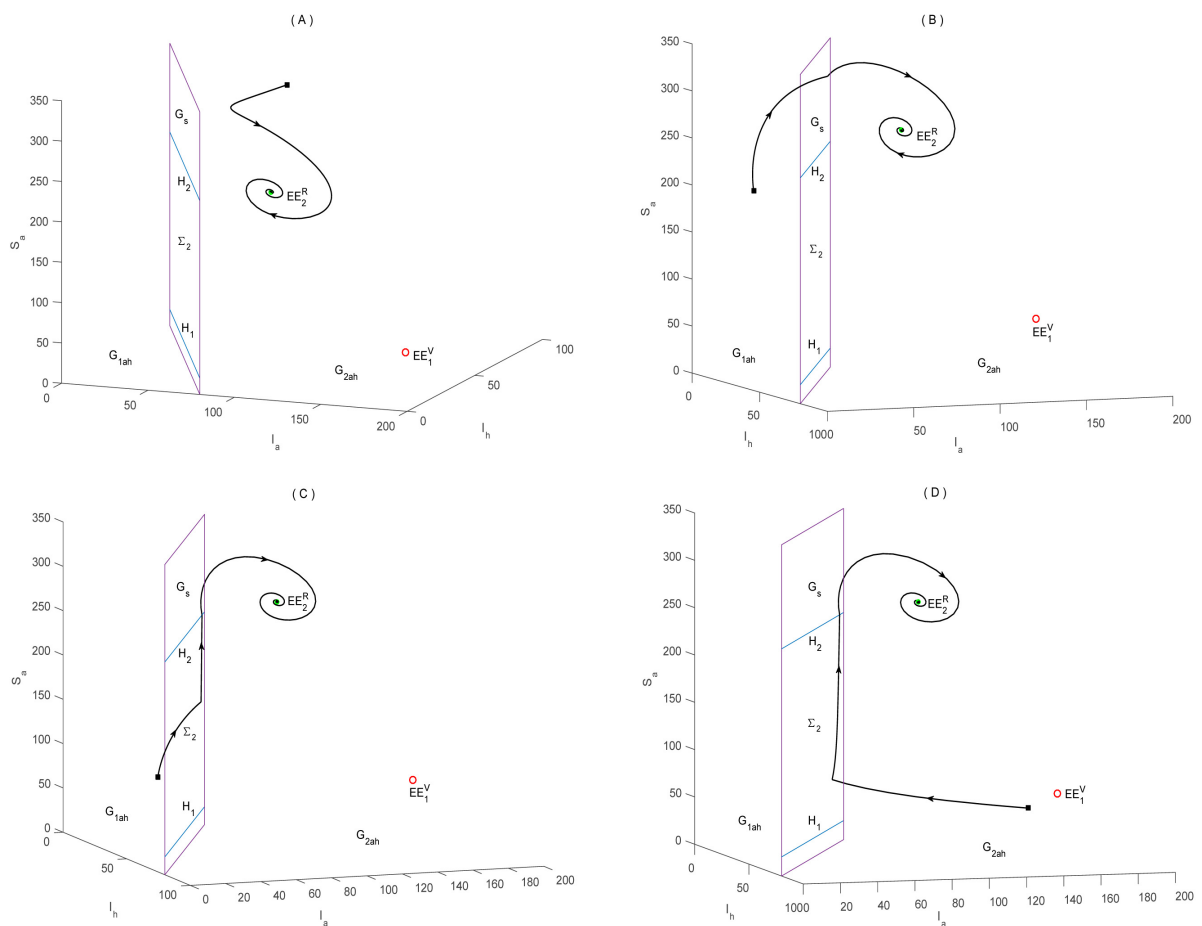


Figure 2. EE_2^R is stable when $I_{a1}^* + I_{h1}^* > I_T$ and $I_{a2}^* + I_{h2}^* > I_T$, where $I_T = 80$

图 2. 当 $I_{a1}^* + I_{h1}^* > I_T$ 且 $I_{a2}^* + I_{h2}^* > I_T$ 时, EE_2^R 是稳定的, 其中 $I_T = 80$

图 2 展示了 $I_{a1}^* + I_{h1}^* > I_T$ 且 $I_{a2}^* + I_{h2}^* > I_T$ 的情况下, $I_T = 80$ 时可能的轨迹情况:

(a) 从 G_{2ah} 区域出发的轨线直接稳定到真平衡点 EE_2^R .

