Advances in Applied Mathematics 应用数学进展**, 2021, 10(4), 817-827**
Published Online April 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2021.104090

一类含*p*-Laplace算子的奇异拟线性问题解的多重性

徐颖颖

上海理工大学理学院，上海
Email: 651872282@qq.com

收稿日期：2021年3月7日；录用日期：2021年3月29日；发布日期：2021年4月9日

摘　要

本文结合上下解技巧和极大极小方法研究了一类奇异拟线性椭圆型方程解的存在性和多重性。首先，在赋予非线性项和奇异项合理的假设条件下，得到了该问题非平凡解的存在性；其次，增强假设条件并运用山路引理，我们获得了该问题第二个解。

关键词

奇异项，上下解技巧，极大极小方法

Multiplicity of Solutions of a Class of Singular Quasilinear Problems Involving *p*-Laplacian

Yingying Xu

College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai
Email: 651872282@qq.com

Received: Mar. 7th, 2021; accepted: Mar. 29th, 2021; published: Apr. 9th, 2021

Abstract

In this paper we combine sub-supersolution technique and minimax methods to study the existence and multiplicity of solutions for a class of singular quasilinear elliptic equations. Firstly, by suitable hypotheses on the nonlinearity term and singular term, we obtain the existence of non-

文章引用: 徐颖颖. 一类含 *p*-Laplace 算子的奇异拟线性问题解的多重性[J]. 应用数学进展, 2021, 10(4): 817-827.
DOI: 10.12677/aam.2021.104090

trivial solutions. Furthermore, by strengthening the hypotheses and applying the Mountain Pass Theorem, we show the existence of a second solution.

Keywords

Singular Term, Sub-Supersolution Technique, Minimax Methods

1. 引言

本文考虑如下奇异拟线性椭圆型方程解的存在性和多重性：

$$\begin{cases} -\Delta_p u - u\Delta_p\left(u^2\right) = b(x)u^{-\gamma} + f(x,u),\ x\in\Omega, \\ u>0,\quad x\in\Omega,\quad u=0,\quad x\in\partial\Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $\Omega\subset\mathbb{R}^N\ (N\geq 3)$ 是一个具有光滑边界的有界区域，$b(x)>0$、$\gamma>0$、$f(x,s)$ 是连续的且满足一定条件。

近几十年，对含有 p-Laplace 算子的拟线性椭圆型方程解的存在性等相关问题得到了广泛的研究，如文献[1] [2] [3]。同时，非线性奇异边值问题也引起了不少学者的关注，尤其在流体力学、非牛顿流体等物理领域涌现出了大量的研究成果，如文献[4] [5] [6]。但对于同时包含问题(1.1)中拟线性项以及奇异非线性项的椭圆型方程的问题，仅有较少学者进行研究，且均为 $p=2$ 的情况，具有代表性结果的是文献[7] [8] [9]。

本文目的在于将已有的相关成果拓展到 $p\neq 2$ 的情形，得到方程(1.1)解的存在性和多重性结果。

下面给出函数 $b(x)$ 和 $f(x,s)$ 满足的条件：

(b_1)存在函数 $e_0\in C_0^1\left(\bar{\Omega}\right)$，$e_0\geq 0$ 且 $q>N$，使得 $be_0^{-\gamma}\in L^q(\Omega)$。

(f_1)对几乎处处 $x\in\Omega$ 和任意 $s\in[0,\delta]$，存在常数 $\delta,k>0$，使得

$$-kb(x)\leq f(x,s).$$

(f_2)对几乎处处 $x\in\Omega$ 和任意 $s\in\mathbb{R}$，存在 $F_0>0$，$r>2p$ 且 $0\leq a_1(x)\in L^\infty(\Omega)$，$a_1(x)$ 不恒为 0，使得

$$\left|f(x,s)\right|\leq F_0\left(1+a_1(x)|s|^{r-1}\right).$$

(f_3)对几乎处处 $x\in\Omega$ 和任意 $s\in[s_0,\infty)$，存在 $s_0>0$ 且 $\theta>p$，使得

$$0<2\theta F(x,s)\leq sf(x,s),$$

其中 $F(x,s)=\int_0^s f(x,t)\mathrm{d}t$。

若 $u\in W_0^{1,p}(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$，$u>0$，成立

$$\int_\Omega\left(1+2^{p-1}|u|^p\right)|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla\varphi+2^{p-1}\int_\Omega|\nabla u|^p|u|^{p-2}u\varphi=\int_\Omega h(x,u)\varphi,\ \forall\varphi\in C_0^\infty(\Omega), \tag{1.2}$$

其中 $h(x,u)=b(x)u^{-\gamma}+f(x,u)$，则称函数 $u:\Omega\to\mathbb{R}$ 是方程(1.1)的一个正弱解。

进一步，方程(1.1)对应泛函如下：

$$J(u)=\frac{1}{p}\int_{\Omega}\left(1+2^{p-1}|u|^{p}\right)|\nabla u|^{p}-\int_{\Omega}H(x,u),$$

其中 $H(x,s)=\int_0^s h(x,t)\mathrm{d}t$。不难发现，对其直接应用变分方法存在困难，主要困难在于当 $u\in W_0^{1,p}(\Omega)$ 时，$|u|^p|\nabla u|^p\in L^1(\Omega)$ 不一定成立。为解决这一困难，参考文献[10]中的方法，我们进行变量替换 $v=g^{-1}(u)$，g 定义为

$$\begin{cases}g(s)=-g(-s) & s\in(-\infty,0],\\ g'(s)=\dfrac{1}{\left(1+2^{p-1}|g(s)|^{p}\right)^{1/p}} & s\in[0,+\infty).\end{cases}\tag{1.3}$$

