Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2021, 10(4), 996-1002
Published Online April 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2021.104108

求解时空分数阶扩散方程反源问题的数值方法

段柔姿

长沙理工大学数学与统计学院，湖南 长沙
Email: 452537983@qq.com

收稿日期：2021年3月19日；录用日期：2021年4月6日；发布日期：2021年4月21日

摘 要

在本文中，主要研究一类时空分数阶扩散方程只与空间变量有关的反源问题，通过分析该反源问题的不适定性，将求解反源问题转化求解第一类Fredlom积分方程，应用经典的Tikhonov正则化方法得到了正则解的存在性，并证明正则解在后验正则化参数选择规则下的收敛估计。

关键词

时空分数阶扩散方程，反源问题，Tikhonov正则化，正则解，收敛估计

A Numerical Method for Solving the Inverse Source Problem of the Space-Time Fractional Diffusion Equation

Rouzi Duan

School of Mathematics and Statistics, Changsha University of Science and Technology, Changsha Hunan
Email: 452537983@qq.com

Received: Mar. 19th, 2021; accepted: Apr. 6th, 2021; published: Apr. 21st, 2021

Abstract

In this paper, we mainly study the inverse source problem of a class of space-time fractional diffusion equations which are only related to spatial variables. By analyzing the ill-posedness of the inverse source problem, we transform the solution of the inverse source problem into the solution of the first Fredlom integral equation. The existence of the regular solution is obtained by using the classical Tikhonov regularization method, and the convergence estimation of the regular solution is proved under the posterior regularization parameter selection rule.

文章引用: 段柔姿. 求解时空分数阶扩散方程反源问题的数值方法[J]. 应用数学进展, 2021, 10(4): 996-1002.
DOI: 10.12677/aam.2021.104108

Keywords

Space-Time Fractional Diffusion Equation, Source Inverse Problem, Tikhonov Regularization, Regular Solution, Convergence Estimation

1. 引言

在本文中，我们研究如下时空分数阶扩散方程中只与空间变量有关的反源问题：

$$\begin{cases} \partial_{0+}^{\alpha} u(x,t) = -(-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} u(x,t) + f(x)p(t), & x \in \Omega, \quad t \in (0,T], \\ u(x,0) = \phi(x), & x \in \Omega, \\ u(x,t) = 0, & x \in \partial\Omega, \quad t \in (0,T] \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 ∂_{0+}^{α} 是 α 阶左侧 Caputo 分数阶导数：

$$\partial_{0+}^{\alpha} u(x,t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{u_t(x,\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}} \mathrm{d}\tau, \qquad 0 < \alpha < 1,$$

$(-\Delta)^{\frac{\beta}{2}}$ 是 β 阶空间分数阶拉普拉斯算子，其定义如下：

假定 $-\Delta$ 在 Ω 中具有其次 Dirichlet 边界条件的特征值和特征向量为 $\{\overline{\lambda}_k, \varphi_k\}$，也就是说满足

$$-\Delta\varphi_n = -\overline{\lambda}_n \varphi_n,\ \varphi_n|_{\partial\Omega} = 0.$$

令 $\mathcal{H}_0^{\beta}(\Omega) := \left\{ u = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n : \|u\|_{\mathcal{H}_0^{\beta}(\Omega)}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \overline{\lambda}_n^{\beta} < \infty \right\}$。

故若 $u \in \mathcal{H}_0^{\beta}(\Omega)$，现定义算子 $(-\Delta)^{\frac{\beta}{2}}$ 为：$(-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} u = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \overline{\lambda}_n^{\beta/2} \varphi_n$。

将算子 $\mathcal{H}_0^{\beta}(\Omega)$ 映射到 $L_2(\Omega)$，且具有如下等式：

$$\|u\|_{\mathcal{H}_0^{\beta}(\Omega)} = \left\| (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} u \right\|_{L_2(\Omega)}.$$