(b) 从 G_{1ah} 区域出发的轨线穿过流形 G_s , 并在区域 G_{2ah} 中稳定到真平衡点 EE_2^R .

(c) 从 G_{1ah} 区域出发的轨线首先击中滑动段 Σ_2 并滑到其边界 H_2 , 然后进入 G_{2ah} 区域, 最终在 G_{2ah} 区域中稳定到真平衡点 EE_2^R .

(d) 从 G_{2ah} 区域出发的轨线首先击中滑动段 Σ_2 并滑到其边界 H_2 , 最终在区域 G_{2ah} 中稳定到真平衡点 EE_2^R .

2.4.3. Case 3: $I_{a1}^* + I_{h1}^* > I_T, I_{a2}^* + I_{h2}^* < I_T$

当 $I_{a1}^* + I_{h1}^* > I_T$ 且 $I_{a2}^* + I_{h2}^* < I_T$ 时, EE_1^* 落在 G_{2ah} 区域内, EE_2^* 落在 G_{1ah} 区域内, 此时 EE_1^* 和 EE_2^* 都是假平衡点, 我们将其分别记为 EE_1^V 和 EE_2^V . 如果 $EE_s^* \in \Sigma_2 \subset G_s$, 则 EE_s^* 是一个伪平衡点. 下面我们通过定理 2.4.3.1 来说明, 如果满足 $I_{a1}^* + I_{h1}^* > I_T$ 且 $I_{a2}^* + I_{h2}^* < I_T$, 则 EE_s^* 存在时稳定.