对应泛函 J 可写为

$$J(g(v))=\frac{1}{p}\int_{\Omega}|\nabla v|^{p}-\int_{\Omega}H(x,g(v)),\tag{1.4}$$

且定义 $\Phi(v):=J(g(v))$，在给定 $H(x,s)$ 合理假设条件下，$\Phi(v)$ 在 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 上有意义。进一步，$\Phi(v)$ 为如下拟线性方程对应的 Euler-Lagrange 泛函：

$$\begin{cases}-\Delta_p v=b(x)(g(v))^{-\gamma}g'(v)+f(x,g(v))g'(v) & x\in\Omega,\\ v>0\quad x\in\Omega,\quad v=0\quad x\in\partial\Omega.\end{cases}\tag{1.5}$$

显然，若 v 是方程(1.5)的弱解，则 $u=g(v)$ 是方程(1.1)的弱解。因此只需要研究方程(1.5)的解的存在性。

本文主要结果如下：

定理 1.1：假设条件(b_1)、(f_1)和(f_2)成立，则存在 $\alpha_0>0$ 使得当 $\|a_1\|_\infty\le\alpha_0$ 成立时，方程(1.1)至少存在一个正弱解。

定理 1.2：假设条件(b_1)、(f_1)~(f_3)成立，$r<2p^*$，$p^*=Np/(N-p)$，则存在 $\alpha_1>0$ 使得当 $\|a_1\|_\infty\le\alpha_1$ 成立时，方程(1.1)至少存在两个正弱解 $\tilde v,\hat v$，且 $\tilde v<\hat v$。

2. 预备知识和基本引理

符号：记 $C^*,C^{**},C,C_i,i=0,1,2,\cdots$ 表示不同的正常数，且相邻出现可能是不相同的。

记 $L^p(\Omega)$ 是 Lebesgue 空间，并定义范数 $\|u\|_p=\left(\int_\Omega|u|^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}},1\le p<\infty$；$\|u\|_\infty=\operatorname*{esssup}_{x\in\Omega}|u|,\ p=\infty$。

记 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 是 Sobolev 空间，并定义范数 $\|u\|=\left(\int_\Omega|\nabla u|^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$。

注记 2.1：由(b_1)中 $be_0^{-\gamma}$ 的可积性条件，可知 $meas\{x\in\Omega:e_0(x)=0\}=0$ 且 $b\in L^q(\Omega)$。

引理 2.2 [9] [10]：函数 g 及其导数满足下列性质：

1) 函数 g 唯一确定的，且是 C^2 和可逆的；
2) 对所有 $s\in\mathbb{R}$，$|g'(s)|\le1$；
3) 对所有 $s\in\mathbb{R}$，$|g(s)|\le|s|$；
4) 当 $s\to0$，$g(s)/s\to1$；
5) 对所有 $s\in\mathbb{R}$，$|g(s)|\le2^{\frac{1}{2p}}|s|^{\frac{1}{2}}$；
6) 对所有 $s\ge0$，$g(s)/2\le sg'(s)\le g(s)$；
7) 当 $s\to+\infty$，$g(s)/\sqrt{s}\to a>0$；

8) 存在一个正常数 C，使得

$$\left|g(s)\right| \ge \begin{cases} C|s|, & |s|\le 1, \\ C|s|^{\frac{1}{2}}, & |s|\ge 1; \end{cases}$$

9) 对所有 $s\ge 1$ 且 $t\ge 0$， $g^2(st)\ge sg^2(t)$；

10) 对所有 $s\in\mathbb{R}$， $\left|g(s)g'(s)\right|\le 2^{\frac{1-p}{p}}$ 。

引理 2.3： 函数 $s\to\left(g(s)\right)^{-\gamma}g'(s), s>0$ 满足下列性质：

1) $\left(g(s)\right)^{-\gamma}g'(s)$ 在 $(0,\infty)$ 递减；

2) $\lim\limits_{s\to 0^+}\left(g(s)\right)^{-\gamma}g'(s)=+\infty$；

3) 存在常数 $C_1>0$ 使得对所有 $s\ge 1$，成立 $0<\left(g(s)\right)^{-\gamma}g'(s)\le C_1$。

证明： 根据 g 的定义及(1.3)式可知，$g(s)$ 在 $(0,\infty)$ 递增，$g'(s)$ 在 $(0,\infty)$ 递减。当 $s>0$ 时，$g(s)>0$ 且 $g'(s)>0$，则(1)得证。又因 $\gamma>0$ 且 $s\to 0^+$ 时， $g(s)\to 0^+$， $g'(s)\to 1$，则可得(2)成立。结合(1)的结论以及当 $s>0$ 时， $g(s)>0$ 且 $g'(s)>0$，则可立即证得(3)成立。证毕。

3. 定理 1.1 的证明

我们称 $\underline{v},\overline{v}$ 分别为方程(1.5)上解和下解，当且仅当 $\underline{v},\overline{v}\in W_0^{1,p}(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$ 时，下列条件成立：

