Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2021, 10(4), 989-995
Published Online April 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2021.104107

Hans汉斯

斜对角无穷维Hamilton算子的数值域和二次数值域

张　娅，高　强，张欣琦，刘家乐，吴德玉

内蒙古大学数学科学学院，内蒙古 呼和浩特
Email: zhangya312623@163.com, 2285018546@qq.com, 2240826405@qq.com, 2968573039@qq.com, wudeyu2585@163.com

收稿日期：2021年3月19日；录用日期：2021年4月6日；发布日期：2021年4月21日

摘　要

本文研究了斜对角无穷维Hamilton算子的数值域和二次数值域，利用数值域和二次数值域的定义以及酉算子的不变性得到了其数值域和二次数值域关于虚轴、实轴、原点对称的充分条件，即 $D(B)=D(C)$。其次给出了斜对角无穷维Hamilton算子数值域和二次数值域的闭包包含谱集的结论。

关键词

数值域，二次数值域，斜对角无穷维Hamilton算子，谱

Numerical Range and Quadratic Numerical Range of Off-Diagonal Infinite Dimensional Hamiltonian Operators

Ya Zhang, Qiang Gao, Xinqi Zhang, Jiale Liu, Deyu Wu

School of Mathematical Sciences, Inner Mongolia University, Hohhot Inner Mongolia
Email: zhangya312623@163.com, 2285018546@qq.com, 2240826405@qq.com, 2968573039@qq.com, wudeyu2585@163.com

Received: Mar. 19th, 2021; accepted: Apr. 6th, 2021; published: Apr. 21st, 2021

Abstract

In this paper, the numerical range and quadratic numerical range of diagonal infinite dimensional Hamiltonian operators are studied. By using the definitions of numerical range and quadratic nu-

文章引用: 张娅, 高强, 张欣琦, 刘家乐, 吴德玉. 斜对角无穷维 Hamilton 算子的数值域和二次数值域[J]. 应用数学进展, 2021, 10(4): 989-995. DOI: 10.12677/aam.2021.104107

merical range and the invariance of unitary operator, we obtain the sufficient conditions for the numerical range and quadratic numerical range are symmetric with respect to the imaginary axis, the real axis and the origin, $D(B)=D(C)$. Secondly, we give the conclusion that the closure of the numerical range and quadratic numerical range of off-diagonal infinite dimensional Hamiltonian operators contains spectral sets.

Keywords

Numerical Range, Quadratic Numerical Range, Off-Diagonal Infinite Dimensional Hamiltonian Operator, Spectrum

1. 引言

斜对角无穷维 Hamilton 算子是由无穷维 Hamilton 系统推导出的具有深刻力学背景的、适用性较广泛的一类非自伴算子[1]。许多数学物理方程都可以等价地化成无穷维 Hamilton 系统[2]，从而得到对应的 Hamilton 算子。无穷维 Hamilton 算子的谱理论是解决某些力学问题的分离变量法的理论依据[3]，在代数方程求解问题、控制论以及辛几何等领域有重要应用。而在算子谱理论的研究中，数值域是一个很重要的工具，通常用它来刻画线性算子的谱的分布范围。例如，有界线性算子的数值域的闭包包含其谱集。但对于一般的无界线性算子而言，其数值域没有这一性质。我们还知道，某些算子矩阵的谱具有关于复平面的虚轴、实轴和过原点直线的对称性。这些性质揭示了算子本身的结构特性。近年来，在研究 2×2 分块算子矩阵时出现了一个新概念——二次数值域[4]，并且应用二次数值域可以建立自伴 2×2 分块算子矩阵的变分原理，进而估计算子的特征值。对于一般有界线性算子来说，二次数值域是数值域的子集，并且算子的谱集也包含在它的闭包里。所以二次数值域在线性算子谱的刻画方面比数值域更为精细[5]。但是，对于一般的无界线性算子而言，其二次数值域的闭包是否包含谱集还未可知。因此，本文研究了斜对角无穷维 Hamilton 算子的数值域和二次数值域关于过原点直线的对称性，进一步给出了数值域的闭包包含谱集以及二次数值域的闭包也包含谱集的结论。

