

# 体积元几何与Jacobi行列式之关系

朱欣欣

浙江师范大学, 数学与计算机科学学院, 数学系, 浙江 金华  
Email: 1183329705@qq.com

收稿日期: 2021年3月27日; 录用日期: 2021年4月15日; 发布日期: 2021年4月29日

---

## 摘要

在数学分析的学习中我们已经学习了弧长、面积、体积的求解方法, 那这些方法是怎样得到的, 是我们学习过程中需要探讨的一个非常重要的问题。为了方便我们在学习过程中对这一部分内容的理解、掌握, 本文将从坐标变换、向量外积、向量内积三个不同的方面来介绍体积元与Jacobi行列式的关系。

## 关键词

弧长微元, 面积微元, 体积微元, 坐标变换, 外积, 内积

---

# The Relationship between Volume Element Geometry Related and Jacobi Determinant

Xinxin Zhu

Department of Mathematics, School of Mathematics and Computer Science, Zhejiang Normal University,  
Jinhua Zhejiang  
Email: 1183329705@qq.com

Received: Mar. 27<sup>th</sup>, 2021; accepted: Apr. 15<sup>th</sup>, 2021; published: Apr. 29<sup>th</sup>, 2021

---

## Abstract

In the study of mathematical analysis, we have learned the solving methods of arc length, area and volume, and how to use these methods to find physical quantities such as the mass of an object and the moment of inertia, which is a very important part in our learning process. In order to ensure that we have a better understanding of the content in the learning process, this thesis will introduce the relationship between volume elements and Jacobi rows from three different aspects of coordinate transformation, vector exterior product and vector inner product.

## Keywords

Arc Length Micro-Element, Area Micro-Element, Volume Micro-Element, Coordinate Transformation, Exterior Product, Inner Product

Copyright © 2021 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

数学分析是数学及其它专业中一门基础课程，也是非常重要的一门学科，其内容也广泛地应用到生活的各个领域，例如在求解一些不规则物体的体积、质量、转动惯量等物理量时，我们就可以用到“分割、近似求和、取极限”这种方法，通过在求解的过程中选取一个合适的坐标系使积分区间变简单，或者被积的函数从而使积分的求解变得简单，以达到计算时事半功倍的效果，让求解过程变得容易，那么如何选取一个合适的坐标系对我们来是非常重要的。

现有的各种数学分析教材基本上都是从一方面来描述体积元几何与 Jacobi 行列式的关系，无法使我们通过对比更好地对这部分内容理解，为解决这一问题，本文将从坐标变换、向量外积、向量内积三个不同的方面对这部分内容进行叙述。

文中第一部分介绍的是标准《数学分析》[1]教材中关于弧长微元、面积微元、体积微元的处理，通过对书本上的内容进行归纳、整理使内容更加有条理性，有利于读者对内容的掌握，而且文中关于二重积分的变量变换与面积微元的内容是根据耿堤、易法槐[2]《数学分析(三)》来阐述，这本书利用我们比较熟悉的解析几何和 Taylor 公式的知识对定理进行证明，更有利于我们的理解。

第二部分内容参考欧阳阳光中、姚允龙[3]《数学分析》下册内容，利用我们从解析几何中已知的知识，首先介绍了外积的定义和性质，为我们对即将学习的内容做准备，然后对外积所表示的几何意义进行阐述，采用直观的描述方法将外积应用到积分变换中，从而得出体积元几何与 Jacobi 行列式的关系。由于这部分内容的直观性，积分的变量代换并未采取证明。

第三部分根据吕林根、许子道[4]《解析几何》中关于向量内积、外积定义，利用三角函数公式将它们联系起来，推出度量矩阵，然后通过向量内积和矩阵得出积分变换下体积元几何与 Jacobi 行列式新的表示形式。另外这部分内容关于面积微元的变换，利用外积和内积相结合的形式，更有利于我们的理解。

## 2. 弧长、面积、体积元的表示与 Jacobi 行列式

为了能让读者更快的进入到这篇论文的内容，本节以标准《数学分析》教材为准对弧长微元、面积微元、体积微元相关内容进行讲解，具体的一些知识可参考教材[1] [2] [5]。

### 2.1. 平面曲线的弧长

定义 2.1.1 设曲线  $C$  是一条没有自交点的非闭的平面曲线，由参数方程

$$x = x(t), y = y(t), t \in [\alpha, \beta] \quad (1)$$

给出若  $x(t)$ ,  $y(t)$  在  $[\alpha, \beta]$  上连续可微，则  $C$  是可求弧长的。

定义 2.1.2 设曲线  $C$  由参数方程(1)给出的。若  $x(t)$ ,  $y(t)$  在  $[\alpha, \beta]$  上连续可微, 且  $x'(t)$  和  $y'(t)$  不同时为零(即  $x'^2(t) + y'^2(t) \neq 0$ ,  $t \in [\alpha, \beta]$ ), 则称  $C$  是一条光滑曲线。

定义 2.1.3 设光滑曲线  $C$  由参数方程(1)给出。见图 1,  $PR$  为曲线在点  $P$  处的切线, 在三角形  $PQR$  中,  $PQ$  为  $dx$ ,  $QR$  为  $dy$ ,  $PR$  则称为弧微分, 记为  $ds$ 。见图 1 中三角形  $PQR$  称为微分三角形。

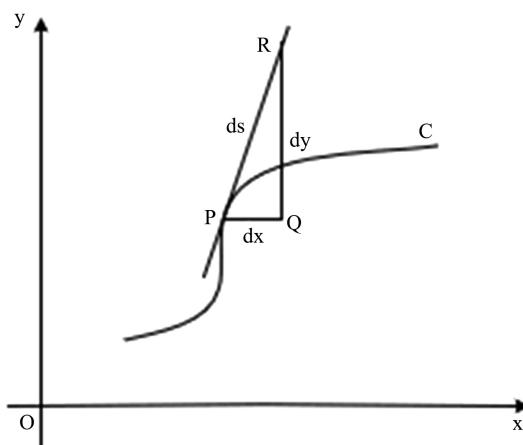


Figure 1. Differential triangle  
图 1. 微分三角形

在直角三角形中  $PQR$  由勾股定理得:  $ds = dx^2 + dy^2$ , 又  $dx = x'(t)dt$ ,  $dy = y'(t)dt$ , 所以有弧微分