1) 对几乎处处 $x\in\Omega$， 有 $0<\underline{v}(x)\le\overline{v}(x)$；

2) 对任意 $\varphi\in W_0^{1,p}(\Omega)$， $\varphi\ge 0$， 有

$$\int_\Omega\left|\nabla\underline{v}\right|^{p-2}\nabla\underline{v}\nabla\varphi\le\int_\Omega b(x)\left(g(\underline{v})\right)^{-\gamma}g'(\underline{v})\varphi+\int_\Omega f\left(x,g(\underline{v})\right)g'(\underline{v})\varphi,$$

$$\int_\Omega\left|\nabla\overline{v}\right|^{p-2}\nabla\overline{v}\nabla\varphi\ge\int_\Omega b(x)\left(g(\overline{v})\right)^{-\gamma}g'(\overline{v})\varphi+\int_\Omega f\left(x,g(\overline{v})\right)g'(\overline{v})\varphi.$$

本节我们将证明方程(1.5)有一个弱解 $v\in W_0^{1,p}(\Omega)$ 满足对几乎处处 $x\in\Omega$， 有

$$0<\underline{v}(x)\le v(x)\le\overline{v}(x).$$

首先，我们考虑下列边值问题：

$$\begin{cases} -\Delta_p u=\psi(x) & x\in\Omega, \\ u=0 & x\in\partial\Omega. \end{cases} \tag{3.1}$$

命题 3.1 [11]： 假设 $\psi\in L^q(\Omega), q>N$， 则方程(3.1)有唯一弱解 $u\in C_0^1(\overline{\Omega})$。进一步，若 $\psi\ge 0$ 是非平凡的，则

$$u>0,\quad x\in\Omega;\quad \frac{\partial u}{\partial\nu}>0,\quad x\in\partial\Omega,$$

其中 ν 为 $\partial\Omega$ 上的单位内法向量。

引理 3.2： 假设条件(b_1)、(f_1)和(f_2)成立，则存在 $\alpha_0>0$ 使得当 $\|a_1\|_\infty\le\alpha_0$ 成立时，存在 $\underline{v},\overline{v}\in L^\infty(\Omega)$ 满足：

1) $b(x)\left(g(\underline{v})\right)^{-\gamma}g'(\underline{v})\in L^q(\Omega)$ 且 $\|\underline{v}\|_\infty\le\delta/2$， 其中 $\delta>0$ 且由(f_1)给定；

2) 对几乎处处 $x\in\Omega$， 有 $0<\underline{v}(x)\le\overline{v}(x)$；

3) $\underline{v},\overline{v}$ 分别为方程(1.5)上解和下解。

证明： 由(b_1)可知， $b\in L^q(\Omega)$。进一步，又因 $b(x)>0$， $q>N$， 根据命题 3.1 可得下列问题

$$\begin{cases}-\Delta_p \omega = b(x), & x \in \Omega, \\ \omega = 0, & x \in \partial\Omega,\end{cases} \tag{3.2}$$

有一个唯一解 $\omega \in C_0^1(\bar{\Omega})$ 且 $\omega > 0, x \in \Omega$，$\dfrac{\partial \omega}{\partial \nu} > 0, x \in \partial\Omega$。根据($b_1$)中所给 e_0 定义，可得 $\inf\limits_{\Omega}\left(\dfrac{\omega}{e_0}\right) > 0$ 且 $b\omega^{-\gamma} \in L^q(\Omega)$。现在，我们设 $0 < \varepsilon < 1$ 充分小，使得 $0 < \underline{v}(x) \le \min\{\delta/2, \delta_0, 1\}$ 成立，其中 $\underline{v} := \varepsilon\omega$，$\delta > 0$ 由(f_1)给定且 $\delta_0 > 0$。进一步，由引理 2.3-(2)可得，对任意 $s \in (0, \delta_0)$，有

$$(g(s))^{-\gamma} g'(s) \ge k + 1, \tag{3.3}$$

其中 k 为(f_1)给定常数。由引理 2.2-(2)和(8)，我们推得

$$b(x)(g(\underline{v}))^{-\gamma} g'(\underline{v}) \in L^q(\Omega) \text{ 且 } \|\underline{v}\|_\infty \le \delta/2. \tag{3.4}$$

结论(1)证毕。

类似地，为了证明结论(2)，我们考虑 $z \in C_0^1(\bar{\Omega})$ 为下列方程唯一解：

$$\begin{cases}-\Delta_p z = b(x)(g(\underline{v}))^{-\gamma} g'(\underline{v}) + 2F_0 & x \in \Omega, \\ z = 0 & x \in \partial\Omega,\end{cases} \tag{3.5}$$

其中 F_0 由(f_2)给定。由(3.3)式和(3.4)式可得，对几乎处处 $x \in \Omega$ 有

$$(g(\underline{v}(x)))^{-\gamma} g'(\underline{v}(x)) \ge k + 1. \tag{3.6}$$

设 $\bar{v} = z$，对所有 $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$，$\varphi \ge 0$，可知

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla \bar{v}|^{p-2} \nabla \bar{v} \nabla \varphi &\ge \int_\Omega b(x)(g(\underline{v}))^{-\gamma} g'(\underline{v})\varphi \ge \int_\Omega b(x)\varphi \\ &\ge \varepsilon^{p-1}\int_\Omega b(x)\varphi = \int_\Omega |\nabla \underline{v}|^{p-2} \nabla \underline{v} \nabla \varphi.\end{aligned} \tag{3.7}$$

