Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2021, 10(4), 865-870
Published Online April 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2021.104094

Hans汉斯

耗散型随机非线性薛定谔方程的共形动量

陈红宇

辽宁师范大学数学学院，辽宁 大连
Email: 2195116553@qq.com

收稿日期：2021年3月12日；录用日期：2021年4月1日；发布日期：2021年4月15日

摘 要

在本文中，介绍了耗散型随机非线性薛定谔方程，它是通过对经典薛定谔方程进行修正得到的，证明了它具有随机共形动量演化规律，并研究了耗散型随机非线性薛定谔方程的一种新的离散数值格式，离散梯度格式，众所周知，构造出可以保持原始系统物理性质的数值格式具有重要意义，因此接下来我们研究了随机共形动量演化规律在离散梯度格式下是否成立，通过证明它是成立的。

关键词

耗散型随机非线性薛定谔方程，随机共形动量演化规律，数值格式

Conformal Momentum of Damped Stochastic Nonlinear Schrödinger Equation

Hongyu Chen

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning
Email: 2195116553@qq.com

Received: Mar. 12th, 2021; accepted: Apr. 1st, 2021; published: Apr. 15th, 2021

Abstract

In this paper, the damped stochastic nonlinear Schrödinger equation is introduced; it is obtained by modifying the classical Schrödinger equation. It is proved that it has a stochastic conformal momentum evolution law, and a new discrete numerical scheme, discrete gradient scheme, is studied. As we all know, it is of great significance to construct a numerical scheme which can maintain the physical properties of the original system. Therefore, we then study whether the random conformal momentum evolution law is valid in the discrete gradient scheme, and prove that it is valid.

文章引用: 陈红宇. 耗散型随机非线性薛定谔方程的共形动量[J]. 应用数学进展, 2021, 10(4): 865-870.
DOI: 10.12677/aam.2021.104094

Keywords

Damped Stochastic Nonlinear Schrödinger Equation, Stochastic Conformal Momentum Evolution Law, Numerical Scheme

1. 引言

随着科学技术的发展，随机问题在金融、工程、物理、化学等学科之间不断出现，随机偏微分方程逐渐成为定性和定量研究随机问题的重要数学工具，并受到了广泛的关注。薛定谔方程的物理意义是将物质波的概念和波动方程相结合，可描述微观粒子的运动，每个微观系统都有一个相应的薛定谔方程式，通过解方程可得到波函数的具体形式以及对应的能量，从而了解微观系统的性质，因此对耗散型随机非线性薛定谔方程物理性质的研究就显得十分有意义。目前国内外对随机非线性薛定谔方程的研究还存在着许多未解之谜，郭柏灵院士在 2011 年的讲座上也介绍了非线性薛定谔方程研究的重要性。本篇论文主要研究耗散型随机非线性薛定谔方程的随机共形动量问题，我们通过证明可以看出耗散型随机非线性薛定谔方程具有随机共形动量演化规律。构造数值格式是我们在研究随机问题时常用的方法，而构造出可以保持原始系统物理性质的数值格式更是具有重要意义，在本篇论文中我们应用随机共形离散梯度格式对耗散型随机非线性薛定谔方程在时间方向和空间方向上全离散，并验证随机共形动量演化规律在随机共形离散梯度格式下是否成立，通过证明可得其也是成立的，从而得出了结论。

2. 耗散型随机非线性薛定谔方程

考虑以下具有加性噪声的一维耗散型随机非线性薛定谔方程(参见[1] [2])

$$\begin{cases} \mathrm{d}u - i\left(\Delta u + iau + \lambda |u|^2 u\right)\mathrm{d}t = \varepsilon \mathrm{d}W, & \\ u(t,0) = u(t,1) = 0, & t \ge 0, x \in [0,1] \subset R \\ u(0,x) = u_0(x) & \end{cases} \tag{1}$$