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt \quad (2)$$

推论 1 设曲线  $C$  由极坐标方程

$$r = r(\theta), \theta \in [\alpha, \beta] \quad (3)$$

表示, 把它化为参数方程为

$$x = r(\theta)\cos\theta, y = r(\theta)\sin\theta, \theta \in [\alpha, \beta]$$

由于

$$x'(\theta) = r'(\theta)\cos\theta - r(\theta)\sin\theta,$$

$$y'(\theta) = r'(\theta)\sin\theta + r(\theta)\cos\theta,$$

$$x'^2(\theta) + y'^2(\theta) = r^2(\theta) + r'^2(\theta),$$

由(2)可知

$$ds = \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)}d\theta.$$

推论 2 设曲线  $C$  由直角坐标方程

$$y = f(x), x \in [a, b] \quad (4)$$

给出, 把它化为参数方程为

$$x = x, y = f(x), x \in [a, b].$$

由(2)可知

$$ds = \sqrt{1 + f'^2(x)} dx.$$

定理 1 设曲线  $C$  由参数方程(1)给出, 若  $C$  是一条光滑曲线, 则  $C$  是可求取弧长的, 且弧长为

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt.$$

推论 1 若曲线  $C$  由极坐标方程(3)给出, 当  $r'(\theta)$  在  $[\alpha, \beta]$  上连续, 且  $r(\theta)$  和  $r'(\theta)$  不同时为零, 此极坐标曲线为一条光滑曲线, 此时弧长为

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)} d\theta.$$

推论 2 若曲线  $C$  由直角坐标方程(4)表示, 当  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续可微时, 此曲线是一条光滑曲线, 此时弧长为

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx.$$

## 2.2. 第一型曲线积分

定理 2 设光滑曲线

$$L: \begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta],$$

函数  $f(x, y)$  为定义在  $L$  上的连续函数, 则

$$\int_L f(x, y) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt. \quad (5)$$

推论 1 当曲线  $L$  由方程

$$y = \psi(x), \quad x \in [a, b]$$

表示, 且  $\psi(x)$  在  $[a, b]$  上有连续的导函数时, (5)式成为

$$\int_L f(x, y) ds = \int_a^b f(x, \psi(x)) \sqrt{\varphi'^2(x) + \psi'^2(x)} dx.$$

推论 2 当空间曲线  $L$  是一条光滑的曲线, 由参数方程  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$ ,  $z = \chi(t)$ ,  $t \in [\alpha, \beta]$  表示时,  $f(x, y, z)$  是  $L$  上的连续函数, 则弧微分为

$$ds = \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \chi'^2(t)} dt$$

其弧长为

$$\int_L f(x, y, z) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)) \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \chi'^2(t)} dt.$$

## 2.3. 二重积分的变量变换与面积微元

引理 设变换  $T: x = x(u, v)$ ,  $y = y(u, v)$  将  $uv$  平面上按段光滑的封闭的曲线所围成的闭区域  $\Delta$  一对一的映射成  $xy$  平面上的闭区域  $D$ , 函数  $x(u, v)$ ,  $y(u, v)$  在  $\Delta$  内分别具有一阶连续偏导数且它们的函数行列式

$$J(u, v) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0, \quad (u, v) \in \Delta,$$

则  $\Delta$  和  $xy$  平面上的对应区域  $D$  之间的微元面积伸缩系数为  $|J(u, v)|$ ，即

$$dx dy = |J(u, v)| du dv.$$

证明 在  $\Delta$  上任取一个点  $A(u, v)$ ，以  $A$  为其中一个定点作一个矩形  $ABCD$ 。它的 4 个顶点坐标分别为  $A(u, v)$ ， $B(u + du, v)$ ， $C(u + du, v + dv)$ ， $D(u, v + dv)$ 。在变换  $x = x(u, v)$ ， $y = y(u, v)$  下， $\Delta$  上矩形  $ABCD$  相应的会得到  $xy$  平面上一个曲边四边形，那  $A'B'C'D'$  么它的四个顶点分别为  $A'(x_1, y_1)$ ， $B'(x_2, y_2)$ ， $C'(x_3, y_3)$ ， $D'(x_4, y_4)$  (见图 2)。

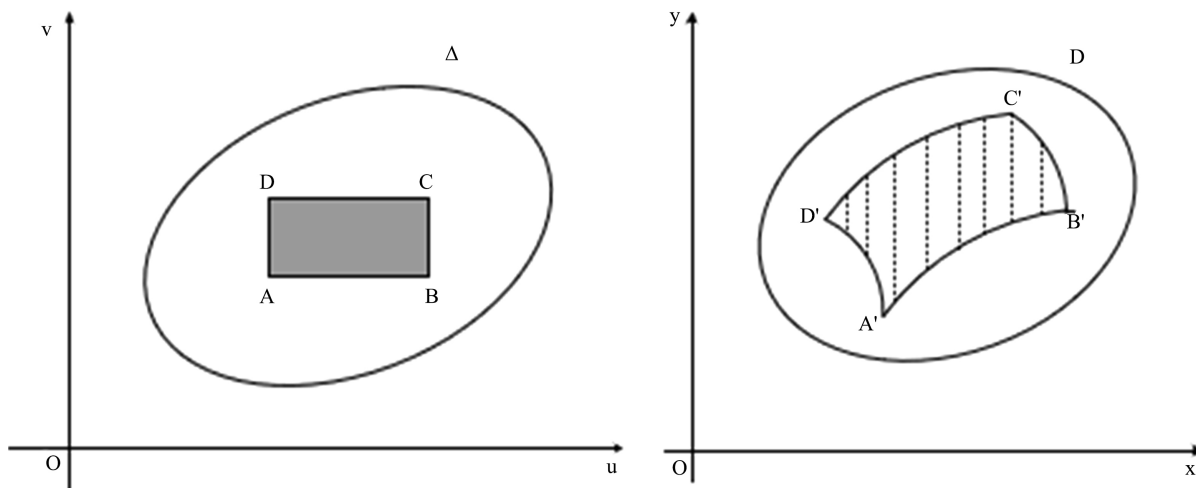


Figure 2. Area micro-element transformation

图 2. 面积微元的变换

我们可以利用 Taylor 公式得到

$$A' : x_1 = x(u, v), \quad y_1 = y(u, v);$$

$$B' : x_2 = x(u + du, v) = x(u, v) + \frac{\partial x(u, v)}{\partial u} du + o(du),$$

$$y_2 = y(u + du, v) = y(u, v) + \frac{\partial y(u, v)}{\partial u} du + o(du);$$

$$C' : x_3 = x(u + du, v + dv) = x(u, v) + \frac{\partial x(u, v)}{\partial u} du + \frac{\partial x(u, v)}{\partial v} dv + o(du) + o(dv),$$

$$y_3 = y(u + du, v + dv) = y(u, v) + \frac{\partial y(u, v)}{\partial u} du + \frac{\partial y(u, v)}{\partial v} dv + o(du) + o(dv);$$

$$D' : x_4 = x(u, v + dv) = x(u, v) + \frac{\partial x(u, v)}{\partial v} dv + o(dv),$$

$$y_4 = y(u, v + dv) = y(u, v) + \frac{\partial y(u, v)}{\partial v} dv + o(dv);$$