因此，由弱比较原则可以得到，对几乎处处 $x \in \Omega$，$\underline{v} \le \bar{v}$ 成立。

最后，根据 $\underline{v}, \bar{v} \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ 和引理 2.2-(3)可知，$g(\underline{v}) \in [0, \delta]$。再由(3.6)式，($f_1$)和引理 2.2-(2)，对任意 $\varphi \ge 0$，我们有

$$\begin{aligned}&\int_\Omega |\nabla \underline{v}|^{p-2} \nabla \underline{v} \nabla \varphi - \int_\Omega b(x)(g(\underline{v}))^{-\gamma} g'(\underline{v})\varphi - \int_\Omega f(x, g(\underline{v}))g'(\underline{v})\varphi \\ &\le \int_\Omega b(x)\left(\varepsilon^{p-1} + k - (g(\underline{v}))^{-\gamma} g'(\underline{v})\right)\varphi \le 0,\end{aligned}$$

即证得 $\underline{v}$ 为方程(1.5)的下解。

进一步，利用 $\underline{v}$ 的定义以及 $b(x)(g(\underline{v}))^{-\gamma} g'(\underline{v}) \in L^q(\Omega), q > N$，由命题 3.1 和(3.5)式得到 $\bar{v} \in C_0^1(\bar{\Omega})$。因此，存在常数 $C_0 > 0$ (不依赖于 $\bar{v}$ 和 $a_1(x)$)使得

$$\|\bar{v}\|_\infty \le C_0. \tag{3.8}$$

因为 $0 < g'(\bar{v}) \le 1$ 且对几乎处处 $x \in \Omega$ 有 $\underline{v} \le \bar{v}$，利用引理 2.3-(1)，($f_2$)及(3.5)式，我们可知

$$\begin{aligned}&\int_\Omega |\nabla \bar{v}|^{p-2} \nabla \bar{v} \nabla \varphi - \int_\Omega b(x)(g(\bar{v}))^{-\gamma} g'(\bar{v})\varphi - \int_\Omega f(x, g(\bar{v}))g'(\bar{v})\varphi \\ &\ge \int_\Omega b(x)\left((g(\underline{v}))^{-\gamma} g'(\underline{v}) - (g(\bar{v}))^{-\gamma} g'(\bar{v})\right)\varphi + \int_\Omega \left(2F_0 - f(x, g(\bar{v}))\right)g'(\bar{v})\varphi \\ &\ge \int_\Omega \left(2F_0 - f(x, g(\bar{v}))\right)g'(\bar{v})\varphi \\ &\ge F_0\int_\Omega \left(1 - a_1(x)(g(\bar{v}))^{r-1}\right)g'(\bar{v})\varphi.\end{aligned} \tag{3.9}$$

设$\alpha_0 = C_0^{1-r} > 0$（C_0为(3.8)式中的常数），若$\|a_1\|_\infty \le \alpha_0$，可知对几乎处处$x \in \Omega$，有

$$a_1(x) \le \frac{1}{C_0^{r-1}} \le \frac{1}{\|\overline{v}\|_\infty^{r-1}} \le \frac{1}{\left(g\left(\|\overline{v}\|_\infty\right)\right)^{r-1}} \le \frac{1}{\left(g\left(\overline{v}(x)\right)\right)^{r-1}},$$

即在Ω上$1 - a_1(x)\left(g(\overline{v})\right)^{r-1} \ge 0$。因此，根据(3.9)式可得$\overline{v}$为方程(1.5)的上解。证毕。

定理 1.1 的证明考虑截断函数$\tilde{h}: \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，

$$\tilde{h}(x,s) = \begin{cases} b(x)\left(g\left(\underline{v}(x)\right)\right)^{-\gamma} g'\left(\underline{v}(x)\right) + f\left(x, g\left(\underline{v}(x)\right)\right) g'\left(\underline{v}(x)\right), & s < \underline{v}(x), \\ b(x)\left(g(s)\right)^{-\gamma} g'(s) + f\left(x, g(s)\right) g'(s), & \underline{v}(x) \le s \le \overline{v}(x), \\ b(x)\left(g\left(\overline{v}(x)\right)\right)^{-\gamma} g'\left(\overline{v}(x)\right) + f\left(x, g\left(\overline{v}(x)\right)\right) g'\left(\overline{v}(x)\right), & s > \overline{v}(x), \end{cases} \tag{3.10}$$

同时考虑下列辅助问题

$$\begin{cases} -\Delta_p v = \tilde{h}(x,v) & x \in \Omega, \\ v = 0 & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.11}$$

且(3.11)式对应能量泛函$\tilde{\Phi}: W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$由下式给定

$$\tilde{\Phi}(v) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla v|^p - \int_\Omega \tilde{H}(x,v), \tag{3.12}$$

其中$\tilde{H}(x,s) = \int_0^s \tilde{h}(x,t)\,\mathrm{d}t$。

根据(3.10)式，引理 2.3-(1)及$0 < g'(s) \le 1$，对几乎处处$x \in \Omega$及所有$s \in \mathbb{R}$，我们可得

$$\left|\tilde{h}(x,s)\right| \le b(x)\left(g(\underline{v})\right)^{-\gamma} g'(\underline{v}) + M_1, \tag{3.13}$$

其中$M_1 = \operatorname*{esssup}_{(x,s) \in \Omega \times \left(0, \|\overline{v}\|_\infty\right)} \left|f\left(x, g(s)\right)\right|$。

结合(3.12)式，(3.13)式和$b(x)\left(g(\underline{v})\right)^{-\gamma} g'(\underline{v}) \in L^q(\Omega)$，运用 Hölder 不等式和 Sobolev 嵌入不等式，对所有$v \in W_0^{1,p}(\Omega)$我们有

$$\tilde{\Phi}(v) \ge \frac{1}{p}\|v\|^p - C_1\|v\|_{\frac{q}{q-1}} - C_2\|v\|_1 \ge \frac{1}{p}\|v\|^p - C_3\|v\|.$$

