Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2021, 10(4), 1324-1328
Published Online April 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2021.104141

Hans汉斯

一类特殊正定矩阵的证明问题

徐晓静

沈阳师范大学，辽宁 沈阳
Email: 1748691725@qq.com

收稿日期：2021年3月27日；录用日期：2021年4月15日；发布日期：2021年4月29日

摘 要

正定矩阵是一类特殊的矩阵，作为对称矩阵的子类，在数学分析中判别多元函数极值、判断函数单调性等具有广泛的应用。他不仅具备对称矩阵可对角化的性质，而且具有对称矩阵不具备的更高的性质。但是要想运用正定矩阵的这些性质，我们就要首先会判断一个矩阵是正定矩阵。可以看到的是在一些课本中或辅导教材中给出了很多正定矩阵的证明方法。一般都是求解特征值，然后证明其特征值大于零。但在一些比较复杂的题目中往往掺杂大量的中间结论的证明，学者在思考过程中如果忽略其中的隐含结论的证明，就会导致整个题目都做不出来。因此做这种题目往往需要我们有大量的知识储备。在本文中我们将要一起讨论针对一类特殊正定矩阵的证明方法，并给出了一种简单的证明方法。

关键词

正定矩阵，相似，合同

The Proof Problem of a Special Positive Definite Matrix

Xiaojing Xu

Shenyang Normal University, Shenyang Liaoning
Email: 1748691725@qq.com

Received: Mar. 27th, 2021; accepted: Apr. 15th, 2021; published: Apr. 29th, 2021

Abstract

Positive definite matrix is a special kind of matrix. As a subclass of symmetric matrix, positive definite matrix has a wide range of applications in mathematical analysis, such as discriminating the extreme value of multivariate functions and judging the monotonicity of functions. It possesses not only the diagonalization property of symmetric matrices, but also the higher property that

文章引用: 徐晓静. 一类特殊正定矩阵的证明问题[J]. 应用数学进展, 2021, 10(4): 1324-1328.
DOI: 10.12677/aam.2021.104141

symmetric matrices do not possess. But in order to use these properties of positive definite matrices, we first have to know that a matrix is positive definite. And you can see that there are a lot of proofs for positive definite matrices that are given in some books or in some tutorial books. You usually solve for the eigenvalues, and then you prove that the eigenvalues are greater than zero. However, in some more complex topics, a large number of proofs of intermediate conclusions are often mixed in. If scholars ignore the proofs of implicit conclusions in the process of thinking, they will fail to complete the whole topic. Therefore, to do this kind of problem often requires us to have a large knowledge reserve. Today we are going to discuss the proof for a special class of matrices, and give a simple proof method.

Keywords

Positive Definite Matrix, Similar, Contract

1. 引言

正定矩阵的研究一直是矩阵分析领域非常热门的课题。不仅在数学、物理等领域的理论中有很重要的应用，而且在投入产出的经济数学模型[1]以及多种统计线性模型中，也到了很广泛的实际应用。因此矩阵正定的证明问题成为高等数学领域的一个重要研究对象。也正是因此正定矩阵的证明问题在近年来数学专业的考研试题中频频出现，但不难发现的是对于此类矩阵的证明问题一直以来是比较困难的，证明过程比较复杂，难度系数很大。本文将针对一类特定的证明类型介绍一种新型的证明方法。

2. 预备知识

定理[2]：矩阵相似

设 A, B 为数域 P 上两个 n 级矩阵，如果有数域 P 上 n 级矩阵 X，使得 $B = X^{-1}AX$ 。

定理[2]：矩阵合同

数域 P 上 $n \times n$ 矩阵 A, B 称为合同的，如果有数域 P 上 $n \times n$ 矩阵 C，使得 $B = C'AC$ 。

定理[2]：正定矩阵

对称矩阵 A 是正定的，如果二次型 $X'AX$ 是正定。

正定矩阵得性[2]：

1) n 阶实对称矩阵 A 是正定矩阵的充分必要的条件是，存在 n 阶实可逆矩阵 C 使得 $A = C^{\mathrm{T}}C$ or $C\ C^{\mathrm{T}}$ 。

2) n 阶实对称矩阵 A 是正定矩阵的充分必要的条件是，A 的特征值都大于零。

3) 是对称矩阵可正交相似于对角阵，即对于任意一个是对称矩阵 A，都存在 n 阶正交矩阵 Q，使得 $Q^{-1}AQ = Q^{\mathrm{T}}AQ$ 为对角阵。