若想计算矩形  $A'B'C'D'$  的面积，可将  $A'B'$ ， $B'C'$ ， $C'D'$ ， $D'A'$  用直线连接起来作成一个四边形  $A'B'C'D'$ 。当我们所取的  $dx$  和  $dy$  足够小时，在计算时就可以忽略高阶无穷小量，此时曲边四边形的面积就可以等于四边形  $A'B'C'D'$  的面积。

由  $x_i, y_i (i = 1, 2, 3, 4)$  的表达式，当计算假设是省略掉  $o(du)$  和  $o(dv)$ ，则

$$x_2 - x_1 = x_3 - x_4, \quad x_4 - x_1 = x_3 - x_2,$$

$$y_2 - y_1 = y_3 - y_4, \quad y_4 - y_1 = y_3 - y_2.$$

所以在四边形  $A'B'C'D'$  中, 两两对边的距离是相等的, 所以当忽略高阶无穷小量时, 曲边四边形相当于一个平行四边形(见图 3)。

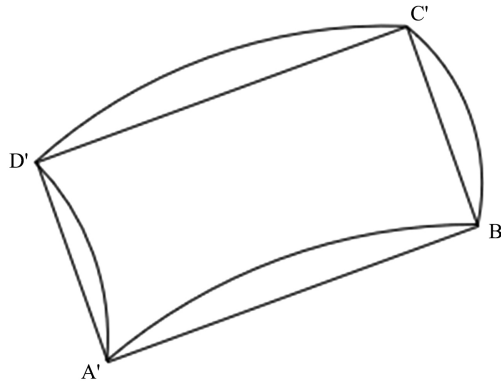


Figure 3. Curved quadrilateral  
图 3. 曲边四边形

它的面积  $d\Sigma$  是三角形  $A'B'C'$  面积的两倍, 利用所学解析几何知识, 则有

$$d\Sigma = \pm \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}, \quad \text{符号的选取使 } d\Sigma > 0,$$

将  $x_i, y_i (i=1,2,3)$  的表达式带入到  $d\Sigma$  并忽略高阶无穷小量得

$$\begin{aligned} d\Sigma &= \pm \begin{vmatrix} x(u,v) & y(u,v) & 1 \\ x(u,v) + \frac{\partial x}{\partial u} du & y(u,v) + \frac{\partial y}{\partial u} du & 1 \\ x(u,v) + \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv & y(u,v) + \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv & 1 \end{vmatrix} \\ &= \pm \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \frac{\partial x}{\partial u} du & \frac{\partial y}{\partial u} du & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial v} dv & \frac{\partial y}{\partial v} dv & 0 \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

因此  $dx dy = \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du dv$ , 即面积之比  $\frac{dx dy}{du dv} = \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| = |J(u,v)|$ , 所以  $\mu(D) = \iint_D dx dy = \iint_{\Delta} |J(u,v)| du dv$ 。

## 2.4. 二重积分的变量变换

定理 3 设在  $f(x,y)$  有界闭区域  $D$  上可积, 变换  $T: x = x(u,v), y = y(u,v)$  将  $uv$  平面上按段光滑的封闭的曲线所围成的闭区域  $\Delta$  一对一的映射成  $xy$  平面上的闭区域  $D$ , 函数  $x(u,v), y(u,v)$  在  $\Delta$  内分别具有一阶连续偏导数且它们的函数行列式

$$J(u, v) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0, (u, v) \in \Delta,$$

则有

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{\Delta} f(x(u, v), y(u, v)) |J(u, v)| du dv.$$

推论 1 当积分区域是圆域或者圆域的一部分, 或者是  $f(x^2 + y^2)$  时使用极坐标变换

$$T: x = r \cos \theta, y = r \sin \theta \quad 0 \leq r < +\infty, 0 \leq \theta < 2\pi$$

变换  $T$  的函数行列式为  $J(u, v) = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r$ , 由引理可知  $xy$  平面中二重积分的面积微元  $dx dy$  与  $r\theta$  平面中的面积微元  $dr d\theta$  之间的关系为  $dx dy = r dr d\theta$ , 则有

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{\Delta} f(r \cos \theta, r \sin \theta) |J(r, \theta)| dr d\theta.$$

推论 2 与极坐标相似, 当我们作广义极坐标变换

$$T: \begin{cases} x = ar \cos \theta, \\ y = br \sin \theta, \end{cases} \quad 0 \leq r < +\infty, 0 \leq \theta < 2\pi$$

此时变换  $T$  的函数行列式为  $J(u, v) = \begin{vmatrix} a \cos \theta & -ar \sin \theta \\ b \sin \theta & br \cos \theta \end{vmatrix} = abr$ , 同理有  $dx dy = abr dr d\theta$ , 则有

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{\Delta} f(ar \cos \theta, br \sin \theta) abr dr d\theta.$$

## 2.5. 三重积分的变量变换法(与二重积分类似)

定理 4 设  $f(x, y, z)$  是定义在三维空间可以求解体积的有界闭区域  $V$  上的函数, 在变换  $T: x = x(u, v, w), y = y(u, v, w), z = z(u, v, w)$  下将  $uvw$  空间的闭区域  $V'$  一对一的变换为  $xyz$  空间区域  $V$ , 且函数  $x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)$  在  $V'$  内有连续的偏导数, 变换  $T$  的函数行列式为

$$J(u, v, w) = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0, (u, v, w) \in V'$$

那么函数  $f(x, y, z)$  在  $xyz$  空间的体积微元  $dx dy dz$  与  $uvw$  空间体积微元  $du dv dw$  之间的关系为

$$dx dy dz = |J(u, v, w)| du dv dw$$

则有

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V'} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) |J(u, v, w)| du dv dw. \quad (6)$$