这里，$\lambda = \pm 1$，耗散系数 $a > 0$，ε 为噪声尺度，复值 Wiener 过程 $W = W_1 + iW_2$ 定义在滤子概率空间 $\left(\Omega, F, \{F_t\}_{t\ge 0}, P\right)$，并且 W 有如下 Karhunen-Loève 展开

$$W(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} Qe_k(x)\beta_k(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{\eta_k} e_k(x)\beta_k(t), t \ge 0,\ x \in [0,1],$$

其中 Q 为 $L^2 = L^2(0,1)$ 上的线性正定算子，且与 Δ 算子可交换，满足 $Qe_k = \sqrt{\eta_k} e_k$，$\{e_k\}_{k\ge 1}$ 是齐次 Δ 算子的特征向量，$\beta_k = \beta_k^1 + i\beta_k^2$，且 $\left\{\beta_k^i\right\}_{k\ge 1, i=1,2}$ 为一族独立同分布的实值标准布朗运动。

我们对方程(1)进行如下变形，定义空时白噪声 $\dot{\chi} = \dfrac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}$，设 $u = p + iq$，$\dot{\chi} = \dot{\chi}_1 + i\dot{\chi}_2$，且 p, q, $\dot{\chi}_1 = \dfrac{\mathrm{d}W_1}{\mathrm{d}t}$ 和 $\dot{\chi}_2 = \dfrac{\mathrm{d}W_2}{\mathrm{d}t}$ 均为实值随机过程，则方程(1)可以改写为

$$\begin{cases} p_t + q_{xx} + ap + \lambda\left(p^2 + q^2\right)q = \varepsilon\dot{\chi}_1, \\ -q_t + p_{xx} - aq + \lambda\left(p^2 + q^2\right)p = -\varepsilon\dot{\chi}_2. \end{cases} \tag{2}$$

记 $v = p_x$， $w = q_x$， $z = (p,q,v,w)^{\mathrm{T}}$，上述方程可以转化为紧凑的形式

$$M\mathrm{d}_t z + K\partial_x z\mathrm{d}t = -aMz\mathrm{d}t + \nabla S_0(z)\mathrm{d}t + \nabla S_1(z)\circ \mathrm{d}W_1 + \nabla S_2(z)\circ \mathrm{d}W_2, \tag{3}$$

其中

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$S_0(z) = -\frac{\lambda}{4}\left(p^2+q^2\right)^2 - \frac{1}{2}\left(v^2+w^2\right),\ S_1(z) = \varepsilon q,\ S_2(z) = -\varepsilon p,$$

以及“∘”表示方程在 Stratonovich 型随机积分意义下成立。

以上是耗散型随机非线性薛定谔方程和性质的介绍，接下来我们将证明(3)具有随机共形动量守恒定律，其定义也在下面给出的定理中。

3. 随机共形动量演化规律

定理 1 方程(3)是耗散型随机非线性薛定谔方程，具有如下的随机共形动量演化规律[3]

$$\partial_t F + \partial_x G = -2aF - \left\langle z_x, \nabla S_1(z)\dot{\chi}_1 + \nabla S_2(z)\dot{\chi}_2 \right\rangle \tag{4}$$

其中 $F = \frac{1}{2}\langle z, Mz_x\rangle$ 和 $G = S_0(z) + \frac{1}{2}\langle z_t, Mz\rangle$。

证明： 将等式(3)与 z_x 做内积

$$\langle z_x, Mz_t\rangle + \langle z_x, Kz_x\rangle = \langle z_x, -aMz\rangle + \langle z_x, \nabla S_0(z)\rangle + \langle z_x, \nabla S_1(z)\dot{\chi}_1\rangle + \langle z_x, \nabla S_2(z)\dot{\chi}_2\rangle$$