因此，$\tilde{\Phi}$是强制的。

其次，定义集合$\Gamma := \left\{v \in W_0^{1,p}(\Omega) : \underline{v}(x) \le v(x) \le \overline{v}(x) \ a.e.\ x \in \Omega\right\}$和$\kappa = \inf_\Gamma \tilde{\Phi}(v)$，不难发现集合$\Gamma$在$W_0^{1,p}(\Omega)$上既为闭集也为凸集，因此其为弱闭集。

进一步，由于$\tilde{\Phi}(v)$是强制的，则对于集合Γ内的极小化序列$\{v_n\}$是有界的且存在弱收敛子列，我们仍然记为$\{v_n\}$，可得

$$\begin{cases} v_n \xrightarrow{w} v & \left(\text{在} W_0^{1,p}(\Omega) \text{中}\right), \\ v_n \longrightarrow v & \left(\text{在} L^\sigma(\Omega) \text{中}, 1 \le \sigma < p^*\right), \\ v_n \longrightarrow v & a.e.\ x \in \Omega. \end{cases} \tag{3.14}$$

由(3.13)式、(3.14)式，Sobolev 嵌入不等式和 Lebesgue 控制收敛定理可得

$$\int_\Omega \tilde{H}(x, v_n) \to \int_\Omega \tilde{H}(x,v).$$

因此，$\tilde{\Phi}$ 在集合 Γ 上为弱下半连续的。

由文献[12]中的定理 1.2 可知，$\tilde{\Phi}\big|_{\Gamma}$ 在点 $\tilde{v}\in\Gamma$ 达到极小值，同时，参考文献[12]中的定理 2.4 的证明方法，我们可知 $\tilde{\Phi}'(\tilde{v})=0$。因此，$\tilde{v}$ 是方程(3.11)的一个弱解。

最后，根据(3.10)式中 $\tilde{h}(x,s)$ 的定义，当 $s\in\left[\underline{v}(x),\overline{v}(x)\right]$ 时，$\tilde{v}$ 为方程(1.5)的一个弱解，即 $u=g(\tilde{v})$ 为方程(1.1)的一个正弱解。

4. 定理 1.2 的证明

我们定义 $A:W_0^{1,p}(\Omega)\to W^{-1,P'}(\Omega):=\left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)^*$，且对所有的 $u,\eta\in W_0^{1,P}(\Omega)$，非线性映射定义为

$$\left\langle A(u),\eta\right\rangle=\int_\Omega|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla\eta,$$

且该映射满足如下性质(参考文献[13])：

命题 4.1：映射 $A:W_0^{1,p}(\Omega)\to W^{-1,P'}(\Omega)$ 是有界的、连续的和严格单调的，并且为 $(S)_+$ 型，即若 $u_n\xrightarrow{w}u$ 在 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 上成立和 $\limsup\limits_{n\to\infty}\left\langle A(u_n),u_n-u\right\rangle\le 0$ 成立，则在 $W_0^{1,P}(\Omega)$ 上有 $u_n\to u$。

现在，结合引理 3.2 中 $\underline{v}\in C_0^1\left(\overline{\Omega}\right)$，我们可定义 Carathéodory 函数 $\hat{h}:\Omega\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为：

$$\hat{h}(x,s)=\begin{cases}b(x)\left(g\left(\underline{v}(x)\right)\right)^{-\gamma}g'\left(\underline{v}(x)\right)+f\left(x,g\left(\underline{v}(x)\right)\right)g'\left(\underline{v}(x)\right), & s<\underline{v}(x),\\ b(x)\left(g(s)\right)^{-\gamma}g'(s)+f\left(x,g(s)\right)g'(s), & s\ge\underline{v}(x),\end{cases}\tag{4.1}$$

同时考虑如下辅助问题

$$\begin{cases}-\Delta_p v=\hat{h}(x,v) & x\in\Omega,\\ v=0 & x\in\partial\Omega,\end{cases}\tag{4.2}$$

且(4.2)式对应能量泛函 $\hat{\Phi}:W_0^{1,p}(\Omega)\to\mathbb{R}$ 由下式给定

$$\hat{\Phi}(v)=\frac{1}{p}\int_\Omega|\nabla v|^p-\int_\Omega\hat{H}(x,v),\tag{4.3}$$

其中 $\hat{H}(x,s)=\int_0^s\hat{h}(x,t)\mathrm{d}t$。根据 $\hat{h}(x,s)$ 定义，当 $s<\underline{v}(x)$ 时，我们有

$$\left|\hat{h}(x,s)\right|\le b(x)\left(g(\underline{v})\right)^{-\gamma}g'(\underline{v})+M_1.$$

运用引理 2.2-(5)和(10)、引理 2.3-(1)和(f_2)，当 $s\ge\underline{v}(x)$ 时，有

$$\left|\hat{h}(x,s)\right|\le b(x)\left(g(\underline{v})\right)^{-\gamma}g'(\underline{v})+C^*\left(1+a_1(x)|s|^{\frac{r-2}{2}}\right).$$

