

传感器网络上的非线性系统的加权融合估计

石也明, 肖寒臣, 石玉成

上海理工大学, 理学院, 上海
Email: shiyeming77@163.com

收稿日期: 2021年3月22日; 录用日期: 2021年4月11日; 发布日期: 2021年4月28日

摘要

考虑到一类具有随机发生的扇区非线性的离散时间系统的概率依赖加权调度, 本文关注融合估计问题。假定损耗测量现象是随机发生的, 并且损耗概率随时间变化, 可以实时测量其下限和上限安全极限。所解决的加权调度滤波器问题的目标计划设计一个具有加权调度矩阵的估计器, 以便针对外部噪声干扰和可容许的随机发生的非线性。借助Lyapunov类型分析方法, 可以获得充分条件, 以保证加权调度估计误差系统的稳定性。最后, 使用示例性的仿真来证明提案设计方案的有效性。

关键词

融合估计, 加权调度, 非线性随机系统, 时变伯努利分布, 稳定性分析, 传感器网络

Weighted Scheduling Fusion Estimation for Nonlinear Stochastic System over Sensor Networks

Yeming Shi, Hanchen Xiao, Yucheng Shi

College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai
Email: shiyeming77@163.com

Received: Mar. 22nd, 2021; accepted: Apr. 11th, 2021; published: Apr. 28th, 2021

Abstract

This paper is concerned with fusion estimation problem in view of the probability-dependent weighted scheduling for a class of discrete-time systems with stochastically occurring sector nonlinearities. It is assumed that the loss measurement phenomenon occurs randomly, the loss probability varies with time, and its lower and upper safety limits can be gauged in real time. The ob-

jective of the addressed weighted scheduling filter problem plans to design an estimator with weighted scheduled matrices, for external noise disturbances and admissible random occurrence of nonlinearity. With the help of Lyapunov type analysis approach, sufficient conditions can be gotten to guarantee the stability of the weighted scheduling estimation error system. At last, an illustrative simulation is used to certify the effectiveness of the proposed design scheme.

Keywords

Fusion Estimation, Weighted Scheduling, Nonlinear Stochastic Systems, Time-Varying Bernoulli Distribution, Stability Analysis, Sensor Networks (SNs)

Copyright © 2021 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 介绍

由于随机扰动在现实中无处不在, 因此随机模型在机械系统、生物系统、传感器网络和道路交通网络中得到了广泛的应用[1]。在过去的十年中, 许多学者研究了随机系统的控制和过滤, 并获得了许多成就。开发的滤波方法通常用于各种系统, 例如非线性系统和不确定的时滞系统[2] [3]。传感器信息融合估计器的设计网络多传感器融合中的无线传输系统引起了广泛的研究兴趣, 基本的流程图如图 1 所示, 即通过通信网络连接到融合中心。与传统的融合系统相比, 通信网络具有维护方便, 成本低, 安装简单的优点。但是, 当分布式传感器在通信网络中不够完善时, 数据包丢失和传输延迟是不可避免的。这些是导致融合估算器性能下降的主要原因, 并且可能会降低原始融合标准。

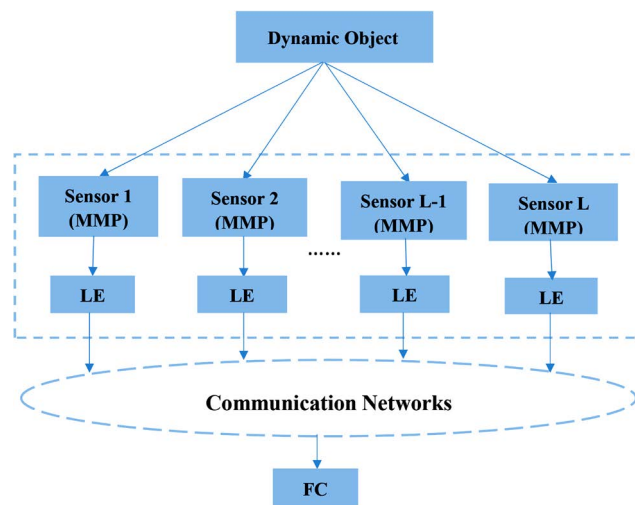


Figure 1. Multi-sensor fusion estimation

图 1. 多传感器融合估计

从控制理论的角度来看, 近年来, 控制器和滤波器的设计已成为研究重点[4]。时变控制器/滤波器已在文献[5]中进行了设计, 它由一个常数矩阵和可以实时测量的时变参数组成[5]。通过解决一组线性矩阵不等式, 常数矩阵可以很容易地获得。此外, 它比仅具有固定常数的传统滤波器性能要保守一些。在过

去的几年中,在离散时间和连续时间系统中都广泛地研究了增益调度滤波问题。在最近,一般借助于含有参数的李雅普诺夫函数法解决增益调度的过滤/控制问题来实现更好的过滤/控制性能的问题[6],并且在过去的工作中已经提出了一些相关的成果。对于具有随机损耗现象的离散非线性随机系统[7],对于具有随机丢失现象的离散非线性随机系统,尤其是当系统的时变特性主要由随机丢失现象导致时,这种问题很少研究过。因此,这确实是一个具有挑战性的问题,它值得进行大量的研究。但是,加权与损失概率有关的调度过滤问题 SN 从未针对非线性随机系统进行过研究。