当源项 $f(x), p(t)$ 已知时，可以利用有限元或有限差分法等方法求解问题(1.1)的数值解。本文主要考虑空间源项 $f(x)$ 的反演，希望通过终点时刻 T 的观测数据 $u(x,T) = g(x)$ 来反演空间源项 $f(x)$。一般情况下，观察数据带有误差，记为 $g^{\delta}(x)$，满足

$$\left\| g^{\delta}(x) - g(x) \right\| \le \delta, \tag{1.2}$$

其中 δ 为观测数据噪声水平。

对于方程(1.1)这类时间－空间分数阶扩散方程，其通常被应用于流变学、高分子材料学、生物物理学等领域[1] [2]，由此引起了很多学者的关注，并且对其做了大量研究，故而该方程也有重要的研究意义。对其反源问题的相关研究主要有，Wei 和 Li [3]给出了该方程的正问题的解，与此同时，他们采取将边界元方法与广义 Tikhonov 正则化方法相结合，对随时间变化的源项进行识别。Tatar [4] [5] [6]等人考虑了

方程中时间－空间分数阶导数的阶数的识别。在本文中，我们关注空间源项 $f(x)$ 在该方程中的数值重构。采用 Tikhonov 正则化方法确定空间源项 $f(x)$。

2. 预备知识

为方便起见，我们给出如下引理：

引理 1 对于任意的 λ_n，当满足 $\lambda_n \ge \lambda_1 > 0$ 时，存在一个的正常数 $C_1 = 1 - E_{\alpha,1}\left(-\lambda_1 T^\alpha\right)$，其依赖于 α, T, λ_1，使得下式成立

$$\frac{C_1}{T^\alpha \lambda_n} \le E_{\alpha,\alpha+1}\left(-\lambda_n T^\alpha\right) \le \frac{1}{T^\alpha \lambda_n}.$$

引理 2 对于常数 $q>0, \mu>0, \beta>0, s \ge \lambda_1 > 0$，有

$$G(s) = \frac{\mu s^{1-\frac{q}{2}}}{\mu s^2 + \beta} \le \begin{cases} C_2 \mu^{\frac{q+2}{4}}, & 0<q<2, \\ C_3 \mu, & q \ge 2, \end{cases}$$

其中 $C_2 = C_2(q,\beta) > 0, C_3 = C_3(q,\beta,\lambda_1) > 0$ 独立于 s。

3. 反问题的不适定性

记 $\overline{\lambda}_n$ 和 $\varphi_n(x) \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ 为拉布拉斯算子 $-\Delta$ 具有齐次 Dirichlet 边界条件的特征值和对应的特征向量。根据重数计算，有 $0 < \overline{\lambda}_1 \le \overline{\lambda}_2 \le \cdots \le \overline{\lambda}_n \le \cdots$，$\lim\limits_{n\to\infty} \overline{\lambda}_n = +\infty$，且 $\left\{\varphi_n(x)\right\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $L_2(\Omega)$ 中的一组标准正交基。

引理 3.1 [3]假设 $\phi \in \mathcal{H}_0^\beta(\Omega), f \in L^2(\Omega), p \in AC[0,T]$，(其中 AC 表示绝对连续)那么问题(1.1)存在唯一弱解 $u \in C\left([0,T]; L^2(\Omega)\right) \cap L^2\left(0,T; \mathcal{H}_0^\beta(\Omega)\right)$ 使得 $\partial_{0+}^\alpha u \in C\left([0,T]; L^2(\Omega)\right) \cap L^2\left(0,T; L^2(\Omega)\right)$，且有如下的表达式：

$$\begin{aligned} u(x,t) = & \sum_{n=1}^{\infty} (\phi, \varphi_n) E_{\alpha,1}\left(-\lambda_n t^\alpha\right) \varphi_n(x) \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} (f, \varphi_n) \int_0^t p(\tau)(t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left(-\lambda_n (t-\tau)^\alpha\right) \mathrm{d}\tau \varphi_n(x). \end{aligned} \tag{3.1}$$

其中 $\lambda_n = \overline{\lambda}_n^{\frac{\beta}{2}}$，$E_{\alpha,\beta}(z)$ 为单参的 Mittag-Leffler 函数，定义为：

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, z \in C, \alpha > 0, \beta \in R.$$