因此，对几乎处处 $x\in\Omega$ 和任意 $s\in\mathbb{R}$，可得

$$\left|\hat{h}(x,s)\right|\le b(x)\left(g(\underline{v})\right)^{-\gamma}g'(\underline{v})+C^{**}\left(1+a_1(x)|s|^{\frac{r-2}{2}}\right),$$

$$\left|\hat{H}(x,s)\right|\le l_1(x)s+C^{**}a_1(x)|s|^{\frac{r}{2}},\tag{4.4}$$

其中 $l_1(x)=b(x)\left(g(\underline{v})\right)^{-\gamma}g'(\underline{v})+C^{**}$ 且 $l_1(x)\in L^q(\Omega)$。基于前面所做的工作，我们可立即得出 $\hat{\Phi}\in C^1\left(W_0^{1,p}(\Omega),\mathbb{R}\right)$，且 $\hat{\Phi}$ 的任意一个临界点都对应方程(4.2)的一个弱解。

引理 4.2：假设条件(b_1)和(f_1)~(f_3)成立，则泛函 $\hat{\Phi}$ 在任意 $c\in\mathbb{R}$ 水平满足 Palais-Smale 条件。

证明：设序列 $\{v_n\}\subset W_0^{1,p}(\Omega)$，且同时满足 $\hat{\Phi}(v_n)\to c$，$\hat{\Phi}'(v_n)\to 0$。由 $\hat{h}(x,s)$ 定义，经过一些简

单的计算，当 $s<\underline{v}(x)$ 时，我们可得

$$\hat{h}(x,s)s-\theta\hat{H}(x,s)\geq(1-\theta)s\left(b(x)\left(g(\underline{v})\right)^{-\gamma}g'(\underline{v})+M_1\right). \tag{4.5}$$

接下来，针对 $s\geq\underline{v}(x)$ 的情况，我们将从以下三种情形考虑：$0<\gamma<1,\ \gamma=1$ 和 $\gamma>1$。

情形 1： $0<\gamma<1$。

令 $m_0=\underset{(x,s)\in\Omega\times(0,s_0)}{\operatorname{esssup}}\left|f(x,s)\right|$ 和 $M_0=\underset{(x,s)\in\Omega\times(0,s_0)}{\operatorname{esssup}}\left|F(x,s)\right|$。不失一般性，根据条件($f_3$)我们假设 $s_0>g\left(\|\underline{v}\|_\infty\right)$，则当 $\underline{v}(x)\leq s<g^{-1}(s_0)$ 时，由引理 2.2-(6)和引理 2.3-(1)，可以推出

$$\hat{h}(x,s)s-\theta\hat{H}(x,s)\geq-m_0s_0-\theta m_0s-\frac{3-\gamma}{1-\gamma}\theta b(x)\left(g(\underline{v})\right)^{-\gamma}g'(\underline{v})s-2\theta M_0. \tag{4.6}$$

当 $s\geq g^{-1}(s_0)$ 时，根据条件(f_3)，进一步得到

$$\hat{h}(x,s)s-\theta\hat{H}(x,s)\geq-\theta m_0s-\frac{3-\gamma}{1-\gamma}\theta b(x)\left(g(\underline{v})\right)^{-\gamma}g'(\underline{v})s-\theta M_0. \tag{4.7}$$

结合(4.5)~(4.7)式和 $b(x)\left(g(\underline{v})\right)^{-\gamma}g'(\underline{v})\in L^q(\Omega)$，可知对几乎处处 $x\in\Omega$ 和所有 $s\in\mathbb{R}$，有

$$\hat{h}(x,s)s-\theta\hat{H}(x,s)\geq-C_1-C_2\omega_1(x)s,$$

其中 $\omega_1(x)\in L^q(\Omega)$。因此可得

$$C+o_n(1)\|v_n\|\geq\theta\hat{\Phi}(v_n)-\left\langle\hat{\Phi}'(v_n),v_n\right\rangle=\left(\frac{\theta}{p}-1\right)\|v_n\|^p+\int_\Omega\left(\hat{h}(x,v_n)v_n-\theta\hat{H}(x,v_n)\right),$$

最终得到

$$C+C_1|\Omega|+C_2\|\omega_1\|_q\|v_n\|+o_n(1)\|v_n\|\geq\left(\frac{\theta}{p}-1\right)\|v_n\|^p.$$

情形 2： $\gamma>1$。

此与**情形 1** 方法类似，在此省略详细论述。

情形 3： $\gamma=1$。

利用引理 2.3-(1)和引理 2.2-(2)，当 $\underline{v}(x)\leq s<g^{-1}(s_0)$ 时，推出

$$\hat{h}(x,s)s-\theta\hat{H}(x,s)\geq-2\theta b(x)\left(g(\underline{v})\right)^{-1}g'(\underline{v})s-(1+\theta)m_0s-2\theta M_0. \tag{4.8}$$

若 $s\geq g^{-1}(s_0)$，利用(f_3)即得

$$\hat{h}(x,s)s-\theta\hat{H}(x,s)\geq-2\theta b(x)\left(g(\underline{v})\right)^{-1}g'(\underline{v})s-\theta m_0s-\theta M_0. \tag{4.9}$$

结合(4.5)、(4.8)和(4.9)式，运用与情形 1 相同方法可得出

$$C+C_1|\Omega|+C_2\|\omega_1\|_q\|v_n\|+o_n(1)\|v_n\|\geq\left(\frac{\theta}{p}-1\right)\|v_n\|^p.$$

综合**情形 1~情形 3** 来看，可推出对所有 $\gamma>0$，$\{v_n\}$ 在 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 上有界，因此

$$\begin{cases} v_n\xrightarrow{w}v & \left(\text{在}W_0^{1,p}(\Omega)\text{中}\right),\\ v_n\longrightarrow v & \left(\text{在}L^\sigma(\Omega)\text{中},\ 1\leq\sigma<p^*\right),\\ v_n\longrightarrow v & a.e.\ x\in\Omega. \end{cases} \tag{4.10}$$