本文研究了遗漏概率相关性离散时间的加权调度过滤问题系统。本文的主要贡献有三个方面:1) 考虑加权调度过滤问题应用于一般的离散时间随机非线性系统;2) 通过使用时间建立新的执行器模型满足伯努利随机变量的序列变化分配;3) 根据融合估计算法获得了一类新的滤波器增益。

2. 问题描述

我们考虑如下的非线性随机系统:

$$x_{k+1} = Ax_k + \zeta_k f(x_k) + B\omega_k \quad \text{式(1)}$$

测量输出为:

$$y_{i,k} = C_i x_k + D_i v_{i,k}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \text{式(2)}$$

其中 $x_k \in \mathbb{R}^{n_x}$ 是目标状态, $y_i(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ 是汇聚节点 i 的测量输出, $\{\omega_k\}_{k \geq 0}$ 和 $\{v_{i,k}\}_{k \geq 0}$ 遵从独立同分布。 B 、 C_i 、 D 是具有合适维度的已知矩阵, $\zeta_k \in \mathbb{R}^{n_x}$ 是一个表示传感器数据丢失的概率符合以下伯努利分布随机白序列

$$\begin{cases} \text{Prob}\{\zeta_k = 1\} = \text{E}\{\zeta_k\} = \rho_k \\ \text{Prob}\{\zeta_k = 0\} = 1 - \text{E}\{\zeta_k\} = 1 - \rho_k \end{cases} \quad \text{式(3)}$$

其中标量序列 ρ_k 属于区间 $[p_1 \ p_2] \subseteq [0 \ 1]$, p_1 和 p_2 分别是 ρ_k 的下界和上界。在本文中,假设 ζ_k , ω_k 和 ρ_k 是不相关的,此外,一类符合概率分布定律(4.3)的丢失测量时允许存在的。

向量值函数 $f(x_k)$ 代表非线性分布,且满足如下的扇形有界分布

$$[f(x_k) - \mathcal{F}_1 x_k]^T [f(x_k) - \mathcal{F}_2 x_k] \leq 0 \quad \text{式(4)}$$

其中初始条件为 $f(0) = 0$, 且 $F = \mathcal{F}_2 - \mathcal{F}_1$ 是一个正定矩阵, \mathcal{F}_1 和 \mathcal{F}_2 是维数适当的常数矩阵,一般情况下, $f(x_k)$ 在区间 $[\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2]$ 上取值,在这种情况下,非线性函数 $f(x_k)$ 可以转换成一个线性部分和一个非线性部分。

$$f(x_k) = \mathcal{F}_1 x_k + f_s(x_k) \quad \text{式(5)}$$

结合式(4)和式(5),可得:

$$f_s^T(x_k)(f_s(x_k) - Fx_k) \leq 0 \quad \text{式(6)}$$

基于测量输出 $\{y_{i,1}, \dots, y_{i,k}\}$, 第 i 个节点的局部估计器可以写作

$$\hat{x}_{i,k+1} = A\hat{x}_{i,k} + \zeta_k f(\hat{x}_{i,k}) + K_i(y_{i,k} - C_i \hat{x}_{i,k}). \quad \text{式(7)}$$

设置 $K_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_i}$ 是可求的估计器增益,定义局部估计误差为 $e_{i,k} = x_k - \hat{x}_{i,k}$ 和 $f(e_{i,k}) = f(x_k) - f(\hat{x}_{i,k})$, 那么第 i 个节点的局部估计误差计算可得:

$$e_{i,k+1} = (A - K_i C_i)e_{i,k} + \zeta_k f(e_{i,k}) + B\omega_k - K_i D_i v_{i,k} \quad \text{式(8)}$$

定义 $\tilde{h}_{i,k} \triangleq \text{col}\{x_k, e_{i,k}\}$ 和 $\tilde{f}(\tilde{h}_{i,k}) \triangleq \text{col}\{f(x_k), f(e_{i,k})\}$, 那么第 i 个节点的局部估计误差系统可写为:

$$\begin{cases} \tilde{h}_{i,k+1} = A_{g_i} \tilde{h}_{i,k} + \zeta_k \tilde{f}(\tilde{h}_{i,k}) + B\omega_k - K_i D_i v_{i,k} \\ e_{i,k} = \Lambda_i \tilde{h}_{i,k} \end{cases} \quad \text{式(9)}$$

其中

$$\Lambda_i = [0 \quad I], A_{g_i} = \begin{bmatrix} A^T & (A - K_i C_i)^T \end{bmatrix}^T.$$

因此, 当把局部估计送到融合中心, 融合估计 \hat{x}_k 可得到:

$$\hat{x}_k = \sum_{i=0}^L \Omega_i(\rho_k) \hat{x}_{i,k} \quad \text{式(10)}$$

其中 $\Omega_i(\rho_k)$ 是用以下形式组成的加权调度序列

$$\Omega_i(\rho_k) = \rho_k \Omega_{iu} + (1 - \rho_k) \Omega_{iv} \quad \text{式(11)}$$

其中 Ω_{iu} 和 Ω_{iv} 是一定维数的常数矩阵, 且 ρ_k 是随时间变化的丢失概率, 可以过统计测试实时衡量。设置 $\sum_{i=0}^L \Omega_i(\rho_k) = I_n$, $\sum_{i=0}^L \Omega_{iu} = I_n$ 和 $\sum_{i=0}^L \Omega_{iv} = I_n$ ($i = 1, 2, \dots, L$), 加权调度的融合估计误差为 $e_{0,k} \triangleq x_k - \hat{x}_k$, 可得:

$$\begin{aligned} e_{0,k} &= x_k - \hat{x}_k \\ &= \sum_{i=0}^L \Omega_i(\rho_k) x_k - \sum_{i=0}^L \Omega_i(\rho_k) \hat{x}_k \\ &= \sum_{i=0}^L \Omega_i(\rho_k) e_{i,k} \\ &= \sum_{i=0}^L [\rho_k \Omega_{iu} + (1 - \rho_k) \Omega_{iv}] e_{i,k} \end{aligned} \quad \text{式(12)}$$