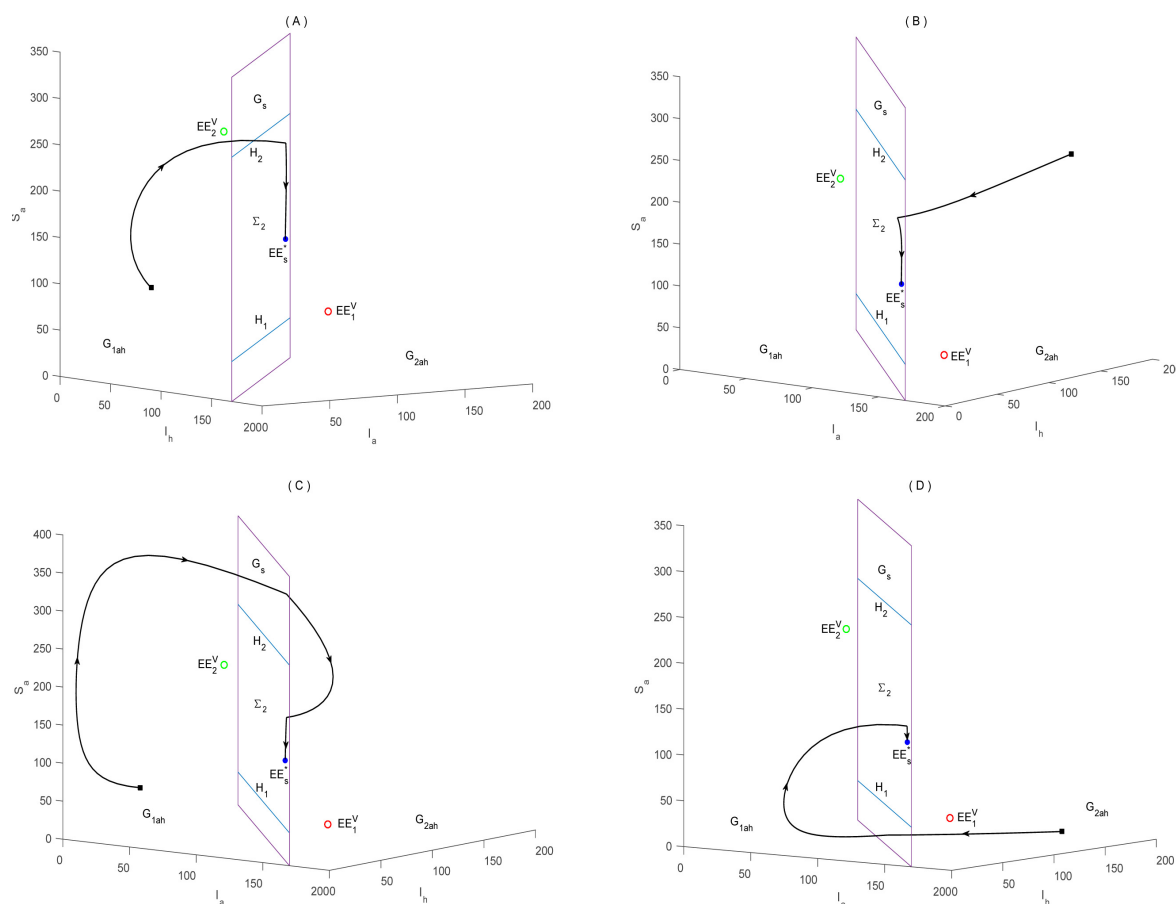


Figure 3. EE_s^* is stable when $I_{a1}^* + I_{h1}^* > I_T$ and $I_{a2}^* + I_{h2}^* < I_T$, where $I_T = 170$

图 3. 当 $I_{a1}^* + I_{h1}^* > I_T$ 且 $I_{a2}^* + I_{h2}^* < I_T$ 时, EE_s^* 是稳定的, 其中 $I_T = 170$

定理 2.4.3.1 在 $I_{a1}^* + I_{h1}^* > I_T$ 且 $I_{a2}^* + I_{h2}^* < I_T$ 的条件下, 如果满足 $q(\mu_a + d_a) + \mu_c - q\beta_a S_{as}^* > 0$, 则 EE_s^* 存在时稳定

证明. 在流形 G_s 的两边没有平衡点存在. 此外, 在定理 2.3.1 中已经证明了 EE_s^* 的稳定性. 下面我们通过图 3 来进一步说明.

图 3 展示了 $I_{a1}^* + I_{h1}^* > I_T$ 且 $I_{a2}^* + I_{h2}^* < I_T$ 的情况下, $I_T = 170$ 时可能的轨迹情况:

- (a) 从 G_{1ah} 区域出发的轨线击中滑模域 Σ_2 , 并最终在滑模域 $\Sigma_2 \subset G_s$ 上收敛到伪平衡点 EE_s^* .
- (b) 从 G_{2ah} 区域出发的轨线击中滑模域 Σ_2 , 并最终在滑模域 $\Sigma_2 \subset G_s$ 上收敛到伪平衡点 EE_s^* .
- (c) 从 G_{1ah} 区域出发的轨线穿过流形 G_s 进入 G_{2ah} 区域, 然后再次击中 G_s , 并在滑动段 $\Sigma_2 \subset G_s$ 上收敛到伪平衡点 EE_s^* .
- (d) 从 G_{2ah} 区域出发的轨线穿过流形 G_s 进入 G_{1ah} 区域, 然后再次击中 G_s , 并在滑动段 $\Sigma_2 \subset G_s$ 上收敛到伪平衡点 EE_s^* .

3. 结论与展望

在禽流感爆发的最初阶段, 许多人不知道这种疾病的存在, 因此不会采取任何预防措施, 这将会导致疾病迅速爆发. 当禽流感发展到一定程度即所谓的阈值水平时, 人们便开始采取一定的措施以防造成更大的损失. 根据阈值选取的不同, 系统 (1) 呈现出了不同的动力学行为. 通过对非光滑系统的定性分析, 我们得到了模型的滑模动力学及其全局动力学: 针对阈值 I_T 的不同, 模型的解要么收敛到一个真平衡点 (即 EE_1^R 或 EE_2^R), 要么收敛到一个伪平衡点 (即 EE_s^*). 为了抑制爆发或将感染的数量稳定到可接受的水平, 我们必须选择合适的阈值 I_T 从而使系统 (1) 的解轨线收敛到 G_{1ah} 区域的 EE_1^* 或者滑模域 $\Sigma_2 \subset G_s$ 上的 EE_s^* .

综上所述, 一个好的阈值策略是防止疾病爆发或将感染的数量控制在可接受水平的关键因素. 在本文中值得注意的是, 我们假设人类的免疫力是永久性的 (即恢复后的人类不会再次被感染). 对于禽类种群, 已感染的禽类被假定保持受感染 (即受感染的禽类不会移动到其他类别). 此外, 对于系统 (1) 中伪平衡点存在性的分析, 在本文中我们只展开了一种情况 (即引理 2.3.2), 实际上它有更丰富的结果, 我们将这一问题作为未来的研究.