进一步，对任意给定的$\eta \in W_0^{1,p}(\Omega)$，可知

$$o_n(1)=\left\langle \hat{\Phi}'(v_n),\eta \right\rangle = \int_\Omega |\nabla v_n|^{p-2}\nabla v_n \nabla \eta - \int_\Omega \hat{h}(x,v_n)\eta.$$

选定$\eta = v_n - v \in W_0^{1,p}(\Omega)$，得到

$$o_n(1)=\left\langle \hat{\Phi}'(v_n),v_n - v \right\rangle = \int_\Omega |\nabla v_n|^{p-2}\nabla v_n \nabla (v_n - v) - \int_\Omega \hat{h}(x,v_n)(v_n - v). \tag{4.11}$$

另一方面，我们有

$$\left|\int_\Omega \hat{h}(x,v_n)(v_n-v)\right| \le \int_\Omega \left| b(x)(g(\underline{v}))^{-\gamma} g'(\underline{v}) + C_1(1+a_1(x))|v_n|^{\frac{r-2}{2}} \right| |v_n - v|$$

$$\le \left\| b(x)(g(\underline{v}))^{-\gamma} g'(\underline{v}) \right\|_q \|v_n - v\|_{\frac{q}{q-1}} + C\|v_n\|_{r-1}^{\frac{r-1}{2}} \|v_n - v\|_{\frac{2(r-1)}{r}} + C\|v_n - v\|_1 .$$

因为$2p<r<2p^*, 1<p<N<q$，容易看出$r-1\le p^*, \dfrac{2(r-1)}{r}<p^*$且$\dfrac{q}{q-1}<p^*$。由(4.10)式可得

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \hat{h}(x,v_n)(v_n - v)=0. \tag{4.12}$$

因此，由(4.11)和(4.12)式推出

$$\lim_{n\to\infty}\left\langle A(v_n),v_n - v\right\rangle = 0.$$

运用命题 4.1 进一步得到在$W_0^{1,P}(\Omega)$上，$v_n \to v$成立。证毕。

引理 4.3： 假设条件(b_1)和(f_1)~(f_3)成立，则存在$\alpha_1>0$使得$\|a_1\|_\infty \le \alpha_1$时，下列事实成立：

1) 存在$R_1>0, \rho>0$使得$\inf\limits_{v\in\partial B_{R_1}(0)} \hat{\Phi}(v)\ge\rho$；

2) 存在$e\in W_0^{1,p}(\Omega)\setminus B_{R_1}(0)$使得$\hat{\Phi}(e)<0$。

证明： 根据(4.4)式，若$v\in W_0^{1,p}(\Omega)$，则有

$$\int_\Omega \hat{H}(x,v) \le \|l_1\|_q \|v\|_{\frac{q}{q-1}} + C\|a_1\|_\infty \|v\|_{\frac{r}{2}}^{\frac{r}{2}} .$$

因此，根据 Sobolev 嵌入不等式可得

$$\hat{\Phi}(v)\ge \frac{1}{p}\|v\|^p - C_1\|l_1\|_q \|v\| + C_2\|a_1\|_\infty \|v\|^{\frac{r}{2}} .$$

选定$R_1>0$使得$\dfrac{R_1^p}{p} - C_1\|l_1\|_q R_1 \ge 2$。再令$\alpha_1 = \dfrac{1}{4C_2}R_1^{-\frac{r}{2}}$，对所有$v\in\partial B_{R_1}(0)$，当$\|a_1\|_\infty \le \alpha_1$时，有$\hat{\Phi}(v)\ge 1$。

针对结论(2)，由(f_2)和(f_3)不难发现，存在$Q\in L^\infty(\Omega)$，使得对几乎处处$x\in\Omega$和任意$s\ge0$，有

$$F(x,s)\ge \frac{F(x,s_0)}{s_0^{2\theta}} s^{2\theta} - Q(x). \tag{4.13}$$

进一步，当$s\ge1$时，对几乎处处$x\in\Omega$可推出

$$\hat{H}(x,s\underline{v}) \ge \hat{H}(x,\underline{v}) + F(x,g(s\underline{v})) - F(x,g(v)).$$

因此，由引理 2.2-(9)可知，当$s\ge1$时，有

$$\hat{\Phi}(s\underline{v}) \le \frac{s^p}{p}\|\underline{v}\|^p - \frac{s^\theta}{s_0^{2\theta}}\int_\Omega F(x,s_0)(g(\underline{v}))^{2\theta} - C^* . \tag{4.14}$$

因为$\theta > p$，由(4.14)式可知，当$s \to \infty$时，$\hat{\Phi}(s\underline{v}) \to -\infty$。因此，选定$e := s^*\underline{v}$，当$s^* > 0$充分大时可得$\hat{\Phi}(s^*\underline{v}) < 0$。证毕。

定理1.2的证明根据引理4.2、引理4.3和山路引理[14]可知，泛函$\hat{\Phi}$有一个临界点$\hat{v} \in W_0^{1,p}(\Omega)$，且同时满足$\hat{\Phi}(\hat{v}) \ge 1$和$\hat{v}$为方程(4.2)的一个弱解。