2. 预备知识

下面给出本文使用的一些符号和定义。

文中始终用符号 X 表示 Hilbert 空间，若 T 是 X 中的稠定线性算子，分别用 $D(T)$ 和 T^* 表示 T 的定义域和共轭算子。T 的谱集记为 $\sigma(T)$，点谱的全体记为 $\sigma_p(T)$，剩余谱的全体记为 $\sigma_r(T)$，连续谱的全体记为 $\sigma_c(T)$。$\mathcal{R}(T)$ 表示 T 的值域。符号 $(\cdot,\cdot)$ 表示 Hilbert 空间 X 中的内积。

定义 1 设 T 是 Hilbert 空间 X 中的有界线性算子，其数值域 W_T 定义为

$$W_T=\{(Tx,x):(x,x)=1\}.$$

另一个等价定义为

$$W_T=\left\{\frac{(Tx,x)}{(x,x)}:x\neq 0\right\}.$$

定义 2 设 X 是 Hilbert 空间，对于 $f,g\in X, f,g\neq 0$ 定义

$$\mathcal{A}_{f,g}=\begin{bmatrix}\dfrac{(Af,f)}{\|f\|^2} & \dfrac{(Bg,f)}{\|f\|\|g\|}\\ \dfrac{(Cf,g)}{\|f\|\|g\|} & \dfrac{(Dg,g)}{\|g\|^2}\end{bmatrix},$$

则称集合

$$W_{\mathcal{A}}^2=\left\{\lambda\in\mathbb{C}:\exists f,g\in X, f,g\neq 0,\det\left(\mathcal{A}_{f,g}-\lambda I\right)=0\right\}$$

为 Hilbert 空间 $X\times X$ 上的 2×2 分块算子矩阵

$$\mathcal{A}=\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}$$

的二次数值域。

定义 3 如果 B，C 都是 X 中的自共轭算子(可能无界)，则称如下算子矩阵

$$H=\begin{bmatrix}0 & B\\ C & 0\end{bmatrix}:D(C)\times D(B)\subset X\times X\to X\times X$$

为斜对角无穷维 Hamilton 算子。

命题 1 设斜对角无穷维 Hamilton 算子 $H=\begin{bmatrix}0 & B\\ C & 0\end{bmatrix}:D(C)\times D(B)\subset X\times X\to X\times X$，当 $D(B)=D(C)$时，则有如下结论：

$$(Hx,x)=\left(x,H^*x\right).$$

证明 $D(H)=D(C)\times D(B)$，$D\left(H^*\right)=D(B)\times D(C)$，当 $D(B)=D(C)$时，有 $D(H)=D\left(H^*\right)$，所以 $x\in D(H)$ 时，也有 $x\in D\left(H^*\right)$，从而命题成立。

命题 2 设斜对角无穷维 Hamilton 算子 $H=\begin{bmatrix}0 & B\\ C & 0\end{bmatrix}:D(C)\times D(B)\subset X\times X\to X\times X$，$J_1=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$，$J_2=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$，$J_3=\begin{bmatrix}0 & i\\ -i & 0\end{bmatrix}$，则

$$H=J_1(-H)J_1=J_2\left(H^*\right)J_2=J_3\left(-H^*\right)J_3.$$

3. 主要结论及其证明

定理 1 $H=\begin{bmatrix}0 & B\\ C & 0\end{bmatrix}:D(C)\times D(B)\subset X\times X\to X\times X$ 是斜对角无穷维 Hamilton 算子，如果 $D(B)=D(C)$，则有如下结论：

i) W_H 关于虚轴对称。

ii) W_H 关于实轴对称。

iii) W_H 关于原点对称。

证明 i) 若 $\lambda\in W_H$，则存在 $x_0\in D(H)$，$\|x_0\|=1$，使得

$$\lambda=\left(Hx_0,x_0\right).$$

由命题 1 和命题 2，$H=J_3\left(-H^*\right)J_3$，$J_3=J_3^*$，$D(H)=D\left(H^*\right)$，则

$$\lambda=\left(-J_3H^*J_3x_0,x_0\right)=-\left(H^*J_3x_0,J_3x_0\right)=-\left(J_3x_0,HJ_3x_0\right).$$