参考文献

- [1] Henzler, D.J., Kradel, D.C., Davison, S., *et al.* (2003) Epidemiology, Production Losses, and Control Measures Associated with an Outbreak of Avian Influenza Subtype H7N2 in Pennsylvania (1996-98). *Avian Diseases*, **47**, 1022-1036. <https://doi.org/10.1637/0005-2086-47.s3.1022>

- [2] Changwen, K., Pun, M.C.K., Wenfei, Z., *et al.* (2017) Human Infection with Highly Pathogenic Avian Influenza A (H7N9) Virus, China. *Emerging Infectious Diseases*, **23**, 1332-1340. <https://doi.org/10.3201/eid2308.170600>
- [3] Li, Q., *et al.* (2014) Epidemiology of Human Infections with Avian Influenza A(H7N9) Virus in China. *New England Journal of Medicine*, **370**, 520-532.
- [4] Fung, C.H. and Wong, K. (2013) Efficient Use of Social Media during the Avian influenza A H7N9 Emergency Response. *Western Pacific Surveillance and Response*, **4**, 1-3. <https://doi.org/10.5365/wpsar.2013.4.3.005>
- [5] Yu, H., Wu, J.T., Cowling, B.J., *et al.* (2014) Impact of Live Poultry Market Closure in Reducing Bird-to-Human Transmission of Avian Influenza A(H7N9) Virus: An Ecological Study. *The Lancet*, **383**, 541-548. [https://doi.org/10.1016/S0140-6736\(13\)61904-2](https://doi.org/10.1016/S0140-6736(13)61904-2)
- [6] Yuan, J., Lau, E., Li, K., *et al.* (2015) Effect of Live Poultry Market Closure on Avian Influenza A(H7N9) Virus Activity in Guangzhou, China, 2014. *Emerging Infectious Diseases*, **21**, 1784-1793. <https://doi.org/10.3201/eid2110.150623>
- [7] He, Y., Liu, P., Tang, S., *et al.* (2014) Live Poultry Market Closure and Control of Avian Influenza A(H7N9), Shanghai, China. *Emerging Infectious Diseases*, **20**, 1565-1566. <https://doi.org/10.3201/eid2009.131243>
- [8] Mu, R., Wei, A. and Yang, Y. (2019) Global Dynamics and Sliding Motion in A(H7N9) Epidemic Models with Limited Resources and Filippov Control. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **477**, 1296-1317. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2019.05.013>
- [9] Gao, H.-N., *et al.* (2013) Clinical Findings in 111 Cases of Influenza A (H7N9) Virus Infection. *New England Journal of Medicine*, **368**, 2277-2285.
- [10] Li, G.H. and Zhang, Y.X. (2017) Dynamic Behaviors of a Modified SIR Model in Epidemic Diseases Using Nonlinear Incidence and Recovery Rates. *PLoS ONE*, **12**, e0175789. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0175789>
- [11] Shan, C. and Zhu, H. (2014) Bifurcations and Complex Dynamics of an SIR Model with the Impact of the Number of Hospital Beds. *Journal of Differential Equations*, **257**, 1662-1688. <https://doi.org/10.1016/j.jde.2014.05.030>
- [12] Cauchemez, S., Donnelly, C.A., Reed, C., *et al.* (2009) Household Transmission of 2009 Pandemic Influenza A (H1N1) Virus in the United States. *New England Journal of Medicine*, **361**, 2619-2627. <https://doi.org/10.1056/NEJMoa0905498>

- [13] Tang, S., Xiao, Y., Yang, Y., *et al.* (2010) Community-Based Measures for Mitigating the 2009 H1N1 Pandemic in China. *PLoS ONE*, **5**, e10911. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0010911>
- [14] Yang, Y. and Wang, L. (2020) Global Dynamics and Rich Sliding Motion in an Avian-Only Filippov System in Combating Avian Influenza. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **30**, Article ID: 2050008. <https://doi.org/10.1142/S021812742050008X>
- [15] Iwami, S., Takeuchi, Y. and Liu, X. (2009) Avian Flu Pandemic: Can We Prevent It? *Journal of Theoretical Biology*, **257**, 181-190. <https://doi.org/10.1016/j.jtbi.2008.11.011>
- [16] Liu, S., Ruan, S. and Zhang, X. (2017) Nonlinear Dynamics of Avian Influenza Epidemic Models. *Mathematical Biosciences*, **283**, 118-135. <https://doi.org/10.1016/j.mbs.2016.11.014>
- [17] 肖燕妮, 周义仓, 唐三一. 生物数学原理[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 2012.