定义 $\tilde{f}(\tilde{h}_{0,k}) \triangleq \text{col}\{f(e_{1,k}), f(e_{2,k}), \dots, f(e_{L,k})\}$ 和 $\tilde{h}_{0,k} \triangleq \text{col}\{e_{1,k}, e_{2,k}, \dots, e_{L,k}\}$ 。根据式(10)~式(12), 加权调度融合估计误差系统可写为:

$$\begin{cases} \tilde{h}_{0,k+1} = A_g \tilde{h}_{0,k} + \zeta_k \tilde{f}(\tilde{h}_{0,k}) + \bar{B}\omega_k + \bar{D}V_k \\ e_{0,k} = \Lambda_0(\rho_k) \tilde{h}_{0,k} \end{cases} \quad \text{式(13)}$$

其中

$$\begin{aligned} \bar{B} &= \text{col}\left\{ \underbrace{B, B, \dots, B}_L \right\} \\ \Lambda_0(\rho_k) &= \Lambda_1(\rho_k) + \Lambda_2(\rho_k) \\ \Lambda_1(\rho_k) &= [\Lambda_{1u}, \Lambda_{2u}, \dots, \Lambda_{Lu}] \\ \Lambda_2(\rho_k) &= [\Lambda_{1v}, \Lambda_{2v}, \dots, \Lambda_{Lv}] \\ \mathcal{D}_i &= K_i D_i, i = 1, 2, \dots, L \\ \Lambda_{iu} &= \rho_k \Omega_{iu}, i = 1, 2, \dots, L \\ \Psi_i &= A - K_i C_i, i = 1, 2, \dots, L \\ \Lambda_{iv} &= (1 - \rho_k) \Omega_{iv}, i = 1, 2, \dots, L \end{aligned}$$

$$A_g = \text{col} \left\{ \underbrace{\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_L}_L \right\}$$

$$V_k = \text{col} \left\{ \underbrace{v_{1,k}, v_{2,k}, \dots, v_{L,k}}_L \right\}$$

$$\bar{D} = \text{col} \left\{ \underbrace{D_1, D_2, \dots, D_L}_L \right\}$$

定义 1: 如果存在条件 $\kappa^o \in (0,1)$ 和 $\lambda > 0$ 使得下列不等式成立, 那么滤波融估计误差系统在均方意义下是稳定的。

$$\mathbb{E} \left\{ \|e_{i,k}\|^2 \right\} \leq z \lambda \kappa^o \left(\mathbb{E} \left\{ \|e_{i,0}\|^2 \right\} \right), o \in \Pi^+. \quad \text{式(14)}$$

本文的目的是为离散时间随机系统(12)设计一个满意的滤波器, 其中允许非线性、随机干扰和丢失测量。

3. 最终结果

在以下定理中, 利用凸优化方法和参数相关的 Lyapunov 函数用于处理离散随机系统(13)的加权调度融合估计问题。

定理 1: 考虑离散时间随机滤波融合估计误差系统(13), 如果存在正定矩阵序列 $R(\rho_k) > 0$, 且满足如下线性矩阵不等式:

$$\begin{bmatrix} -R(\rho_k) & * & * & * & * & * \\ 0 & -\rho_k \Lambda_k & * & * & * & * \\ Z_{1,k} & \rho_k S^T & -\Lambda_k & * & * & * \\ Z_{2,k} & 0 & Y_1 & -\Theta_k \Lambda_k & * & * \\ Z_{3,k} & 0 & 0 & 0 & -\sigma^2 \Lambda_k & * \\ 0 & 0 & S & 0 & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \quad \text{式(15)}$$

其中

$$Z_{1,k} = S^T \Lambda_0(\rho_k) [A_g + \rho_k \mathcal{F}_1]$$

$$Y_1 = \Theta_k \Lambda_1(\rho_k), \Theta_k = \rho_k (1 - \rho_k)$$

$$\Xi_4 = \Theta_k \Lambda_0(\rho_k), Z_{2,k} = \Theta_k S^T \Lambda_0(\rho_k) \mathcal{F}$$

$$Z_{3,k} = \sigma^2 S^T \Lambda_0(\rho_k) \bar{D}, \Lambda_k = -R(\rho_k + 1) + S + S^T$$