推论 1 在柱面坐标变换下有

$$T: \begin{cases} x = r \cos \theta, & 0 \leq r < +\infty, \\ y = r \sin \theta, & 0 \leq \theta \leq 2\pi, \\ z = z, & -\infty < z < +\infty. \end{cases}$$

所对应的函数行列式

$$J(r, \theta, z) = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r,$$

按照(6)式, 三重积分的柱面坐标变换公式为

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V'} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dr d\theta dz,$$

式中的  $f(x, y, z)$  可求体积,  $V'$  为  $V$  在柱面坐标变换下的原象。

推论 2 在球坐标变换下有

$$T: \begin{cases} x = r \cos \varphi \cos \theta, & 0 \leq r < +\infty, \\ y = r \cos \varphi \sin \theta, & 0 \leq \theta \leq 2\pi, \\ z = r \sin \varphi, & -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

所对应的函数行列式为

$$J(r, \varphi, \theta) = \begin{vmatrix} \cos \varphi \cos \theta & -r \sin \varphi \cos \theta & -r \cos \varphi \sin \theta \\ \cos \varphi \sin \theta & -r \sin \varphi \sin \theta & r \cos \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \end{vmatrix} = r^2 \cos \varphi,$$

按照式(6), 球坐标变换下的公式为

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V'} f(r \cos \varphi \cos \theta, r \cos \varphi \sin \theta, r \sin \varphi) r^2 \cos \varphi dr d\varphi d\theta,$$

式中的  $f(x, y, z)$  可求体积,  $V'$  为  $V$  在柱面坐标变换下的原象。

推论 3 在广义球坐标变换下有

$$T: \begin{cases} x = ar \sin \varphi \cos \theta, & 0 \leq r < +\infty, \\ y = br \sin \varphi \sin \theta, & 0 \leq \theta \leq 2\pi, \\ z = cr \cos \varphi, & 0 \leq \varphi \leq \pi. \end{cases}$$

所对应的函数行列式为

$$J(r, \varphi, \theta) = \begin{vmatrix} a \sin \varphi \cos \theta & ar \cos \varphi \cos \theta & -ar \sin \varphi \sin \theta \\ b \sin \varphi \sin \theta & br \cos \varphi \sin \theta & br \sin \varphi \cos \theta \\ c \cos \varphi & -cr \sin \varphi & 0 \end{vmatrix} = abc r^2 \sin \varphi,$$

按照式(6), 三重积分的在广义球坐标变换公式为

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V'} f(ar \sin \varphi \cos \theta, br \sin \varphi \sin \theta, cr \cos \varphi) abc r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta,$$

式中的  $f(x, y, z)$  可求体积,  $V'$  为  $V$  在广义球坐标变换下的原象。

## 2.6. 曲面的面积

定义 2.6.1 设曲面  $S$  由方程  $z = f(x, y)$ ,  $(x, y) \in D$  确定, 其中  $D$  是平面上可以求面积的有界区域,  $f(x, y)$  在  $D$  上具有连续的一阶偏导数, 则曲面  $S$  的面积为



$$\Delta S = \iint_D \sqrt{1 + f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y)} dx dy \quad (7)$$

还可以称  $dS = \sqrt{1 + f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y)} dx dy$  为曲面  $S$  的面积微元。

定义 2.6.2 设曲面  $S$  由参数方程

$$x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v), (u, v) \in D$$

确定, 其中函数  $x(u, v)$ ,  $y(u, v)$ ,  $z(u, v)$  在  $D$  上具有连续的一阶偏导数, 且 Jacobi 行列式

$$\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix}$$

的秩为 2, 如果设曲面  $S$  无重点, 由隐函数存在定理, 曲面  $S$  某点  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  的邻域可表示为  $x = x$ ,  $y = y$ ,  $z = z(x, y)$  的形式, 且有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \bigg/ \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} \bigg/ \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)},$$

若  $D$  在  $xy$  平面上的相应区域为  $D_1$ , 由(7)式曲面  $S$  的面积为

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \bigg/ \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} \bigg/ \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}, \\ &= \iint_D \sqrt{1 + \left( \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \bigg/ \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right)^2 + \left( \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} \bigg/ \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right)^2} \cdot \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv \\ &= \iint_D \sqrt{\left( \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right)^2 + \left( \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \right)^2 + \left( \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} \right)^2} du dv \\ &= \iint_D \sqrt{(x_u^2 + y_u^2 + z_u^2)(x_v^2 + y_v^2 + z_v^2) - (x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v)^2} du dv \end{aligned}$$

记  $E = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2$ ,  $F = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v$ ,  $G = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2$ , 则有

$$\Delta S = \iint_D \sqrt{EG - F^2} du dv.$$

其中  $\sqrt{EG - F^2} du dv$  为曲面  $S$  的面积微元。

定理 5 设光滑曲面  $S$  由方程  $z = f(x, y)$  定义在有界平面区域  $D$  上,  $f(x, y, z)$  为  $S$  上的连续函数, 则

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D \sqrt{1 + f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y)} dx dy.$$

推论 由参数形式表示的光滑曲面

$$S: \begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v), \end{cases} (u, v) \in D,$$

则在曲面  $S$  上第一曲面积分的计算公式为

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{EG - F^2} du dv,$$

其中  $E = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2$ ,  $F = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v$ ,  $G = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2$ , 除此之外还要求雅可比行列式  $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ ,  $\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}$ ,  $\frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}$  中至少有一个不为零。

### 3. 外积与 Jacobi 行列式的关系

本节从外积的角度对积分变换的内容进行直观的阐述, 更有利于我们的理解, 相关内容可参考教材 [3]。

#### 3.1. 关于外积的定义

设  $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ ,  $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$  是平面上两个线性无关的向量, 那么由  $\mathbf{a}$  和  $\mathbf{b}$  为邻边的平行四边形的面积是  $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$ , 它是带有正号或者负的。

如果我们引入一个新的运算符号  $\wedge$  为:  $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$ , 它的几何意义就是以  $\mathbf{a}$  和  $\mathbf{b}$  为相邻两边的平行四边形的带有符号的面积。  $\wedge$  具有以下性质:

1) 重线性: 假设  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  是三个向量,  $\lambda$  是实数, 可以推出

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} + \mathbf{c}) &= \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{c}, \\ (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \wedge \mathbf{c} &= \mathbf{a} \wedge \mathbf{c} + \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}, \\ (\lambda \mathbf{a}) \wedge \mathbf{b} &= \mathbf{a} \wedge (\lambda \mathbf{b}) = \lambda (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}), \end{aligned}$$