现假定公式(3.1)中，$t = T$ 有

$$\begin{aligned} g(x) = u(x,T) = & \sum_{n=1}^{\infty} (\phi, \varphi_n) E_{\alpha,1}\left(-\lambda_n T^\alpha\right) \varphi_n(x) \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} (f, \varphi_n) \int_0^T p(\tau)(T-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left(-\lambda_n (T-\tau)^\alpha\right) \mathrm{d}\tau \varphi_n(x). \end{aligned} \tag{3.2}$$

令 $g_1(x) = g(x) - \sum\limits_{n=1}^{\infty} (\phi, \varphi_n) E_{\alpha,1}\left(-\lambda_n T^\alpha\right) \varphi_n(x)$ 和 $Q_n(t) = \int_0^t p(\tau)(t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left(-\lambda_n (t-\tau)^\alpha\right) \mathrm{d}\tau$。

现给出如下假定 $f_n = (f, \varphi_n), g_{1n} = (g_1, \varphi_n)$，那么将(3.2)整理后可得

$$g_{1n} = f_n Q_n(T). \tag{3.3}$$

为了得到空间源项 $f(x)$，那么只需解决下述第一类 Fredholm 积分方程：

$$(Kf)(x)=\int_{\Omega}k(x,\xi)f(\xi)\mathrm{d}\xi=g_1(x),\quad x\in\Omega, \tag{3.4}$$

其中内核为 $k(x,\xi)=\sum_{n=1}^{\infty}Q_n(T)\varphi_n(x)\varphi_n(\xi)$。

接下来说明反问题的不适定性。

我们首先证明积分方程(3.3)中的算子 K 是紧算子，观察上述内核的定义，可得 $k(x,\xi)=k(\xi,x)$，故可知 K 为自适定算子，现定义算子 K_N 如下

$$(K_N f)(x)=(Kf)(x)=\int_{\Omega}\sum_{n=1}^{N}Q_n(T)\varphi_n(x)\varphi_n(\xi)f(\xi)\mathrm{d}\xi=g_1(x),\quad x\in\Omega. \tag{3.5}$$

根据引理 1，有以下结论

$$Q_n(T)\le\|p\|_{C[0,T]}\int_0^T(T-\tau)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left(-\lambda_n(T-\tau)^{\alpha}\right)\mathrm{d}\tau\le\frac{\|p\|_{C[0,T]}}{\lambda_n}. \tag{3.6}$$

结合(3.4)~(3.6)式有

$$\|K_N f-Kf\|=\sum_{n=N+1}^{\infty}Q_n^2(T)f_n^2(x)\le\frac{\|p\|_{C[0,T]}^2}{\lambda_n^2}\sum_{n=N+1}^{\infty}f_n^2(x).$$

则说明

$$\|K_N f-Kf\|_{L^2(\Omega)}\le\frac{\|p\|_{C[0,T]}}{\lambda_n}\|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

因此，当 $N\to\infty$ 时，在空间 $L\left(L^2(\Omega),L^2(\Omega)\right)$ 中，$\|K_N f-Kf\|\to 0$ 也就是说，K 是一个紧算子。那么线性自适定紧算子 K 的奇异值为 $\psi_k=\int_0^T(T-\tau)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left(-\lambda_k(T-\tau)^{\alpha}\right)\mathrm{d}\tau=Q_k(T)$，其相关特征函数为 ϕ_k，ϕ_k 为 $L^2(\Omega)$ 一组标准基。

综上所述，根据参考文献[7]，可知该方程的反项问题为不适定问题，即积分方程(3.3)式是不适定的。但是当 $f(x)$ 满足一定条件时，$f(x)$ 是稳定的，现给出源项 $f(x)$ 的条件稳定性。