那么加权调度的融合误差系统是均方稳定的。

证明: 为了验证每个估计误差动态(9)和融合误差动态(13)是渐近均方稳定的。构造以下 Lyapunov 函数

$$V_{1,k} = e_{0,k}^T R(\rho_k) e_{0,k} \quad \text{式(16)}$$

计算 $V_{1,k}$ 的差分并对其取数学期望, 可得:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \{ \Delta V_{1,k} \} &= \mathbb{E} \left\{ e_{0,k+1}^T R(\rho_{(k+1)}) e_{0,k+1} - e_{0,k}^T R(\rho_k) e_{0,k} \right\} \\ &= \mathbb{E} \left\{ \left[A_g h_{0,k} + \zeta_k \tilde{f}(h_{0,k}) + \bar{B} w_k + \bar{D} v_k \right]^T \Lambda_0(\rho_k)^T R(\rho_{(k+1)}) \Lambda_0(\rho_k) \right. \\ &\quad \left. \times \left[A_g h_{0,k} + \zeta_k \tilde{f}(h_{0,k}) + \bar{B} w_k + \bar{D} v_k \right] - h_{0,k}^T \Lambda_0(\rho_k)^T R(\rho_k) \Lambda_0(\rho_k) h_{0,k} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \mathbb{E} \left\{ \left[A_g h_{0,k} + \rho_k \tilde{f}(h_{0,k}) + (\zeta_k - \rho_k) \tilde{f}(h_{0,k}) + \bar{B}w_k + \bar{D}v_k \right]^T \Lambda_0(\rho_k)^T \right. \\
 &\quad \times R(\rho_{(k+1)}) \Lambda_0(\rho_k) \left[A_g h_{0,k} + \rho_k \tilde{f}(h_{0,k}) + (\zeta_k - \rho_k) \tilde{f}(h_{0,k}) + \bar{B}w_k + \bar{D}v_k \right] \\
 &\quad \left. - h_{0,k}^T \Lambda_0(\rho_k)^T R(\rho_k) \Lambda_0(\rho_k) h_{0,k} \right\} \\
 &= \mathbb{E} \left\{ \left[A_g h_{0,k} + \rho_k \tilde{f}(h_{0,k}) + \bar{B}w_k + \bar{D}v_k \right]^T \Lambda_0(\rho_k)^T R(\rho_{(k+1)}) \Lambda_0(\rho_k) \right. \\
 &\quad \times \left[A_g h_{0,k} + \rho_k \tilde{f}(h_{0,k}) + \bar{B}w_k + \bar{D}v_k \right] - h_{0,k}^T \Lambda_0(\rho_k)^T R(\rho_k) \Lambda_0(\rho_k) h_{0,k} \\
 &\quad \left. + \rho_k (1 - \rho_k) \tilde{f}(h_{0,k})^T \times \Lambda_0(\rho_k)^T R(\rho_{(k+1)}) \Lambda_0(\rho_k) \tilde{f}(h_{0,k}) \right\} \\
 &= \mathbb{E} \left\{ \left[A_g h_{0,k} + \rho_k \tilde{f}(h_{0,k}) + \bar{D}v_k \right]^T \Lambda_0(\rho_k)^T R(\rho_{(k+1)}) \Lambda_0(\rho_k) \right. \\
 &\quad \times \left[A_g h_{0,k} + \rho_k \tilde{f}(h_{0,k}) + \bar{D}v_k \right] - h_{0,k}^T \Lambda_0(\rho_k)^T R(\rho_k) \Lambda_0(\rho_k) h_{0,k} \\
 &\quad \left. + \rho_k (1 - \rho_k) \tilde{f}(h_{0,k})^T \Lambda_0(\rho_k)^T R(\rho_{(k+1)}) \Lambda_0(\rho_k) \tilde{f}(h_{0,k}) \right. \\
 &\quad \left. + \sigma^2 \bar{D}^T \Lambda_0(\rho_k)^T \times R(\rho_{(k+1)}) \Lambda_0(\rho_k) \bar{D} \right\}
 \end{aligned}$$

根据式(5)和式(6), 且有 $v_k \equiv 0$, 上述不等式可以写为:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} \{ \Delta V_{1,k} \} &\leq \mathbb{E} \left\{ \left[(A_g + \rho_k \mathcal{F}_1) h_{0,k} + \rho_k \tilde{f}_s(h_{0,k}) \right]^T \Lambda_0(\rho_k)^T R(\rho_{(k+1)}) \Lambda_0(\rho_k) \right. \\
 &\quad \times \left[(A_g + \rho_k \mathcal{F}_1) h_{0,k} + \rho_k \tilde{f}_s(h_{0,k}) \right] - h_{0,k}^T R(\rho_k) h_{0,k} + \rho_k (1 - \rho_k) \\
 &\quad \times \left[\mathcal{F}_1 h_{0,k} + f_s(h_{0,k}) \right]^T \Lambda_0(\rho_k)^T R(\rho_{(k+1)}) \Lambda_0(\rho_k) \left[\mathcal{F}_1 h_{0,k} + f_s(h_{0,k}) \right] \\
 &\quad \left. + \sigma^2 \bar{D}^T \Lambda_0(\rho_k)^T R(\rho_{(k+1)}) \Lambda_0(\rho_k) \bar{D} \right\} \\
 &= \mathbb{E} \{ \bar{x}_k^T Q \bar{x}_k \}
 \end{aligned}$$

其中 $\bar{x}_k = \left[h_{0,k} \tilde{f}_s(h_{0,k}) \right]^T$, 并且有:

$$Q = \begin{bmatrix} Q_1 & * \\ Q_2 & Q_3 \end{bmatrix}$$

其中

$$\begin{aligned}
 Q_1 &= (A_g + \rho_k \tilde{F}_1)^T \Lambda_0^T R(\rho_{(k+1)}) \Lambda_0(\rho_k) (A_g + \rho_k \tilde{F}_1) - R(\rho_k) \\
 &\quad + \rho_k (1 - \rho_k) \mathcal{F}_1^T \Lambda_0(\rho_k)^T R(\rho_{(k+1)}) \Lambda_0(\rho_k) \mathcal{F}_1 + \sigma^2 \bar{D}^T \Lambda_0(\rho_k)^T R(\rho_{(k+1)}) \Lambda_0(\rho_k) \bar{D} \\
 Q_2 &= \rho_k \Lambda_0(\rho_k)^T R(\rho_{(k+1)}) \Lambda_0(\rho_k) (A_g + \rho_k \mathcal{F}_1) + \rho_k (1 - \rho_k) \Lambda_0(\rho_k)^T R(\rho_{(k+1)}) \Lambda_0(\rho_k) \mathcal{F}_1 \\
 Q_3 &= \rho_k \Lambda_0(\rho_k)^T R(\rho_{(k+1)}) \Lambda_0(\rho_k)
 \end{aligned}$$