其中

$$\begin{aligned} \langle z_x, Kz_x\rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} p_x \\ q_x \\ v_x \\ w_x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_x \\ q_x \\ v_x \\ w_x \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} p_x \\ q_x \\ v_x \\ w_x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_x \\ w_x \\ -p_x \\ -q_x \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \langle p_x, v_x\rangle + \langle q_x, w_x\rangle + \langle v_x, -p_x\rangle + \langle w_x, -q_x\rangle \\ &= \langle p_x, v_x\rangle + \langle q_x, w_x\rangle - \langle p_x, v_x\rangle - \langle q_x, w_x\rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle z_x, -aMz\rangle = -a\langle z_x, Mz\rangle &= -a\left\langle \begin{pmatrix} p_x \\ q_x \\ v_x \\ w_x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \\ v \\ w \end{pmatrix} \right\rangle = -a\left\langle \begin{pmatrix} p_x \\ q_x \\ v_x \\ w_x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -q \\ p \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= -a\left(\langle p_x, -q\rangle + \langle q_x, p\rangle\right) \\ &= a\left(\langle p_x, q\rangle + \langle -q_x, p\rangle\right) \\ &= a\langle z, Mz_x\rangle \end{aligned}$$

得到

$$\begin{aligned}\langle z_x,\nabla S_0(z)\rangle-\langle z_x,Mz_t\rangle&=-\langle z_x,-aMz\rangle-\langle z_x,\nabla S_1(z)\dot{\chi}_1\rangle-\langle z_x,\nabla S_2(z)\dot{\chi}_2\rangle\\&=-a\langle z,Mz_x\rangle-\langle z_x,\nabla S_1(z)\dot{\chi}_1\rangle-\langle z_x,\nabla S_2(z)\dot{\chi}_2\rangle\\&=-2aF-\langle z_x,\nabla S_1(z)\dot{\chi}_1+\nabla S_2(z)\dot{\chi}_2\rangle,\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}\partial_t F+\partial_x G&=\frac{1}{2}\partial_t\langle z,Mz_x\rangle+\partial_x\left[S_0(z)+\frac{1}{2}\langle z_t,Mz\rangle\right]\\&=\frac{1}{2}\langle z_t,Mz_x\rangle+\frac{1}{2}\langle z,Mz_{xt}\rangle+\partial_x S_0(z)+\frac{1}{2}\langle z_{xt},Mz\rangle+\frac{1}{2}\langle z_t,Mz_x\rangle\\&=\partial_x S_0(z)+\langle z_t,Mz_x\rangle+\frac{1}{2}\langle z,Mz_{xt}\rangle+\frac{1}{2}\langle z_{xt},Mz\rangle.\end{aligned}$$

由于 $\langle z_t,Mz_x\rangle=-\langle z_x,Mz_t\rangle$，$\langle z,Mz_{xt}\rangle=-\langle z_{xt},Mz\rangle$，故

$$\partial_t F+\partial_x G=\partial_x S_0(z)-\langle z_x,Mz_t\rangle,$$

我们只需证明 $\partial_x S_0(z)=\langle z_x,\nabla S_0(z)\rangle$，由于

$$\begin{aligned}\partial_x S_0(z)&=\partial_x\left[-\frac{\lambda}{4}\left(p^2+q^2\right)^2-\frac{1}{2}\left(v^2+w^2\right)\right]\\&=-\lambda\left(p^2+q^2\right)\left(pp_x+qq_x\right)-\left(vv_x+ww_x\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle z_x,\nabla S_0(z)\rangle&=\left\langle\begin{pmatrix}p_x\\q_x\\v_x\\w_x\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-\lambda p\left(p^2+q^2\right)\\-\lambda q\left(p^2+q^2\right)\\-v\\-w\end{pmatrix}\right\rangle\\&=-\lambda\left(p^2+q^2\right)pp_x-\lambda\left(p^2+q^2\right)qq_x-vv_x-ww_x\\&=-\lambda\left(p^2+q^2\right)\left(pp_x+qq_x\right)-\left(vv_x+ww_x\right),\end{aligned}$$

基于上式可知

$$\partial_t F+\partial_x G=-2aF-\langle z_x,\nabla S_1(z)\dot{\chi}_1+\nabla S_2(z)\dot{\chi}_2\rangle$$