定理 3.1 假定 $p(t)\in C[0,T]$，且满足 $p(t)\ge p_0>0,t\in[0,T]$，与此同时 $f(x)\in\mathcal{H}_0^{\beta q}(\Omega)$ 满足下述先验条件：

$$\|f\|_{\mathcal{H}_0^{\beta}(\Omega)}\le E,\quad q>0, \tag{3.7}$$

那么有下式成立

$$\|f\|\le C_4E^{\frac{2}{q+2}}\|g\|^{\frac{q}{q+2}},\quad q>0, \tag{3.8}$$

其中 $C_4=(p_0C_1)^{-\frac{q}{q+2}}$ 是一个取决于 α,T,q,λ_1,p_0 的常数。

证明 根据(3.3)式和 Hölder 不等式，有

$$\|f\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{g_{1n}^2}{Q_n^2(T)}\le\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{g_{1n}^2}{Q_n^{q+2}(T)}\right)^{\frac{2}{q+2}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}g_{1n}^2\right)^{\frac{q}{q+2}}. \tag{3.9}$$

对于 $Q_n(T)$ 进行放缩有

$$Q_n(T)\ge p_0\int_0^T(T-\tau)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left(-\lambda_n(T-\tau)^{\alpha}\right)\mathrm{d}\tau=p_0T^{\alpha}E_{\alpha,\alpha+1}\left(-\lambda_nT^{\alpha}\right). \tag{3.10}$$

应用引理 1 和(3.9)式，可得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{g_{1n}^2}{Q_n^{q+2}(T)}\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_n^2}{\left(p_0T^{\alpha}E_{\alpha,\alpha+1}\left(-\lambda_nT^{\alpha}\right)\right)^q}\le\|f\|_{\mathcal{H}_0^{\beta q}(\Omega)}^2\left(p_0C_1\right)^{-q}. \tag{3.11}$$

结合(3.9)~(3.11)式，可得

$$\|f\|^2\le\left(p_0C_1\right)^{-\frac{2q}{q+2}}\|f\|_{\mathcal{H}_0^{\beta q}(\Omega)}^{\frac{4}{q+2}}\|g\|^{\frac{2q}{q+2}}. \tag{3.12}$$

证明完成。

4. 基于 Tikhonov 正则化方法的正则解及其收敛估计

现我们用 Tikhonov 正则化方法(可参见文献[7])去解决积分方程(3.4)式为如下形式：

$$\min_{f\in L^2(\Omega)}\|Kf-g_1\|^2+\mu\|f\|^2, \tag{4.1}$$

其中 $\mu>0$ 是一个正则化参数。根据上一节可知紧线性算子 K，有奇异系统 $\left(\sigma_n;\Psi_n(x),\varphi_n\right)$，故有

$$f_\mu(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Q_n(T)}{Q_n(T)^2+\mu}\left(g_1,\varphi_n\right)\varphi_n(x). \tag{4.2}$$

此外，$g_1^\delta=g^\delta-\sum_{n=1}^{\infty}(\phi,\varphi_n)E_{\alpha,1}\left(-\lambda_nT^{\alpha}\right)\varphi_n(x)$。

因此可得正则化解为：

$$f_\mu^\delta(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Q_n(T)}{Q_n(T)^2+\mu}\left(g_1^\delta,\varphi_n\right)\varphi_n(x). \tag{4.3}$$

现我们采取后验正则化参数选择规则(即 Morozov 偏差原则)，对(4.3)式中的正则化参数进行选择。基于定理 3.1 中的条件稳定(3.7)式，可得正则解的收敛估计。

首先，我们给出一个正交算子 $F:L^2(\Omega)\to\overline{R(K)}$。根据噪声估计(1.2)式，有

$$\left\|Fg_1^\delta-Fg_1\right\|\le\left\|g_1^\delta-g_1\right\|=\left\|g^\delta-g\right\|\le\delta, \tag{4.4}$$