由 Schur 引理可得:

$$Q = \begin{bmatrix} -R(\rho_k) & * & * & * & * \\ 0 & -\rho_k \Lambda_k & * & * & * \\ Z_{1,k} & \rho_k S^T & -\Lambda_k & * & * \\ Z_{2,k} & 0 & \Xi_4 & -\Theta_k \Lambda_k & * \\ Z_{3,k} & 0 & 0 & 0 & -\sigma^2 \Lambda_k \end{bmatrix}. \tag{17}$$

且有式(17)与下式相等

$$\begin{bmatrix} 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & \Theta_k \Lambda_2(\rho_k) & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -R(\rho_k) & * & * & * & * \\ 0 & -\rho_k \Lambda_k & * & * & * \\ Z_{1,k} & \rho_k S^T & -\Lambda_k & * & * \\ Z_{2,k} & 0 & Y_1 & -\Theta_k \Lambda_k & * \\ Z_{3,k} & 0 & 0 & 0 & -\sigma^2 \Lambda_k \end{bmatrix} < 0. \quad \text{式(18)}$$

我们将显示 $Q < 0$, 很容易得到 $-R(\rho_{k+1}) + S + S^T > 0$, (12)通过左乘对角阵 $\text{diag}\{I, I, S^{-1}, S^{-1}, \sigma^{-2} S^{-1}\}$, 我们可得

$$\begin{bmatrix} -R(\rho_k) & * & * & * & * \\ 0 & \Xi_2 & * & * & * \\ \Xi_0 & \rho_k I & -\bar{\Lambda}_k & * & * \\ \Xi_1 & 0 & \Xi_4 & -\bar{\Theta}_k \bar{\Lambda}_k & * \\ \Xi_3 & 0 & 0 & 0 & -\bar{\sigma} \bar{\Lambda}_k \end{bmatrix} < 0.$$

其中

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} &= \sigma^{-2}, \bar{\Theta}_k = \Theta_k^{-1} \\ \Xi_0 &= \Lambda_0(\rho_k) [A_g + \rho_k \mathcal{F}_1] \\ \Xi_1 &= \Lambda_0(\rho_k) \mathcal{F}_1, \Xi_2 = \rho_k^2 R(\rho_{k+1}) \\ \Xi_3 &= \sigma^2 \Lambda_0(\rho_k) \bar{D}, \Xi_4 = \Theta_k \Lambda_0(\rho_k) \\ \bar{\Lambda}_k &= -S^{-T} \Lambda_0(\rho_k)^T P \Lambda_0(\rho_k) S^{-1} + S^{-1} + S^{-T} \end{aligned}$$

然后根据不等式 $S^{-T} R(\rho_{k+1}) S^{-1} - S^{-1} - S^{-T} \geq -R(\rho_{k+1})^{-1}$ 可得:

$$\begin{bmatrix} -R(\rho_k) & * & * & * & * \\ 0 & \Xi_2 & * & * & * \\ \bar{Z}_{1,k} & \rho_k I & -\tilde{\Lambda}_k & * & * \\ \Xi_1 & 0 & \Xi_4 & -\bar{\Theta}_k \tilde{\Lambda}_k & * \\ \Xi_3 & 0 & 0 & 0 & -\bar{\sigma} \tilde{\Lambda}_k \end{bmatrix} < 0 \quad \text{式(19)}$$

其中 $\tilde{\Lambda}_k = R(\rho_{k+1})^{-1}$, 再根据 Schur 引理很容易得到 $Q < 0$,

$$\mathbb{E}\{\Delta V_{1,k}\} < -\lambda_{\min}(Q) \mathbb{E}|\bar{x}_k|^2 \quad \text{式(20)}$$

其中 $|\cdot|$ 是向量范数且 $\lambda_{\min}(Q)$ 是 Q 的特征值。根据引理 1, 加权融合误差系统是均方稳定的。证毕。

注 2: 在定理 1 中, 为了增强设计滤波器的性能, 提出了一个时空 Lyapunov 函数, 该函数取决于未命中概率。值得注意的是, 在过去的几年中, 为了减少保守性, 依赖于参数的 Lyapunov 函数已被广泛用于处理时变和不确定的参数系统。

定理 2: 考虑融合估计误差系统(13), 如果存在正定矩阵 $R_0 > 0, R_p > 0, \Gamma_0 > 0$ 和 $\Gamma_p > 0$, 松弛矩阵 S 以及下列线性矩阵不等式成立:

$$G^{ijl} = \begin{bmatrix} \mathcal{R}^{ijl} & * & * & * & * & * \\ 0 & \Theta_{1,k}^{ijl} & * & * & * & * \\ Z_{1,k}^{ijl} & -p_i S^T & -\Lambda_k^{ijl} & * & * & * \\ Z_{2,k}^{ijl} & 0 & \Theta_{2,k}^{ijl} & \Theta_{3,k}^{ijl} & * & * \\ Z_{3,k}^{ijl} & 0 & 0 & 0 & \Theta_{2,k}^{ijl} & * \\ 0 & 0 & S & 0 & 0 & I \end{bmatrix} < 0 \tag{21}$$