证明完毕。

4. 离散梯度格式下的随机共形动量演化规律

众所周知，构造出可以保持原始系统物理性质的数值格式具有重要意义，因此，在本节中，提出了一种数值格式，可以保持随机共形动量演化规律，下面我们就先来介绍一下这种数值格式。

在本篇论文中，我们考虑一种均匀的网格 (x_j,t_n)，时间步长 $\Delta t=\frac{T}{NT}$，空间步长 $\Delta x=\frac{x_R-x_L}{NX}$，这里 NX 和 NT 分别为沿空间方向和时间方向的子区间数，$x_{j+1}=x_j+\Delta x$，$t_{n+1}=t_n+\Delta t$，$u_j^n=u(x_j,t_n)$，$\dot{\chi}_j^n$ 为 $\dot{\chi}$ 的离散形式

$$\dot{\chi}_j^n=\frac{W(x_j,t_{n+1})-W(x_j,t_n)}{\Delta t},$$

此外，我们需要引入微分算子

$$ {}^{r_1}D_t^{r_2} z^n = \frac{\mathrm{e}^{r_1\Delta t} z^{n+1} - \mathrm{e}^{-r_2\Delta t} z^n}{\Delta t}, \quad D_x z_j = \frac{z_{j+1} - z_j}{\Delta x}, $$

以及平均算子

$$ {}^{r_1}A_t^{r_2} z^n = \frac{\mathrm{e}^{r_1\Delta t} z^{n+1} + \mathrm{e}^{-r_2\Delta t} z^n}{2}, \quad A_x z_j = \frac{z_{j+1} + z_j}{2}, $$

移位算子

$$ T_t z = z_j^{n+1}, \quad T_x z = z_{j+1}^n, $$

和定义离散梯度 $\overline{\nabla} S(\hat{z}, z)$，作为连续函数满足下面的条件

$$ \lim_{\hat{z}\to z} \overline{\nabla} S(\hat{z}, z) = \overline{\nabla} S(z, z) = \nabla S(z), $$

为了方便，我们将在论文中使用一些缩写 $D_t^r = {}^0D_t^r$，${}^rD_t = {}^rD_t^0$，$D_t = {}^0D_t^0$，$A_t^r = {}^0A_t^r$，${}^rA_t = {}^rA_t^0$ 和 $A_t = {}^0A_t^0$。

引理 1 算子之间的互换，例如

$$ {}^{r_1}A_t^{r_2} A_x u = A_x\, {}^{r_1}A_t^{r_2} u, \quad {}^{r_1}D_t^{r_2} A_x u = A_x\, {}^{r_1}D_t^{r_2} u, \quad {}^{r_1}A_t^{r_2} D_x u = D_x\, {}^{r_1}A_t^{r_2} u. $$

引理 2 算子 ${}^{r_1}D_t^{r_2}$，D_x，${}^{r_1}A_t^{r_2}$ 和 A_x 满足离散乘法法则

$$ {}^{2r_1}D_t^{2r_2} \langle u, v\rangle = \left\langle {}^{r_1}D_t^{r_2} u, {}^{r_1}A_t^{r_2} v\right\rangle + \left\langle {}^{r_1}A_t^{r_2} u, {}^{r_1}D_t^{r_2} v\right\rangle, $$

$$ D_x \langle u, v\rangle = \langle D_x u, A_x v\rangle + \langle A_x u, D_x v\rangle. $$

在时间方向和空间方向上使用共形隐式中点格式[4]，我们能够得到方程(3)的离散梯度格式

$$ \begin{aligned} & M\left(D_t^a A_x z_j^n\right) + K\left(D_x A_t^a z_j^n\right) \\ & = \overline{\nabla} S_0\left(A_t^a T_x z_j^n, A_t^a z_j^n\right) + \overline{\nabla} S_1\left(A_t^a T_x z_j^n, A_t^a z_j^n\right)\dot{\chi}_{1j}^n + \overline{\nabla} S_2\left(A_t^a T_x z_j^n, A_t^a z_j^n\right)\dot{\chi}_{2j}^n \end{aligned} \tag{5} $$