两边取共轭，则

$$\left(HJ_3x_0,J_3x_0\right)=-\overline{\lambda}$$

又由$\|J_3x_0\|=1$，所以$-\overline{\lambda}\in W_H$。当$-\overline{\lambda}\in W_H$时，$\lambda\in W_H$的证明是类似的。即$W_H$关于虚轴对称。

ii) 若$\lambda\in W_H$，则存在$x_0\in D(H)$，$\|x_0\|=1$，使得

$$\lambda=\left(Hx_0,x_0\right).$$

由命题1和命题2，$H=J_2H^*J_2$，$J_2=J_2^*$，$D(H)=D\left(H^*\right)$，则

$$\lambda=\left(J_2H^*J_2x_0,x_0\right)=\left(H^*J_2x_0,J_2x_0\right)=\left(J_2x_0,HJ_2x_0\right).$$

两边取共轭，则

$$\left(HJ_2x_0,J_2x_0\right)=\overline{\lambda}.$$

又由$\|J_2x_0\|=1$，所以$\overline{\lambda}\in W_H$。当$\overline{\lambda}\in W_H$时，$\lambda\in W_H$的证明是类似的。即$W_H$关于实轴对称。

iii) 若$\lambda\in W_H$，则存在$x_0\in D(H)$，$\|x_0\|=1$，使得

$$\lambda=\left(Hx_0,x_0\right).$$

由命题1和命题2，$H=J_1(-H)J_1$，$J_1=J_1^*$，$D(H)=D\left(H^*\right)$，则

$$\lambda=\left(-J_1HJ_1x_0,x_0\right)=-\left(HJ_1x_0,J_1x_0\right).$$

则

$$\left(HJ_1x_0,J_1x_0\right)=-\lambda.$$

又由$\|J_1x_0\|=1$，所以$-\lambda\in W_H$。当$-\lambda\in W_H$时，$\lambda\in W_H$的证明是类似的。即W_H关于原点对称。

定理2 $H=\begin{bmatrix}0&B\\C&0\end{bmatrix}:D(C)\times D(B)\subset X\times X\to X\times X$是斜对角无穷维Hamilton算子，如果$D(B)=D(C)$，则有如下结论：

i) W_H^2关于虚轴对称。

ii) W_H^2关于实轴对称。

iii) W_H^2关于原点对称。

证明 i) 若$\lambda\in W_H^2$，则存在$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in D(H)$且$\|x\|=1,\|y\|=1$，使得

$$\det\left(\begin{bmatrix}-\lambda&(By,x)\\(Cx,y)&-\lambda\end{bmatrix}\right)=0.$$

又因为$D(B)=D(C)$，从而有

$$\lambda^2=(By,x)(Cx,y)=(y,Bx)(x,Cy).$$

两边取共轭后得

$$\overline{\lambda}^2=(Bx,y)(Cy,x).$$

进而得

$$\det\left(\begin{bmatrix}\overline{\lambda}&(Bx,y)\\(Cy,x)&\overline{\lambda}\end{bmatrix}\right)=\begin{vmatrix}\overline{\lambda}&(Cy,x)\\(Bx,y)&\overline{\lambda}\end{vmatrix}=0.$$

则 $-\bar{\lambda}\in W_H^2$，从而 W_H^2 关于虚轴对称。

ii) 同理，可以得到

$$\det\left(\begin{bmatrix} -\bar{\lambda} & (By,x) \\ (Cx,y) & -\bar{\lambda} \end{bmatrix}\right)=0 .$$

则 $\bar{\lambda}\in W_H^2$，从而 W_H^2 关于实轴对称。

iii) 同理，可得

$$\det\left(\begin{bmatrix} \lambda & (By,x) \\ (Cx,y) & \lambda \end{bmatrix}\right)=0 .$$