其中 i, j 和 $l=1,2$, 局部估计器增益 $K_i = \mathcal{D}_i D_i^{-1}$ 和加权调度矩阵为 $\Omega_{iv} = (1 - \rho_i)^{-1} \Lambda_{iv}$, $\Omega_{iu} = \rho_i^{-1} \Lambda_{iu}$ ($i=1,2,\dots,L$), 其中:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^{ijl} &= -R_0 - p_i R_p \\ \Theta_k \Lambda_2(\rho_k) &= S^2, \Theta_{1,k}^{ijl} = -p_i \Lambda_k^{ijl} \\ \Theta_{2,k}^{ijl} &= \Delta^{ijl} \Lambda_0^{ijl}, \Theta_{3,k}^{ijl} = -\Delta^{ijl} \Lambda_k^{ijl} \\ \Theta_{4,k}^{ijl} &= -\sigma^2 \Lambda_k^{ijl}, \Delta^{ijl} = p_i (1 - p_j) \\ \Lambda_k^{ijl} &= R_0 + p_i R_p + S + S^T \\ Z_{1,k}^{ijl} &= S^T (\Gamma_0 + p_i \Gamma_p) (A_g + p_i \mathcal{F}_1) \\ Z_{2,k}^{ijl} &= \Delta^{ijl} S^T (\Gamma_0 + p_i \Gamma_p) \mathcal{F} \\ Z_{3,k}^{ijl} &= \sigma^2 S^T (\Gamma_0 + p_i \Gamma_p) \bar{D} \end{aligned}$$

然后, 可以获取加权调度滤波器以确保融合估计误差系统均方稳定

证明: 首先设置

$$\lambda_{1,k} = \frac{\rho_2 - \rho_k}{\rho_2 - \rho_1}, \lambda_{2,k} = \frac{\rho_k - \rho_1}{\rho_2 - \rho_1}. \tag{22}$$

我们有

$$\rho_k = \lambda_{1,k} \rho_1 + \lambda_{2,k} \rho_2 \tag{23}$$

其中 $\lambda_{i,k} \geq 0$ 和 $\lambda_{1,k} + \lambda_{2,k} = 1$ 。

同样, 定义

$$\mu_{1,k} = \frac{\rho_2 - \rho_{(k+1)}}{\rho_2 - \rho_1}, \mu_{2,k} = \frac{\rho_{(k+1)} - \rho_1}{\rho_2 - \rho_1}. \tag{24}$$

很容易得到下列不等式

$$\rho_{(k+1)} = \mu_{1,k} \rho_1 + \mu_{2,k} \rho_2 \tag{25}$$

其中 $\mu_{i,k} \geq 0, \mu_{1,k} + \mu_{2,k} = 1$ 。

通过前面定义的转换, 可以轻松推断出

$$\begin{cases} R(\rho_k) = R_0 + \sum_{i=1}^2 \Omega_i \lambda_{i,k} p_i R_p \\ \Lambda_0(\rho_k) = \Gamma_0 + \sum_{j=1}^2 \Omega_j \mu_{j,k} p_j \Gamma_p \\ R(\rho_{(k+1)}) = R_0 + \sum_{l=1}^2 \Omega_l \mu_{l,k} p_l R_p \end{cases}$$

另外一方面, 根据式(22), 可得:

$$\sum_{i,j,l=1}^2 \alpha_{i,k} \beta_{j,k} \beta_{l,k} G^{ijl} < 0 \quad \text{式(26)}$$

根据式(22)~(25)，可推断出不等式(15)是成立的，根据定理 1 和 2，融合估计算法如表 1 所示：

Table 1. The fusion estimation $\hat{x}(t)$ algorithm

表 1. 融合估计 $\hat{x}(t)$ 的算法程序

算法 1: 融合估计 $\hat{x}(t)$ 的算法

- 1) 初始条件: $\{N, A, B, C_1, C_2, D_1, D_2, \tilde{F}_1, \tilde{F}_2, \rho_1, \rho_2\}$ 和初始状态 ρ ;
- 2) 根据式(20)计算获得正定矩阵 $R_0, R_p, \Gamma_0, \Gamma_p$;
- 3) 通过测量时变概率 ρ_k 求得每个传感器的估计器增益 K_k ，且使得 $k = k + 1$;
- 4) 通过 3 的求值代入式(21)来计算加权调度矩阵 $\Omega_m(\rho_k)$ 和 $\Omega_n(\rho_k)$;
- 5) 求解状态加权融合估计 $\hat{x}(t)$;
- 6) 如果 $k < N$ ，则跳到 3，否则到 7;
- 7) 停止。