2) 反交换性:

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = -\mathbf{b} \wedge \mathbf{a},$$

从而有

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{a} = 0.$$

面积所带符号的意义: 设  $A$  是以  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  为相邻两边的平行四边形, 如果从向量  $\mathbf{a}$  出发在  $A$  内旋转到向量  $\mathbf{b}$  是逆时针方向(见图 4), 则定义它的面积  $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$  带正号, 反之则定义它的面积带负号。

为了验证假设的合理性, 我们可以在平面上设定一个直角坐标系, 其中  $x$  轴和  $y$  轴构成了右手系, 那么从  $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$  到  $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$  是逆时针的情况下有

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} > 0,$$

当从  $\mathbf{a}$  到  $\mathbf{b}$  是逆时针时, 上式为负, 故假设合理。

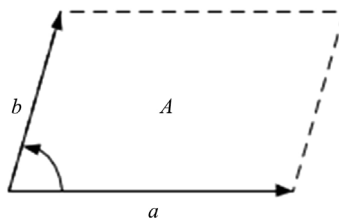


Figure 4. A parallelogram with two adjacent sides of  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$   
图 4.  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  为相邻两边的平行四边形

从图 4 中可以看出, 当  $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$  时有

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}|,$$

故在这种情况下, 将外积运用到 Jacobi 行列式中与标准数学分析教材相同。

同样的在  $\mathbf{R}^3$  上也有相同的定义: 设  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ,  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ ,  $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$  是平面上两个线性无关的向量。定义

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix},$$

它的几何意义表示的是由  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  为相邻的三个棱边的平行六面体的带有符号的体积。 $\wedge$  在  $\mathbf{R}^3$  中同样也具有重线性和反交换性。

称上面的运算  $\wedge$  为外积, 则它是一个具有重线性和反交换性的运算。

例 1 设  $\mathbf{e}_1$  和  $\mathbf{e}_2$  是  $\mathbf{R}^2$  中的两个线性无关的向量,  $\mathbf{a}_1$  和  $\mathbf{a}_2$  是任意两个向量, 假设

$$\mathbf{a}_1 = a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{12}\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{a}_2 = a_{21}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2.$$

那么根据有外积的性质有

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 &= (a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{12}\mathbf{e}_2) \wedge (a_{21}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2) \\ &= a_{11}a_{22}\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 + a_{12}a_{21}\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_1 \\ &= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2. \end{aligned}$$

几何解释: 上式左端表示以向量  $\mathbf{a}_1$  和  $\mathbf{a}_2$  为邻边的平行四边形且带有符号的面积, 上式右端中的  $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$  表示以向量  $\mathbf{e}_1$  和  $\mathbf{e}_2$  为邻边的平行四边形且带有符号的面积。上式右端的行列式表示这两个面积之间带有符号的比例系数。如果从  $\mathbf{a}_1$  到  $\mathbf{a}_2$  和从  $\mathbf{e}_1$  到  $\mathbf{e}_2$  的方向是一致的, 例如都是逆时针(或者都是逆时针)方向, 那么行列式是正, 反之行列式取负值。如果上式两端都取绝对值, 那么取了绝对值的行列式就是面积  $|\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2|$  和面积  $|\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2|$  之间的比例系数。

例 2 设  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  是  $\mathbf{R}^3$  中的三个线性无关的向量,  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  是任意两个向量, 假设

$$\mathbf{a}_i = a_{i1}\mathbf{e}_1 + a_{i2}\mathbf{e}_2 + a_{i3}\mathbf{e}_3 \quad i=1,2,3.$$

那么根据有外积的性质有

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 \wedge \mathbf{a}_3 &= (a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{12}\mathbf{e}_2 + a_{13}\mathbf{e}_3) \wedge (a_{21}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2 + a_{23}\mathbf{e}_3) \wedge (a_{31}\mathbf{e}_1 + a_{32}\mathbf{e}_2 + a_{33}\mathbf{e}_3) \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

上式右端的行列式表示这两个带有符号的体积之间的比例系数, 其中一个是  $\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 \wedge \mathbf{a}_3$ , 另一个是  $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3$ 。上式两边同时取绝对值, 那么取了绝对值的行列式就是体积  $|\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 \wedge \mathbf{a}_3|$  和体积  $|\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3|$  之间的比例系数。

### 3.2. 将外积应用到 Jacobi 行列式中

将  $\mathrm{d}\mathbf{x} \wedge \mathrm{d}\mathbf{y}$  看作以无穷小量元素  $\mathrm{d}\mathbf{x}$  和  $\mathrm{d}\mathbf{y}$  为相邻两边的平行四边形的带有符号的面积, 在通常的笛卡

尔坐标系中  $dx \wedge dy$  带有正号。

例 3 设极坐标变换  $T: x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ , 那么有

$$dx = \frac{\partial x}{\partial r} dr + \frac{\partial x}{\partial \theta} d\theta = \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta,$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial r} dr + \frac{\partial y}{\partial \theta} d\theta = \sin \theta dr + r \cos \theta d\theta,$$

如果将  $dx, dy, dr, d\theta$  都看作向量, 利用外积的性质有

$$\begin{aligned} dx \wedge dy &= (\cos \theta dr - r \sin \theta d\theta) \wedge (\sin \theta dr + r \cos \theta d\theta) \\ &= r \cos^2 \theta dr \wedge d\theta - r \sin^2 \theta d\theta \wedge dr \\ &= \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} dr \wedge d\theta \\ &= r(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) dr \wedge d\theta \\ &= r dr \wedge d\theta. \end{aligned}$$

几何意义: 在笛卡尔坐标系中以  $dx$  和  $dy$  为相邻两边的无穷小平行四边形的面积也就是直角坐标系中的面积微元, 经过极坐标变换变为  $r dr \wedge d\theta$ , 称  $dr \wedge d\theta$  为极坐标系下的面积微元, 其中  $dr \wedge d\theta$  总是正的,  $r$  是两个面积之间的比例系数也就函数行列式的绝对值。

定义 3.2.1 设变换  $T: x = x(u, v), y = y(u, v)$ , 其中  $(u, v) \in D', (x, y) \in D$ , 并且假设