接下来，我们进一步证明对几乎处处$x \in \Omega$，均有$\underline{v} \le \hat{v}$。

事实上，取$\varphi = (\underline{v} - \hat{v})^+$作为方程(4.2)的弱解定义式中的测试函数，得到

$$\int_\Omega |\nabla \hat{v}|^{p-2} \nabla \hat{v} \nabla (\underline{v} - \hat{v})^+ = \int_{\{\hat{v} \le \underline{v}\}} \hat{h}(x, \hat{v})(\underline{v} - \hat{v})^+ \ge \int_\Omega |\nabla \underline{v}|^{p-2} \nabla \underline{v} \nabla (\underline{v} - \hat{v})^+.$$

由算子的单调性可知，对几乎处处$x \in \Omega$，均有$(\underline{v} - \hat{v})^+ = 0$，即对几乎处处$x \in \Omega$，$\underline{v} \le \hat{v}$成立。

进一步，根据$\hat{H}(x,s)$定义和$\tilde{\Phi}(\tilde{v}) = \inf_{\Gamma} \tilde{\Phi}(v)$，我们可得

$$\hat{\Phi}(\tilde{v}) = \tilde{\Phi}(\tilde{v}) \le \tilde{\Phi}(\underline{v}) = \hat{\Phi}(\underline{v}), \tag{4.15}$$

且

$$\hat{\Phi}(\underline{v}) = \frac{1}{p}\|\underline{v}\|^p - \int_\Omega b(x)(g(\underline{v}))^{-\gamma} g'(\underline{v})\underline{v} + f(x, g(\underline{v}))g'(\underline{v})\underline{v} \le \left(\frac{1}{p} - 1\right)\|\underline{v}\|^p < 0. \tag{4.16}$$

结合(4.15)、(4.16)式和$\hat{\Phi}(\hat{v}) \ge 1$，可知$\hat{\Phi}(\tilde{v}) < 0 < \hat{\Phi}(\hat{v})$。

最后，由(4.1)式中$\hat{h}(x,s)$定义，当$s \ge \underline{v}(x)$时，可以推出$\hat{v}$为方程(1.5)的一个正弱解，从而$u = g(\hat{v})$为原方程(1.1)的一个正弱解。

取$\tilde{v}$替换(4.1)式中的$\underline{v}$，运用与上述证明相同的方法，我们可进一步推出，对几乎处处$x \in \Omega$，均成立$\tilde{v} \le \hat{v}$。

参考文献

[1] Hu, S. and Papageorgiou, N.S. (2010) Multiplicity of Solutions for Parametric p-Laplacian Equations with Nonlinearity Concave near the Origin. *Tohoku Mathematical Journal*, **62**, 179-202. https://doi.org/10.2748/tmj/1270041030

[2] Kyritsi, S. and Papageorgiou, N.S. (2010) Pairs of Positive Solutions for Singular p-Laplacian Equations with a p-Superlinear Potential. *Nonlinear Analysis*: *Theory*, *Methods & Applications*, **73**, 1136-1142. https://doi.org/10.1016/j.na.2010.04.019

[3] Perera, K. and Silva, E.A.B. (2006) Existence and Multiplicity of Positive Solutions for Singular Quasilinear Problems. *Journal of Mathematical Analysis & Applications*, **323**, 1238-1252. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2005.11.014

[4] Callegari, A. and Nachman, A. (1978) Some Singular Nonlinear Differential Equations Arising in Boundary Layer Theory. *Journal of Mathematical Analysis & Applications*, **64**, 96-105. https://doi.org/10.1016/0022-247X(78)90022-7

[5] Fulks, W. and Maybee, J.S. (1960) A Singular Non-Linear Equation. *Osaka Mathematical Journal*, **12**, 1-19. https://doi.org/10.2969/jmsj/01240401

[6] Papageorgiou, N.S. and Smyrlis, G. (2015) A Bifurcation-Type Theorem for Singular Nonlinear Elliptic Equations. *Methods & Applications of Analysis*, **22**, 147-170. https://doi.org/10.4310/MAA.2015.v22.n2.a2

[7] Moameni, A. and João Marcos do, Ó. (2010) Solutions for Singular Quasilinear Schrödinger Equations with One Parameter. *Communications on Pure & Applied Analysis*, **9**, 1011-1023. https://doi.org/10.3934/cpaa.2010.9.1011

[8] Abbas, M. and Offin, D.C. (2010) Positive Solutions for Singular Quasilinear Schrödinger Equations with One Parameter. II. *Journal of Partial Differential Equations*, **23**, 223-234. https://doi.org/10.4208/jpde.v23.n3.2

[9] Santos, G.D., Figueiredo, G.M. and Severo, U.B. (2019) Multiple Solutions for a Class of Singular Quasilinear Problems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **480**, 123405. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2019.123405

[10] Teng, K.M. and Yang, X.F. (2019) Existence and Concentration Behavior of Solutions for a Class of Quasilinear Elliptic Equations with Critical Growth. *Advances in Nonlinear Analysis*, **8**, 339-371. https://doi.org/10.1515/anona-2016-0218

[11] Perera, K. and Zhang, Z. (2005) Multiple Positive Solutions of Singular p-Laplacian Problems by Variational Methods. *Boundary Value Problems*, **3**, 531951. https://doi.org/10.1155/BVP.2005.377

[12] Struwe, M. (1996) Variational Methods. Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian Systems. Springer-Verlag, Berlin.

[13] Motreanu, D., Motreanu, V. and Papageorgiou, N.S, (2014) Topological and Variational Methods with Applications to Nonlinear Boundary Value Problems. Springer, New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-9323-5

[14] Rabinowitz, P.H. (1986) Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations. *Conference Board of the Mathematical Sciences*, **65**, 9-36. https://doi.org/10.1090/cbms/065