通过 Morozov 偏差原则找到 μ 使得

$$\left\|K_1f_\mu^\delta-Fg_1^\delta\right\|=\tau\delta, \tag{4.5}$$

其中 $\tau>1$ 是一个常数。

根据下述引理，可知当 $\left\|Fg_1^\delta\right\|>\tau\delta$ 成立时，公式(4.5)中的 μ 唯一存在。

引理 4.1 假定 $\rho(\mu)=\left\|K_1f_\mu^\delta-Fg_1^\delta\right\|$，那么下列结论成立：

1) $\rho(\mu)$ 是一个连续函数；

2) $\lim\limits_{\mu\to0}\rho(\mu)=0$；

3) $\lim\limits_{\mu\to+\infty}\rho(\mu)=\left\|Fg_1^\delta\right\|$；

4) 在 $(0,\infty)$ 上，$\rho(\mu)$ 为严格单调递增函数。

定理 4.1 假定 $p(t)\in C[0,T]$，$p(t)\ge p_0>0$，$\forall t\in[0,T]$。且先验条件(3.7)式和噪声估计(1.2)式成立，则存在一个 $\tau>1$ 使得 $\left\|Fg_1^\delta\right\|>\tau\delta>0$。此外，正则化参数 $\mu>0$ 通过 Morozov 偏差原则(4.5)式选取。那么

1) 若$0<q<2$，有

$$\left\|f_\mu^\delta-f\right\|\le C_5E^{\frac{2}{q+2}}\delta^{\frac{q}{q+2}}. \tag{4.6}$$

2) 若 $q\ge 2$，有

$$\left\|f_\mu^\delta-f\right\|\le C_6E^{\frac{1}{2}}\delta^{\frac{1}{2}}, \tag{4.7}$$

其中$C_9=C_9\left(q,T,\alpha,\tau\right)$，$C_{10}=C_{10}\left(q,T,\alpha,\tau\right)$是正数。

证明 通过三角不等式，有

$$\left\|f_\mu^\delta-f\right\|\le\left\|f_\mu^\delta-f_\mu\right\|+\left\|f_\mu-f\right\|. \tag{4.8}$$

首先，对上式右端的第二项进行估计

$$\begin{aligned}K\left(f_\mu\left(x\right)-f\left(x\right)\right)&=\sum_{n=1}^{\infty}g_{1n}\frac{-\mu}{Q_n^2\left(T\right)+\mu}\varphi_n\left(x\right)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(g_{1n}-g_{1n}^\delta\right)\frac{-\mu}{Q_n^2\left(T\right)+\mu}\varphi_n\left(x\right)+\sum_{n=1}^{\infty}g_{1n}^\delta\frac{-\mu}{Q_n^2\left(T\right)+\mu}\varphi_n\left(x\right).\end{aligned} \tag{4.9}$$

结合(4.4)式和(4.5)式，有

$$\left\|K\left(f_\mu\left(x\right)-f\left(x\right)\right)\right\|\le\delta+\tau\delta=\left(\tau+1\right)\delta \tag{4.10}$$

此外，通过应用先验条件(3.7)，可得

$$\left\|f_\mu\left(x\right)-f\left(x\right)\right\|_{\mathcal{H}_0^{\beta q}(\Omega)}=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{g_n}{Q_n\left(T\right)}\frac{-\mu}{Q_n^2\left(T\right)+\mu}\lambda_n^{\frac{p}{2}}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\le\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{g_n}{Q_n\left(T\right)}\right)^2\lambda_n^p\right)^{\frac{1}{2}}\le E. \tag{4.11}$$

通过定理 3.1，有

$$\left\|f_\mu\left(x\right)-f\left(x\right)\right\|\le C_4\left(\tau+1\right)^{\frac{q}{q+2}}E^{\frac{2}{q+2}}\delta^{\frac{q}{q+2}},\quad\forall q>0. \tag{4.12}$$

现给出(4.8)式右端第一项的估计，有

$$\left\|f_\mu^\delta-f_\mu\right\|\le\frac{\delta}{2\sqrt{\mu}}. \tag{4.13}$$

根据(4.5)式，可得

$$\begin{aligned}\tau\delta&=\left\|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu}{Q_n^2\left(T\right)+\mu}g_{1n}^\delta\varphi_n\left(x\right)\right\|\\&\le\left\|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu}{Q_n^2\left(T\right)+\mu}\left(g_{1n}^\delta-g_{1n}\right)\varphi_n\left(x\right)\right\|+\left\|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu}{Q_n^2\left(T\right)+\mu}g_{1n}\varphi_n\left(x\right)\right\|\\&\le\delta+J.\end{aligned} \tag{4.14}$$