定理 2 随机共形离散梯度格式(5)保持离散的随机共形动量演化规律

$$ \begin{aligned} & D_x\left[S_0\left(A_t^a z_j^n\right) + \frac{1}{2}\left\langle D_t^a z_j^n, M A_t^a z_j^n\right\rangle\right] + D_t^{2a}\left(\frac{1}{2}\left\langle A_x z_j^n, M D_x z_j^n\right\rangle\right) \\ & = -\left\langle D_x A_t^a z_j^n, \nabla S_1\left(A_t^a z_j^n\right)\dot{\chi}_{1j}^n + \nabla S_2\left(A_t^a z_j^n\right)\dot{\chi}_{2j}^n\right\rangle. \end{aligned} $$

证明： 将等式(5)与 $D_x A_t^a z_j^n$ 做内积

$$ \begin{aligned} & \left\langle D_x A_t^a z_j^n, M D_t^a A_x z_j^n\right\rangle + \left\langle D_x A_t^a z_j^n, K D_x A_t^a z_j^n\right\rangle \\ & = \left\langle D_x A_t^a z_j^n, \overline{\nabla} S_0\left(A_t^a T_x z_j^n, A_t^a z_j^n\right)\right\rangle + \left\langle D_x A_t^a z_j^n, \overline{\nabla} S_1\left(A_t^a T_x z_j^n, A_t^a z_j^n\right)\dot{\chi}_{1j}^n\right\rangle \\ & \quad + \left\langle D_x A_t^a z_j^n, \overline{\nabla} S_2\left(A_t^a T_x z_j^n, A_t^a z_j^n\right)\dot{\chi}_{2j}^n\right\rangle, \end{aligned} $$

其中 $\left\langle D_x A_t^a z_j^n, K D_x A_t^a z_j^n\right\rangle = 0$，上式等价于

$$ \begin{aligned} & \left\langle D_x A_t^a z_j^n, M D_t^a A_x z_j^n\right\rangle \\ & = \left\langle D_x A_t^a z_j^n, \nabla S_0\left(A_t^a z_j^n\right)\right\rangle + \left\langle D_x A_t^a z_j^n, \nabla S_1\left(A_t^a z_j^n\right)\dot{\chi}_{1j}^n\right\rangle + \left\langle D_x A_t^a z_j^n, \nabla S_2\left(A_t^a z_j^n\right)\dot{\chi}_{2j}^n\right\rangle, \end{aligned} $$

又由于 $\left\langle D_x A_t^a z_j^n, M D_t^a A_x z_j^n\right\rangle = -\left\langle D_t^a A_x z_j^n, M D_x A_t^a z_j^n\right\rangle$，可得

$$\left\langle D_x A_t^a z_j^n, \nabla S_0\left(A_t^a z_j^n\right)\right\rangle + \left\langle D_t^a A_x z_j^n, MD_x A_t^a z_j^n\right\rangle$$
$$= -\left\langle D_x A_t^a z_j^n, \nabla S_1\left(A_t^a z_j^n\right)\dot{\chi}_{1j}^n\right\rangle - \left\langle D_x A_t^a z_j^n, \nabla S_2\left(A_t^a z_j^n\right)\dot{\chi}_{2j}^n\right\rangle.$$

故我们只需要证明

$$\left\langle D_x A_t^a z_j^n, \nabla S_0\left(A_t^a z_j^n\right)\right\rangle + \left\langle D_t^a A_x z_j^n, MD_x A_t^a z_j^n\right\rangle$$
$$= D_x\left[S_0\left(A_t^a z_j^n\right) + \frac{1}{2}\left\langle D_t^a z_j^n, MA_t^a z_j^n\right\rangle\right] + D_t^{2a}\left(\frac{1}{2}\left\langle A_x z_j^n, MD_x z_j^n\right\rangle\right),$$