则 $-\lambda\in W_H^2$，从而 W_H^2 关于原点对称。

定理 3 $H=\begin{bmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{bmatrix}: D(C)\times D(B)\subset X\times X\to X\times X$ 是斜对角无穷维 Hamilton 算子，如果 $D(B)=D(C)$，则有如下结论：

i) $\sigma(H)\subset\overline{W_H}$。

ii) $\sigma(H)\subset\overline{W_H^2}$。

证明 i) 令 $\lambda_0\in\sigma_p(H)$，由点谱的定义，存在 $x\neq 0$，使得 $Hx=\lambda_0 x$。

两边关于 x 作用内积得

$$\lambda_0=\frac{(Hx,x)}{(x,x)} .$$

从而 $\lambda_0\in W_H$，则 $\sigma_P(H)\subset W_H$。令 $\lambda_0\in\sigma_r(H)$，则 $\overline{\lambda_0}\in\sigma_p(H^*)$，由命题 2 中 $H=J_2(H^*)J_2$ 及 $J_2^2=1$ 可知 $\overline{\lambda_0}\in\sigma_p(H)$，从而 $\overline{\lambda_0}\in W_H$。再由定理 1 得 W_H 关于实轴对称，所以 $\lambda_0\in W_H$。则 $\sigma_r(H)\subset W_H$。

则

$$\sigma_P(H)\cup\sigma_r(H)\subset W_H .$$

令 $\lambda_0\in\sigma_c(H)$，则存在正交化序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty},(\|x_n\|=1,n=1,2,\cdots)$ 使得当 $n\to\infty$ 时，

$$(H-\lambda_0 I)x_n\to 0 .$$

两边关于 x_n 做内积得 $(Hx_n,x_n)\to\lambda_0$。

令 $\lambda_n=(Hx_n,x_n)$，则 $\lambda_n\in W_H$ 且 $\lambda_n\to\lambda_0$，从而有 $\lambda_0\in\overline{W_H}$。

所以

$$\sigma_c(H)\subset\overline{W_H} .$$

则

$$\sigma(H)\subset\overline{W_H} .$$

ii) 令 $\lambda_0\in\sigma_p(H)$，则存在 $u=\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}\neq 0$ 使得 $Hu=\lambda_0 u$，即 $Bg=\lambda_0 f, Cf=\lambda_0 g$。

两边分别关于 f 和 g 做内积得 $(Bg,f)=\lambda_0(f,f)$，$(Cf,g)=\lambda_0(g,g)$。

当 f 和 g 全部非零时，有

$$\frac{(Bg,f)}{(f,f)}=\frac{(Cf,g)}{(g,g)}=\lambda_0 .$$

所以

$$H_{f,g}=\begin{bmatrix}0 & \frac{\lambda_0(f,f)}{\|g\|\|f\|}\\ \frac{\lambda_0(g,g)}{\|f\|\|g\|} & 0\end{bmatrix}.$$

所以

$$\det\left(H_{f,g}-\lambda_0 I\right)=\begin{vmatrix}-\lambda_0 & \frac{\lambda_0\|f\|^2}{\|g\|\|f\|}\\ \frac{\lambda_0\|g\|^2}{\|f\|\|g\|} & -\lambda_0\end{vmatrix}=\lambda_0^2-\frac{\lambda_0\|f\|}{\|g\|}\cdot\frac{\lambda_0\|g\|}{\|f\|}=0.$$

当 f 和 g 中一个为 0 时，不妨设 $f=0,g\neq 0$，则 $\lambda_0=0,Bg=0$。

取 $\tilde{f}=I\in D(H)$，则有 $\left(Bg,\tilde{f}\right)=0$，从而

$$\det\left(H_{f,g}-\lambda_0 I\right)=\begin{vmatrix}0 & \frac{\left(Bg,\tilde{f}\right)}{\|g\|\|\tilde{f}\|}\\ \frac{\left(C\tilde{f},g\right)}{\|\tilde{f}\|\|g\|} & 0\end{vmatrix}=0$$