- 1) 函数  $x(u, v), y(u, v)$  将区域  $D$  和  $D'$  一一对应;
- 2) 函数  $x(u, v), y(u, v)$  在区域  $D'$  内具有连续的一阶偏导数, 且它们的逆映射  $u = u(x, y), v = v(x, y)$  在区域  $D$  内也具有连续的一阶偏导数。
- 3) 变换  $T$  的函数行列式

$$J = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} \neq 0, (u, v) \in D',$$

则称这个变换是从区域  $D$  到  $D'$  的正则变换。

因为  $dx = x_u du + x_v dv, dy = y_u du + y_v dv$ , 所以有

$$\begin{aligned} dx \wedge dy &= (x_u du + x_v dv) \wedge (y_u du + y_v dv) \\ &= x_u y_v du \wedge dv + x_v y_u dv \wedge du \\ &= \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} du \wedge dv \\ &= \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} du \wedge dv. \end{aligned}$$

几何解释: 假设  $dx \wedge dy$  和  $du \wedge dv$  均取正号, 那么在正则变换下直角坐标系中的面积元素  $dx \wedge dy$  可变换为曲面坐标系下的面积元素  $\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du \wedge dv$ , 其中  $\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|$  是变换  $x = x(u, v), y = y(u, v)$  的函数行列式的绝对值。

### 3.3. 二重积分变换

定理 1 设  $D$  是  $xy$  平面上可求面积的区域, 函数  $f(x, y)$  在  $D$  上连续可积分, 存在变换

$$T: x = x(u, v), y = y(u, v), (u, v) \in D'$$

是从  $D$  到  $D'$  的正则变换, 那么在直角坐标系下的面积元素变换成为曲面坐标系下的面积元素  $\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du \wedge dv$ , 取绝对值保证面积取正, 则有

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv. \quad (8)$$

推论 1 作极坐标变换

$$T: \begin{cases} x = r \cos \theta, \\ y = r \sin \theta, \end{cases} \quad 0 \leq r < +\infty, 0 \leq \theta < 2\pi$$

则由(8)式可得出

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta.$$

推论 2 作广义极坐标变换

$$T: \begin{cases} x = ar \cos \theta, \\ y = br \sin \theta, \end{cases} \quad 0 \leq r < +\infty, 0 \leq \theta < 2\pi$$

坐标代换下 Jacobi 行列式  $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = abr$ , 则由(8)式可得出

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(ar \cos \theta, br \sin \theta) abrd r d\theta.$$

### 3.4. 三重积分的坐标变换

定理 2 设三重积分  $\iiint f(x, y, z) dx dy dz$  作坐标变换  $T: x = x(u, v, w), y = y(u, v, w), z = z(u, v, w)$ ,  $(u, v, w) \in V'$ , 并要求这一变换是正则变换即满足条件

- 1) 函数  $x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)$  将区域  $V$  与区域  $V'$  一一对应;
- 2) 函数  $x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)$  在区域  $V'$  内具有连续的一阶偏导数, 且它们的逆映射  $u = u(x, y, z), v = v(x, y, z), w = w(x, y, z)$  在区域  $V$  内也具有连续的一阶偏导数;
- 3) 变换  $T$  的函数行列式

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix} \neq 0$$

此时积分区间由  $V$  变换为  $V'$ , 直角坐标系下的体积元素  $dx dy dz$  变换为

$$\begin{aligned} dx \wedge dy \wedge dz &= (x_u du + x_v dv + x_w dw) \wedge (x_u du + x_v dv + x_w dw) \wedge (x_u du + x_v dv + x_w dw) \\ &= \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix} du \wedge dv \wedge dw \\ &= \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} du \wedge dv \wedge dw, \end{aligned}$$

称  $\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du dv dw$  是曲面坐标系中的体积元素, 所以有

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V'} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du dv dw.$$

推论 1 作柱坐标变换

$$T: \begin{cases} x = r \cos \theta, & 0 \leq r < +\infty \\ y = r \sin \theta, & 0 \leq \theta \leq 2\pi, \\ z = z, & -\infty < z < +\infty. \end{cases}$$

在柱坐标变换下的体积元素为

$$\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} \right| dr d\theta dz = r dr d\theta dz.$$

推论 2 作球坐标变换

$$T: \begin{cases} x = r \cos \varphi \cos \theta, & 0 \leq r < +\infty, \\ y = r \cos \varphi \sin \theta, & 0 \leq \theta \leq 2\pi, \\ z = r \sin \varphi, & -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

在球坐标变换下, 体积元素为

$$\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \varphi, \theta)} \right| dr d\varphi d\theta = r^2 \cos \varphi dr d\varphi d\theta.$$

## 4. 内积、Riemann 度量与 Jacobi 行列式的关系

这部分内容将积分变换与向量内积和外积联系到一起, 运用到 Riemann 度量的知识, 是求取体积元几何与 Jacobi 行列式的另一种方法, 一些相关的知识来源可以参考教材[4] [5] [6]。

### 4.1. 向量的数量积和向量积

定义 4.1.1 两个向量  $\mathbf{a}$  和  $\mathbf{b}$  的模和它们夹角的余弦的乘积叫做向量  $\mathbf{a}$  和  $\mathbf{b}$  的数量积或称内积, 记做  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  或  $\mathbf{a}\mathbf{b}$ , 即

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

定义 4.1.2 两向量  $\mathbf{a}$  与  $\mathbf{b}$  的向量积或称外积是一个向量, 记作  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  或  $[\mathbf{a}\mathbf{b}]$ , 它的模是

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

已知三角函数公式  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ , 我们可以推出  $\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta}$ 。若记  $\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \theta$ , 根据内积公式有  $\cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|}$ , 那么

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \theta = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sqrt{1 - \left( \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|} \right)^2} = \sqrt{|\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2} = \sqrt{\begin{vmatrix} \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} & \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \\ \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} & \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} \end{vmatrix}} = \sqrt{|\mathbf{A}|},$$

式中记  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} & \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \\ \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} & \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} (\mathbf{a} \ \mathbf{b})$ 。

需要指出的是我们所介绍的向量运算的定义与运算规律，是和坐标系的选取没有关系的，但是选取不同的坐标系将对应不同的向量运算表达式。

例如 两个向量  $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$  的内积在直角坐标系下为

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = X_1 X_2 + Y_1 Y_2$$

其中  $X_1$ 、 $Y_1$  与  $X_2$ 、 $Y_2$  分别是向量  $\mathbf{a}$  与  $\mathbf{b}$  的直角坐标。如果选取一般的坐标系，设

$$\mathbf{a} = X_1 \mathbf{e}_1 + Y_1 \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{b} = X_2 \mathbf{e}_1 + Y_2 \mathbf{e}_2,$$