4) 一个实矩阵是正定的当且仅当它与单位矩阵合同。

对称矩阵的性质[3]：

1) 若 A 是实对称矩阵。则存在正交矩阵 P，使得 $P'AP = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$ 为对角阵。

2) 反对称矩阵的特征值只能是零或者是成对出现的纯虚数。

3. 符号说明

由于在正定矩阵的证明过程中，我们经常会用到矩阵相似和合同的概念，为了更高效，更容易让读者理解，所以在这里我就用了符号来代替。用$\cong$表示矩阵之间的合同；用$\approx$表示矩阵间的相似。见表 1。

Table 1. Description of symbols in the matrix
表 1. 矩阵中的符号说明

符号	$\cong$	$\approx$
含义	合同	相似

4. 正定矩阵的证明的问题

4.1. 例 1

若 A,B 都是 n 级正定矩阵，则 AB 也是正定矩阵的充要条件是 $AB=BA$。

方法一：

证明[3]：必要性显然，现在证明充分性，即证明若 $AB=BA$，则有 AB 是正定矩阵。

$AB\in R^{n\times n}$，$AB=BA$，则有 $(AB)=B'A'=BA$，AB 是 n 阶是对称矩阵。存在正交矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}\lambda_1E_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_sE_s\end{bmatrix}$，其中 E_i 为 k 阶单位矩阵，$\lambda_1\cdots\lambda_s$ 互不相同。

因为 $AB=BA$，所以有 $\left(P^{-1}AP\right)\left(P^{-1}BP\right)=\left(P^{-1}BP\right)\left(P^{-1}AP\right)$。可得 $P'BP=P^{-1}BP=\begin{bmatrix}B_1 & & \\ & \ddots & \\ & & B_s\end{bmatrix}$，$B_i$ 与 E_i 是同级方阵，由于 B 是对称矩阵，可知 B_i 也是对称矩阵。所以有正交矩阵 Q_i，

$Q_i'B_iQ_i=\begin{bmatrix}b_{i1} & & \\ & \ddots & \\ & & b_{in}\end{bmatrix}$ $(i=1,2,\cdots,s)$，均为对角矩阵，再令 $Q=\begin{bmatrix}Q_1 & & \\ & \ddots & \\ & & Q_n\end{bmatrix}$，可知 Q 是正交矩阵，再令

$T=PQ$，则有 $T^{-1}BT=Q^{-1}\left(P^{-1}BP\right)Q=\begin{bmatrix}b_{11} & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & b_{1k1} & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & b_{s1} & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & b_{sk_s}\end{bmatrix}$为对角阵。

$\begin{bmatrix}\lambda_1E_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_SE_S\end{bmatrix}$为对角阵。故在同一个 n 阶实对称矩阵使得 $T^{-1}AT=\begin{bmatrix}a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n\end{bmatrix}$，

$T^{-1}BT=\begin{bmatrix}b_1 & & \\ & \ddots & \\ & & b_n\end{bmatrix}$。题目已知 A,B 都是正定矩阵，所以有 $a_i>0,\ b_i>0\ (i=1,2,\cdots,n)$。但有

$T^{-1}ABT=\left(T^{-1}AT\right)\left(T^{-1}BT\right)=\begin{bmatrix} a_1b_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_nb_n \end{bmatrix}$，因为 $a_ib_i>0\ (i=1,2,\cdots,n)$，所以 AB 为正定矩阵。即得证。

方法二[4]：

必要性显然，现在证明充分性。我们先来证明这样一个结论。若 A 是 n 阶正定矩阵的充分必要条件是，存在 n 阶正定矩阵 B，有 $A=B^2$。我们考虑特征值的方法，先证明必要性，因为 A 是 n 级正定矩阵，有 n 阶正交矩阵 T，使得 $T'AT=T^{-1}AT=\Lambda=diag\left(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\right)$，其中 λ_i 都大于零 $(i=1,2,\cdots,n)$。

$$\begin{aligned} A=Q\Lambda Q^{\mathrm T}&=Qdiag\sqrt{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n}diag\sqrt{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n}Q^{\mathrm T}\\ &=Qdiag\sqrt{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n}Q^{\mathrm T}Qdiag\sqrt{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n}Q^{\mathrm T}=B^2. \end{aligned}$$