当 $f\neq 0,g=0$ 时同理。

因此 $\lambda_0\in W_H^2$，所以 $\sigma_p(H)\subset W_H^2$。令 $\lambda_0\in\sigma_r(H)$，则 $\overline{\lambda_0}\in\sigma_p\left(H^*\right)$。由命题 2 可知 $\overline{\lambda_0}\in\sigma_p(H)$。从而 $\overline{\lambda_0}\in W_H^2$。再由定理 2 得 W_H^2 关于实轴对称，所以 $\lambda_0\in W_H^2$。故 $\sigma_r(H)\subset W_H^2$。

则

$$\sigma_P(H)\cup\sigma_r(H)\subset W_H^2.$$

令 $\lambda_0\in\sigma_c(H)$，则必存在一正交化序列 $\left\{x_n=\begin{pmatrix}x_n^1\\ x_n^2\end{pmatrix}\right\}_{n=1}^{\infty}$，$(\|x_n\|=1,n=1,2,\cdots)$使得当 $n\to\infty$ 时，

$$\left(H-\lambda_0 I\right)x_n\to 0.$$

即 $Bx_n^2\to\lambda_0 x_n^1,Cx_n^1\to\lambda_0 x_n^2$，两边分别关于 x_n^1 和 x_n^2 做内积得，

$$\left(Bx_n^2,x_n^1\right)\to\lambda_0\left(x_n^1,x_n^1\right),\ \left(Cx_n^1,x_n^2\right)\to\lambda_0\left(x_n^2,x_n^2\right).$$

当 x_n^1 和 x_n^2 下极限都不为 0 时，

$$\det\left(H_{f_n,g_n}-\lambda_0 I\right)=\begin{bmatrix}-\lambda_0 & \frac{\left(Bx_n^2,x_n^1\right)}{\|x_n^1\|\|x_n^2\|}\\ \frac{\left(Cx_n^1,x_n^2\right)}{\|x_n^1\|\|x_n^2\|} & -\lambda_0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}-\lambda_0 & \frac{\lambda_0\left(x_n^1,x_n^1\right)}{\|x_n^1\|\|x_n^2\|}\\ \frac{\lambda_0\left(x_n^2,x_n^2\right)}{\|x_n^1\|\|x_n^2\|} & -\lambda_0\end{bmatrix}=0.$$

当 x_n^1 和 x_n^2 中有一个下极限为 0 时，不妨设 $x_n^1\to 0$，则 $\lambda_0=0$，$\left(Bx_n^2,x_n^1\right)\to 0$。

则

$$\det\left(H_{f_n,g_n}-\lambda_0 I\right)=0.$$

所以 $\lambda_0 \in \overline{W_H^2}$，进而 $\sigma_c(H) \subset \overline{W_H^2}$。

则

$$\sigma(H) \subset \overline{W_H^2}.$$

基金项目

内蒙古大学校级大学生创新创业训练计划资助项目(项目编号：202011222)。

参考文献

[1] 吴德玉，阿拉坦仓，黄俊杰，海国军. Hilbert 空间中线性算子数值域及其应用[M]. 北京：科学出版社，2018: 94-99.

[2] 阿拉坦仓，海国君，吴德玉. 无穷维 Hamilton 算子的数值域[J]. 系统科学与数学, 2013, 33(4): 506-510.

[3] 侯国林，阿拉坦仓. 一类无穷维 Hamilton 算子的谱[J]. 内蒙古大学学报(自然科学版), 2007, 38(3): 247-251.

[4] 吴德玉，阿拉坦仓. 无穷维 Hamilton 算子的二次数值域[J]. 数学的实践与认识, 2009, 39(21): 186-191.

[5] 满达，阿拉坦仓，侯国林. 某些算子矩阵的数值域和二次数值域的对称性[J]. 内蒙古大学学报(自然科学版), 2012, 43(4): 384-388.