由内积的运算规律有

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = X_1 X_2 \mathbf{e}_1^2 + Y_1 Y_2 \mathbf{e}_2^2 + (X_1 Y_2 + Y_1 X_2) \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} X_1 & Y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{pmatrix}$$

上式中

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} (\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2).$$

#### 4.2. 将内积、Riemann 度量应用到 Jacobi 行列式

定理 1 设光滑曲面  $S$  由方程  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x, y)$  或变换  $T: x = x(u, v), y = y(u, v)$  给出，变换  $T$  将  $uv$  平面上按段光滑的封闭的曲线所围成的闭区域  $\Delta$  一对一的映射成  $xy$  平面上的闭区域  $D$ ，函数  $x(u, v)$ ， $y(u, v)$  在  $\Delta$  内具有一阶连续偏导数且它们的 Jacobi 行列式为

$$J(u, v) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \sqrt{|\mathbf{A}|} \neq 0, \quad (u, v) \in \Delta,$$

则  $\Delta$  和  $xy$  平面上的对应区域  $D$  之间的微元面积伸缩系数为  $\sqrt{|\mathbf{A}|}$ ，即

$$|d\mathbf{r}| = dx dy = \sqrt{|\mathbf{A}|} du dv$$

证明 由参数方程  $x = x(u, v)$ ， $y = y(u, v)$  及方程  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x, y)$  知

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv,$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv,$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u},$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v},$$

根据一阶微分形式的不变性，得

$$\begin{aligned} d\mathbf{r} &= \mathbf{r}_x dx + \mathbf{r}_y dy = \mathbf{r}_x \left( \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \right) + \mathbf{r}_y \left( \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv \right) \\ &= \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} \right) du + \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} \right) dv = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} du + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} dv = \mathbf{e}_1 du + \mathbf{e}_2 dv \end{aligned}$$

式中记  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \mathbf{e}_1$ ,  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \mathbf{e}_2$ 。

又

$$\begin{aligned} \mathbf{d}\mathbf{r} \cdot \mathbf{d}\mathbf{r} &= (\mathbf{e}_1 du + \mathbf{e}_2 dv) \cdot (\mathbf{e}_1 du + \mathbf{e}_2 dv) \\ &= (du \quad dv) \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} (\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2) \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} \\ &= (du \quad dv) \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} \\ &= (du \quad dv) \mathbf{A} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} \end{aligned}$$

式中记

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 \end{pmatrix},$$

所以有

$$|\mathbf{d}\mathbf{r}| = dx dy = \sqrt{|\mathbf{A}|} du dv.$$

推论 1 设光滑曲面  $S$  由方程  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x, y)$  给出, 又  $f(x, y)$  在  $S$  上连续, 并存在极坐标变换

$$T: \begin{cases} x = \rho \cos \theta, \\ y = \rho \sin \theta, \end{cases} \quad 0 \leq \rho < +\infty, 0 \leq \theta < 2\pi$$

且函数  $x, y$  满足定理 1 中的条件, 若记  $\mathbf{e}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{e}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} -\rho \sin \theta \\ \rho \cos \theta \end{pmatrix}$ , 由定理 1 则有

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{pmatrix}.$$

那么变换  $T$  的函数行列式为  $J(u, v) = \sqrt{|\mathbf{A}|} = \rho$ , 故得

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{\Delta} f(r \cos \theta, r \sin \theta) \rho d\rho d\theta.$$

推论 2 设光滑曲面  $S$  由方程  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x, y)$  给出, 又  $f(x, y)$  在  $S$  上连续并存在广义极坐标变换

$$T: \begin{cases} x = a\rho \cos \theta, \\ y = b\rho \sin \theta, \end{cases} \quad 0 \leq r < +\infty, 0 \leq \theta < 2\pi$$

且函数  $x, y$  满足定理 1 中的条件, 若记  $\mathbf{e}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} = \begin{pmatrix} a \cos \theta \\ b \sin \theta \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{e}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} -a\rho \sin \theta \\ b\rho \cos \theta \end{pmatrix}$ , 由定理 1 则有

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} = a^2 b^2 \rho^2,$$

那么变换  $T$  的函数行列式为  $J(u, v) = \sqrt{|\mathbf{A}|} = \rho ab$ , 得

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{\Delta} f(r \cos \theta, r \sin \theta) \rho ab d\rho d\theta.$$

### 4.3. 第一型曲面积分

定理 2 设光滑曲面  $S$  由方程  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x, y, z)$  表示或者由参数方程



$$x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v), (u, v) \in D$$

确定, 其中函数  $x(u, v)$ ,  $y(u, v)$ ,  $z(u, v)$  在  $D$  上具有连续的一阶偏导数, 且 Jacobi 行列式

$$\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix}$$

的秩为 2, 如果设曲面  $S$  上任意一点  $P$  处, 有一条  $u$ -曲线和  $v$ -曲线, 它们都经过点  $P$ ,  $\mathbf{r}_u$  和  $\mathbf{r}_v$  分别是这两条曲线在  $P$  处的切向量, 那么  $\mathbf{r}_u du$  和  $\mathbf{r}_v dv$  都应是曲面  $S$  在点  $P$  得切平面, 则  $|\mathbf{r}_u du|$  和  $|\mathbf{r}_v dv|$  分别是  $u$ -曲线和  $v$ -曲线的弧长微分, 所以

$$|\mathbf{r}_u du \times \mathbf{r}_v dv| = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| du dv$$

是以  $\mathbf{r}_u du$  和  $\mathbf{r}_v dv$  为相邻两边的平行四边形得面积, 称为曲面  $S$  的面积元素, 记  $dS$ , 也就是

$$dS = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| du dv,$$

那么曲面  $S$  的面积就是

$$S = \iint_D |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| du dv.$$

证明 因为

$$\mathbf{r}_u = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u},$$

$$\mathbf{r}_v = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v},$$

记  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \mathbf{e}_1$ ,  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \mathbf{e}_2$ , 同定理 1 证明得

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 & x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v \\ x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v & x_v^2 + y_v^2 + z_v^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