应用先验边界条件(3.7)，有

$$J=\left\|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu Q_n\left(T\right)}{Q_n^2\left(T\right)+\mu}\frac{1}{\lambda_n^{\frac{q}{2}}}\frac{g_{1n}}{Q_n\left(T\right)}\lambda_n^{\frac{q}{2}}\varphi_n\left(x\right)\right\|\le E\sup_n C\left(n\right). \tag{4.15}$$

结合引理 1 和(3.6)式有

$$C(n)=\frac{\mu Q_n(T)}{Q_n^2(T)+\mu}\frac{1}{\lambda_n^{\frac{q}{2}}}\le\frac{\mu\frac{p_1}{\lambda_n}}{\frac{C_1p_0^2}{\lambda_n^2}+\mu}\frac{1}{\lambda_n^{\frac{q}{2}}}\le\frac{p_1\mu\lambda_n^{1-\frac{q}{2}}}{p_0^2C_1+\mu\lambda_n^2},\tag{4.16}$$

其中 $p_1=\|p\|_{C[0,T]}$，通过引理 2，可得

$$C(n)\le\begin{cases}p_1C_2\left(q,p_0^2C_1\right)\mu^{\frac{2+q}{4}}, & 0<q<2,\\ p_1C_3\left(q,p_0^2C_1,\lambda_1\right)\mu, & q\ge 2.\end{cases}\tag{4.17}$$

将(4.15)式和(4.17)式代入(4.14)式中，得到

$$\frac{1}{\mu}\le\begin{cases}\left(\frac{p_1C_2}{\tau-1}\right)^{\frac{4}{q+2}}\left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{4}{q+2}}, & 0<q<2,\\ \frac{p_1C_3}{\tau-1}\frac{E}{\delta}, & q\ge 2.\end{cases}\tag{4.18}$$

将(4.18)式代入(4.13)式中，有

$$\left\|f_\mu^\delta-f\right\|\le\begin{cases}C_5E_1^{\frac{2}{q+2}}\delta^{\frac{q}{q+2}}, & 0<q<2,\\ C_6E_1^{\frac{1}{2}}\delta^{\frac{1}{2}}, & q\ge 2.\end{cases}\tag{4.19}$$

证明完成。

5. 结论

本文研究了时空分数阶扩散方程只与空间变量有关的源项反问题，说明了该反源问题的不适定性，利用 Tikhonov 正则化方法求解该不适定性问题，并给出正则解及其收敛估计。

参考文献

[1] Zaslavsky, G.M. (2005) Hamiltonian Chaos and Fractional Dynamics. Oxford University Press, Oxford.

[2] Zaslavsky, G.M. (2002) Chaos, Fractional Kinetics, and Anomalous Transport. *Physics Reports*, **371**, 461-580. https://doi.org/10.1016/S0370-1573(02)00331-9

[3] Li, Y.S. and Wei, T. (2018) An Inverse Time-Dependent Source Problem for a Time-Space Fractional Diffusion Equation. *Applied and Computational Mathematics*, **336**, 257-271. https://doi.org/10.1016/j.amc.2018.05.016

[4] Tatar, S., Tnaztepe, R. and Ulusoy, S. (2015) Determination of an Unknown Source Term in a Space-Time Fractional Diffusion Equation. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, **6**, 83-90.

[5] Tatar, S., Tnaztepe, R. and Ulusoy, S. (2016) Simultaneous Inversion for the Exponents of the Fractional Time and Space Derivatives in the Space-Time Fractional Diffusion Equation. *Applicable Analysis*, **95**, 1-23. https://doi.org/10.1080/00036811.2014.984291

[6] Tatar, S. and Ulusoy, S. (2014) An Inverse Source Problem for a One-Dimensional Space-Time Fractional Diffusion Equation. *Applicable Analysis*, **94**, 1-12. https://doi.org/10.1080/00036811.2014.979808

[7] Engl, H.W., Hanke, M. and Neubauer, A. (1996) Regularization of Inverse Problem. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/978-94-009-1740-8