4. 数值仿真实例

在本章节中，通过一个数值示例来验证所提出方法的有效性。针对具有随机发生的非线性的离散时间随机系统设计加权调度估计器。取目标系统的参数分别为：

$$A = \begin{bmatrix} 0.45 & 0.3 \\ 0 & 0.84 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.12 & 0 \\ 0 & 0.52 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{bmatrix}, C_2 = \begin{bmatrix} 0.12 & 0 \\ 0 & 0.52 \end{bmatrix}$$

$$D_1 = \begin{bmatrix} 0.16 & 0 \\ 0.34 & 0.26 \end{bmatrix}, D_2 = \begin{bmatrix} 0.42 & 0 \\ 0 & 0.52 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{F}_1 = \begin{bmatrix} 0.27 & 0 \\ 0 & 0.44 \end{bmatrix}, \mathcal{F}_2 = \begin{bmatrix} 2.46 & 0 \\ 0 & 3.17 \end{bmatrix}$$

$$p_1 = 0.36, p_2 = 0.93, \sigma^2 = 1.$$

设置时变的伯努利分布序列为 $\rho_k = p_1 + (p_1 - p_2)|\sin(k)|$ ，和扇形非线性函数 $f(b)$ 为：

$$f(b) = \frac{\psi_1 + \psi_2}{2} b + \frac{\psi_1 - \psi_2}{2} \sin(b)$$

满足等式(4.5)，且设置初始值为 $\rho = [2 \quad -2]^T$ ，根据算法 1，局部估计器增益 K_1, K_2 ，加权调度矩阵 $\Omega_{1v}, \Omega_{2v}, \Omega_{1u}, \Omega_{2u}, \Gamma_0, \Gamma_p, R_0$ 和 R_p 可获得如下：

$$K_1 = \begin{bmatrix} 0.1435 & 0.2368 \\ 0.1789 & 0.4325 \end{bmatrix}, K_2 = \begin{bmatrix} 0.3276 & 0.3698 \\ 0.8302 & 0.0117 \end{bmatrix}$$

$$R_0 = \begin{bmatrix} 0.6853 & 0.3537 \\ 0.4238 & 0.5498 \end{bmatrix}, R_p = \begin{bmatrix} 0.8264 & 0.4613 \\ 0.5631 & 0.8146 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma_0 = \begin{bmatrix} 0.7951 & 0.9230 \\ 0.8423 & 0.0146 \end{bmatrix}, \Gamma_p = \begin{bmatrix} 0.6027 & 0.7639 \\ 0.8647 & 0.1459 \end{bmatrix}$$

$$\Omega_{1u} = \begin{bmatrix} 0.2435 & 0 \\ 0 & 0.4325 \end{bmatrix}, \Omega_{1v} = \begin{bmatrix} 0.3864 & 0 \\ 0 & 0.6853 \end{bmatrix}$$

$$\Omega_{2u} = \begin{bmatrix} 0.7565 & 0 \\ 0 & 0.5675 \end{bmatrix}, \Omega_{2v} = \begin{bmatrix} 0.6136 & 0 \\ 0 & 0.3147 \end{bmatrix}$$

图 2 绘制了每个节点接收状态的响应曲线。局部估计状态和融合估计状态如图 3 所示，这显示了提出的融合估计方法的重要性。时变概率参数由图 4 提供。

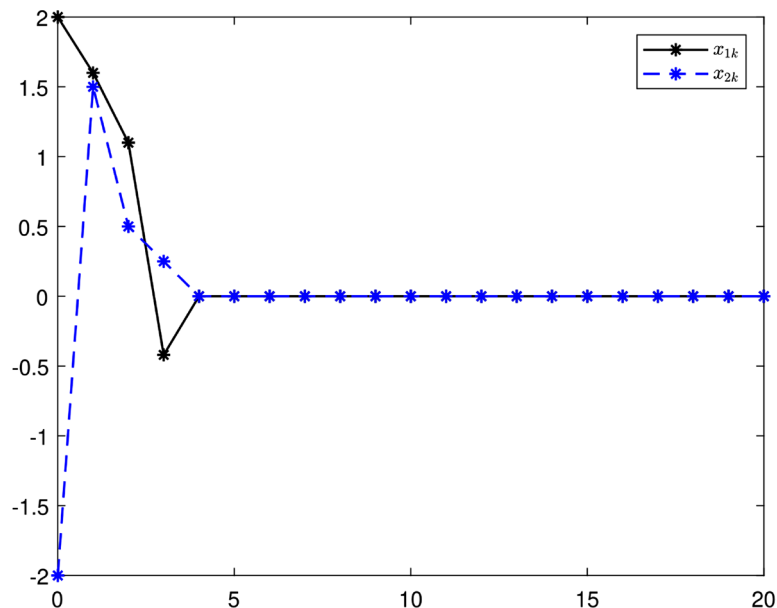


Figure 2. Response curve of each node receiving state
图 2. 每个节点接收状态的响应曲线

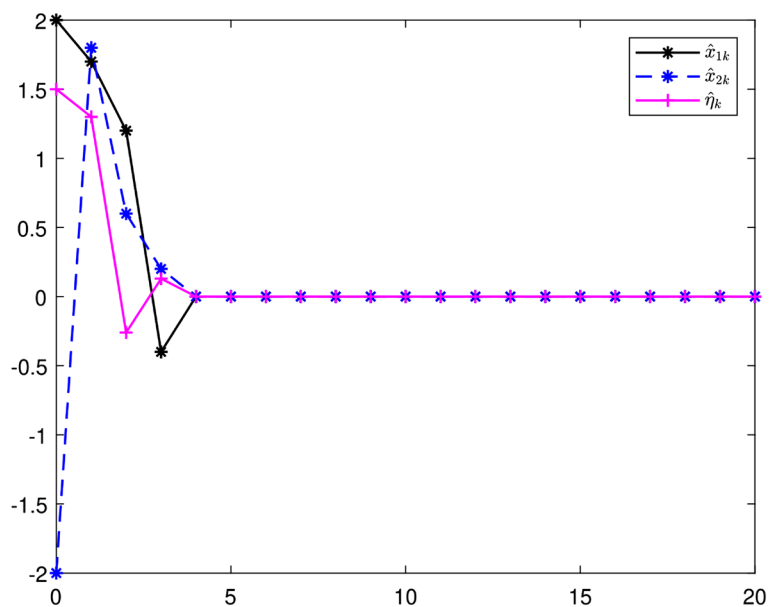


Figure 3. Receiving state estimation and weighted fusion state estimation for each node
图 3. 每个节点接收状态估计和加权融合状态估计