如果令

$$E = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2,$$

$$F = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v,$$

$$G = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2,$$

所以有  $|\mathbf{A}| = EG - F^2$ 。

于是曲面  $S$  的面积就是

$$S = \iint_D \sqrt{EG - F^2} du dv.$$

注 如果光滑得曲面  $S$  的方程是  $z = f(x, y)$ ,  $(x, y) \in D$ ,  $D$  是  $xy$  平面上可度量的区域, 那么  $S$  的方程表示为

$$x = x, y = y, z = f(x, y), (x, y) \in D$$

那么

$$\mathbf{r}_x = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}\right), \mathbf{r}_y = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}\right),$$

$$E = \mathbf{r}_x \cdot \mathbf{r}_x = 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2,$$

$$F = \mathbf{r}_x \cdot \mathbf{r}_y = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y},$$

$$G = \mathbf{r}_y \cdot \mathbf{r}_y = 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2,$$

所以

$$EG - F^2 = 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2,$$

曲面  $S$  的面积就是

$$S = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dx dy.$$

#### 4.4. 三重积分的坐标变换

定理 3 设光滑曲面  $S$  由方程  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x, y, z)$  表示, 又  $f(x, y, z)$  在  $S$  上连续, 并存在坐标变换  $T: x = x(u, v, w), y = y(u, v, w), z = z(u, v, w)$ , 并要求这一变换是正则变换, 其中  $(x, y, z) \in V$ ,  $(u, v, w) \in V'$ , 则  $\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$  存在, 且

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V'} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \sqrt{|\mathbf{A}|} du dv dw.$$

证明 因为

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv + \frac{\partial x}{\partial w} dw,$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv + \frac{\partial y}{\partial w} dw,$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv + \frac{\partial z}{\partial w} dw,$$

又

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u},$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v},$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial w} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial w} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial w},$$

根据一阶微分形式的不变性, 有

$$\begin{aligned}
d\mathbf{r} &= r_x dx + r_y dy + r_z dz \\
&= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \left( \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv + \frac{\partial x}{\partial w} dw \right) + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \left( \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv + \frac{\partial y}{\partial w} dw \right) \\
&\quad + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} \left( \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv + \frac{\partial z}{\partial w} dw \right) \\
&= \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u} \right) du + \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v} \right) dv \\
&\quad + \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial w} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial w} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial w} \right) dw \\
&= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} du + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} dv + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} dw = \mathbf{e}_1 du + \mathbf{e}_2 dv + \mathbf{e}_3 dw,
\end{aligned}$$

式中记  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \mathbf{e}_1$ ,  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \mathbf{e}_2$ ,  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} = \mathbf{e}_3$ ,

$$\begin{aligned}
d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} &= (\mathbf{e}_1 du + \mathbf{e}_2 dv + \mathbf{e}_3 dw) \cdot (\mathbf{e}_1 du + \mathbf{e}_2 dv + \mathbf{e}_3 dw) \\
&= (du \quad dv \quad dw) \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \\ dw \end{pmatrix} \\
&= (du \quad dv \quad dw) \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \\ dw \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

记式中

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 \end{pmatrix},$$

与定理 1 相似在坐标变换  $T$  下的函数行列式  $J(u, v, w) = \sqrt{|\mathbf{A}|}$ , 所以有

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V'} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \sqrt{|\mathbf{A}|} du dv dw.$$

推论 1 若是定理 3 中的坐标变换为柱面坐标变换

$$T: \begin{cases} x = \rho \cos \theta, & 0 \leq \rho < +\infty, \\ y = \rho \sin \theta, & 0 \leq \theta \leq 2\pi, \\ z = z, & -\infty < z < +\infty. \end{cases}$$

那么可以得出

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} -\rho \sin \theta \\ \rho \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

经计算可得  $|\mathbf{A}| = \rho^2$ , 所以有

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V'} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z) \rho d\rho d\theta dz.$$

推论 2 若是定理 3 中的坐标变换为球坐标变换

$$T: \begin{cases} x = \rho \cos \varphi \cos \theta, & 0 \leq \rho < +\infty, \\ y = \rho \cos \varphi \sin \theta, & 0 \leq \theta \leq 2\pi, \\ z = \rho \sin \varphi, & -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

那么可以得出

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \theta \\ \cos \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -\rho \sin \varphi \cos \theta \\ -\rho \sin \varphi \sin \theta \\ \rho \cos \varphi \end{pmatrix}, \mathbf{e}_3 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} -\rho \cos \varphi \sin \theta \\ \rho \cos \varphi \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix},$$

经计算可得  $|\mathbf{A}| = \rho^4 \cos^2 \varphi$ ，所以有

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V'} f(\rho \cos \varphi \cos \theta, \rho \cos \varphi \sin \theta, \rho \sin \varphi) \rho^2 \cos \varphi d\rho d\varphi d\theta.$$

推论 3 若是定理 3 中的坐标变换为广义球坐标变换

$$T: \begin{cases} x = a\rho \cos \varphi \cos \theta, & 0 \leq \rho < +\infty, \\ y = b\rho \cos \varphi \sin \theta, & 0 \leq \theta \leq 2\pi, \\ z = c\rho \sin \varphi, & -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

那么可以得出

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} = \begin{pmatrix} a \cos \varphi \cos \theta \\ b \cos \varphi \sin \theta \\ c \sin \varphi \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -a\rho \sin \varphi \cos \theta \\ -b\rho \sin \varphi \sin \theta \\ c\rho \cos \varphi \end{pmatrix}, \mathbf{e}_3 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} -a\rho \cos \varphi \sin \theta \\ b\rho \cos \varphi \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix},$$

经计算可得  $|\mathbf{A}| = a^2 b^2 c^2 \rho^4 \cos^2 \varphi$ ，所以有

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V'} f(\rho \cos \varphi \cos \theta, \rho \cos \varphi \sin \theta, \rho \sin \varphi) abc \rho^2 \cos \varphi d\rho d\varphi d\theta.$$

## 参考文献

- [1] 华东师范大学数学系. 数学分析上、下册[M]. 第4版. 北京: 高等教育出版社, 2010.
- [2] 耿堤, 易法槐, 丁时进. 数学分析(三)[M]. 北京: 科学出版社, 2010.
- [3] 欧阳光中, 姚允龙. 数学分析下册[M]. 上海: 复旦大学出版社, 2002.
- [4] 吕林根, 许子道. 解析几何[M]. 第4版. 北京: 高等教育出版社, 2006.
- [5] 洪毅. 数学分析下册[M]. 广州: 华南理工大学出版社, 2002.
- [6] 王萼芳, 石生明. 高等代数[M]. 第3版. 北京: 高等教育出版社, 2003.