我们注意到$\left\langle D_x A_t^a z_j^n, \nabla S_0\left(A_t^a z_j^n\right)\right\rangle = D_x S_0\left(A_t^a z_j^n\right)$，然后应用引理 2 得到

$$\begin{aligned}
2\left\langle D_t^a A_x z_j^n, MD_x A_t^a z_j^n\right\rangle &= \left\langle D_t^a A_x z_j^n, MD_x A_t^a z_j^n\right\rangle + \left\langle A_t^a A_x z_j^n, MD_x D_t^a z_j^n\right\rangle \\
&\quad - \left\langle A_t^a A_x z_j^n, MD_x D_t^a z_j^n\right\rangle + \left\langle D_t^a A_x z_j^n, MD_x A_t^a z_j^n\right\rangle \\
&= \left\langle D_t^a A_x z_j^n, MD_x A_t^a z_j^n\right\rangle + \left\langle A_t^a A_x z_j^n, MD_x D_t^a z_j^n\right\rangle \\
&\quad + \left\langle D_x D_t^a z_j^n, MA_x A_t^a z_j^n\right\rangle + \left\langle D_t^a A_x z_j^n, MD_x A_t^a z_j^n\right\rangle \\
&= D_t^{2a}\left\langle A_x z_j^n, MD_x z_j^n\right\rangle + D_x\left\langle D_t^a z_j^n, MA_t^a z_j^n\right\rangle
\end{aligned}$$

因此我们有

$$D_x\left[S_0\left(A_t^a z_j^n\right) + \frac{1}{2}\left\langle D_t^a z_j^n, MA_t^a z_j^n\right\rangle\right] + D_t^{2a}\left(\frac{1}{2}\left\langle A_x z_j^n, MD_x z_j^n\right\rangle\right)$$
$$+\left\langle D_x A_t^a z_j^n, \nabla S_1\left(A_t^a z_j^n\right)\dot{\chi}_{1j}^n + \nabla S_2\left(A_t^a z_j^n\right)\dot{\chi}_{2j}^n\right\rangle = 0$$

证明完毕。

5. 小结

本文介绍了耗散型随机非线性薛定谔方程，它是在确定的薛定谔方程上加了耗散系数和噪音尺度得到的，为了方便我们对其物理性质的研究，我们对原方程做了修改使其变为耗散型随机非线性薛定谔方程的紧致形式，接着对其物理性质中的动量进行了研究，得到了耗散型随机非线性薛定谔方程的随机共形动量演化规律，反映了耗散型随机非线性薛定谔方程在动量上面的变化。为了对其具有更深刻的研究，本文构造了一种新的数值格式，离散梯度数值格式，并证明了耗散型随机非线性薛定谔方程的随机共形动量演化规律在这个数值格式下也是成立的，这对随机非线性薛定谔方程的研究有一定的意义，也为高阶随机非线性薛定谔方程的模拟做出了铺垫。

参考文献

[1] Chen, C., Hong, J. and Wang, X. (2017) Approximation of Invariant Measure for Damped Stochastic Nonlinear Schrodinger Equation via an Ergodic Numerical Scheme. *Potential Analysis*, **46**, 323-367. https://doi.org/10.1007/s11118-016-9583-9

[2] Debussche, A. and Odasso, C. (2005) Ergodicity for a Weakly Damped Stochastic Non-Linear Schrodinger Equation. *Journal of Evolution Equations*, **5**, 317-356. https://doi.org/10.1007/s00028-005-0195-x

[3] Moore, B.E., *et al.* (2013) Conformal Conservation Laws and Geometric Integration for Damped Hamiltonian PDEs. *Journal of Computational Physics*, **232**, 214-233. https://doi.org/10.1016/j.jcp.2012.08.010

[4] Bhatt, A., *et al.* (2016) Second Order Conformal Symplectic Schemes for Damped Hamiltonian Systems. *Journal of Scientific Computing*, **66**, 1234-1259. https://doi.org/10.1007/s10915-015-0062-z