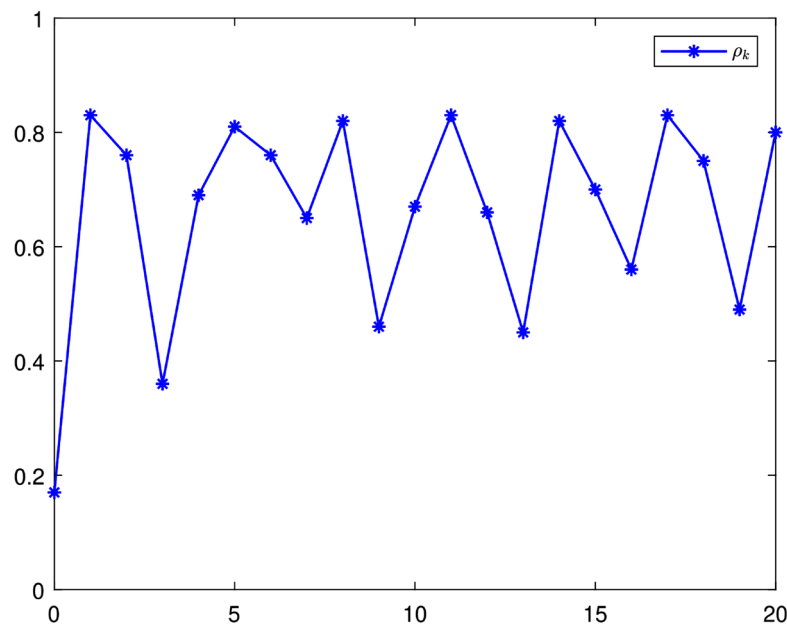


Figure 4. Time-varying probability parameter

图 4. 时变的概率参数

5. 总结

本文研究了随机出现在传感器网络上的非线性问题的离散时间随机系统的概率依赖加权调度滤波问题。假定测量丢失现象是随机发生的，并且每个传感器的丢失概率已由遵循一定概率分布的单个随机变量管理，该概率分布在 $[0, 1]$ 区间内[9]。数值示例验证了上述设计程序的有效性。将来，我们还将考虑非线性随机系统的相关控制设计问题。

参考文献

- [1] Gao, L., Battistelli, G., Chisci, L., *et al.* (2019) Distributed Joint Sensor Registration and Target Tracking via Sensor Network. *Information Fusion*, **46**, 218-230. <https://doi.org/10.1016/j.inffus.2018.05.003>
- [2] Ma, L., Wang, Z., Liu, Y., *et al.* (2019) Distributed Filtering for Nonlinear Time-Delay Systems over Sensor Networks Subject to Multiplicative Link Noises and Switching Topology. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, **29**, 2941-2959. <https://doi.org/10.1002/rnc.4535>
- [3] Zhang, W.-A., Yu, L. and Feng, G. (2011) Optimal Linear Estimation for Networked Systems with Communication Constraints. *Automatica*, **47**, 1992-2000. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2011.05.020>
- [4] Ribeiro, A. and Giannakis, G.B. (2006) Bandwidth-Constrained Distributed Estimation for Wireless Sensor Networks—Part I: Gaussian Case. *IEEE Transactions on Signal Processing*, **54**, 1131-1143. <https://doi.org/10.1109/TSP.2005.863009>
- [5] Ding, D., Han, Q.-L., Wang, Z., *et al.* (2019) A Survey on Model-Based Distributed Control and Filtering for Industrial Cyber-Physical Systems. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, **15**, 2483-2499. <https://doi.org/10.1109/TII.2019.2905295>
- [6] Ding, D., Wang, Z., Dong, H., *et al.* (2012) Distributed H_∞ State Estimation with Stochastic Parameters and Nonlinearities through Sensor Networks: The Finite-Horizon Case. *Automatica*, **48**, 1575-1585. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2012.05.070>
- [7] Geng, H., Wang, Z. and Cheng, Y. (2018) Distributed Federated Tobit Kalman Filter Fusion over a Packet-Delaying Network: A Probabilistic Perspective. *IEEE Transactions on Signal Processing*, **66**, 4477-4489. <https://doi.org/10.1109/TSP.2018.2853098>
- [8] Cheng, T.M., Malyavej, V. and Savkin, A.V. (2010) Decentralized Robust Set-Valued State Estimation in Networked Multiple Sensor Systems. *Computers and Mathematics with Applications*, **59**, 2636-2646.

<https://doi.org/10.1016/j.camwa.2010.01.032>

- [9] Zhang, W., Wang, Z., Liu, Y., *et al.* (2018) Sampled-Data Consensus of Nonlinear Multi-Agent Systems Subject to Cyber Attacks. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, **28**, 53-67. <https://doi.org/10.1002/rnc.3855>