其中 $B=Qdiag\sqrt{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n}Q^{\mathrm T}$，并且每个 $\sqrt{\lambda_i}$ 都大于零 $(i=1,2,\cdots,n)$。再证明充分性，已知 $A=B^2$，其中 B 是正定矩阵，由于 $A^{\mathrm T}=\left(B^{\mathrm T}\right)^2=B^2=A$，所以有 A 是实对称矩阵。设 B 的征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则有 A 的特征值为 $\lambda_1^2,\lambda_2^2,\cdots,\lambda_n^2$ 也大于零。下证若 $AB=BA$，则有 AB 是正定矩阵。分两步证明，第一步证明 AB 特征值都大于零，首先由于 A, B 都是 n 级正定矩阵，则由上面的结论可以知道存在正定矩阵 S 和 T，满足 $A=S^2,B=T^2$，进而等式 $S^{-1}ABS=S^{-1}S^2T^2S=ST^2S=(TS)^{\mathrm T}(TS)=C$ 成立。又因为 $C^{\mathrm T}=(TS)^{\mathrm T}(TS)=C$，所以 C 是实对称方阵。对于任意 n 维列向量，由 TS 可逆知 $TSx\neq 0$。

$x^{\mathrm T}Cx=x^{\mathrm T}(TS)^{\mathrm T}(TS)x=(TSx)^{\mathrm T}(TSx)>0$ 从而有 C 是正定矩阵，于是 C 的特征值全部都大于零。而 AB 与 C 相似，所以 AB 的特征值全部大于零。第二步，因为 $AB=BA$，可知 AB 是实对称矩阵。故可以证明 AB 是正定矩阵。

方法三[5]：

证明：必要性显然，

现证充分性：$AB=BA$，$(AB))=B'A'=BA$，显然 AB 是对称矩阵，我们只需要 AB 的特征值都大于零就可以了。这里由于 A 是正定矩阵，则 $A=C^{\mathrm T}C$，其中 C 是可逆矩阵，则有 $AB=CC'B=CC'BCC^{-1}$。根据相似与合同的定义可以得到 $CC'BCC^{-1}\approx C'BC\cong B$（相似不改变特征值，合同不改变特征值的正负），题目中已知 B 是正定的，固有 $C'BC$ 也是正定的，所以它的特征值全部都大于零。而我知道相似矩阵具有相同的特征值所以可以有 $AB=CC'BCC^{-1}$ 的特征值全部大于零，得到 AB 是正定矩阵。即得证。

由于方法一、方法二和方法三的对比可知，对于正定矩阵的证明问题解题方法有很多种，但是常规的解题方法在证明的过程往往是需要证明了另一个结论，进而证明我们想要结论。需花费大量的步骤和思考过程。而我列举的第三种的解题方法没有中间过程的证明，大大减少的做题的步骤，提高做题效率。那么问提来了我们知道若 A 是正定的，存在 n 阶实可逆矩阵 C 使得 $A=C^{\mathrm T}C$ or $C^{\mathrm T}C$，那么在做题中选择 $A=C^{\mathrm T}C$ 还是 $A=C^{\mathrm T}C$ 呢？我们接下来再看这样一个题目。

4.2. 例 2

设 A 是 n 级正定矩阵，B 是 n 级实反对称矩阵，则 $|A\pm B|>0$。

证明[5]：此类题目(正定矩阵或半正定矩阵的行列式之间的关系或者正定矩阵的行列式与零之间的大小关系)我们一般是先把 A (正定的)提出来，即 $|A+B|=|A||E+A^{-1}B|$，由于 A 是正定矩阵，$|A|>0$，所以只需证明 $|E+A^{-1}B|>0$ 即可。由于 A 是正定矩阵，则 A^{-1} 也是正定的。所以设 $A^{-1}=CC'$，其中 C 是可逆的，从而 $A^{-1}B=CC'B=CC'BCC^{-1}\approx C'BC\cong B$，由于 B 是反对称的，则 $C'BC$ 也是反对称的。那么它的特征值只能为纯虚数或者零，并且虚数根成对出现设为 $\pm c_ki\ (i=1,\cdots,s)$，从而 $A^{-1}B$ 的特征值只能为 $\pm c_ki$ 或者 0，$|E+A^{-1}B|$ 的特征值为 $1\pm c_ki$，$|E+A^{-1}B|=\prod_{i=1}^{s}\left(1+c_k^2\right)>0$ 即 $|A+B|>0$，同理可证 $|A-B|>0$。

DOI: 10.12677/aam.2021.104141

4.3. 小结

通过以上两道题中我们可以看到对于此类题目的证明。我们都是按照“先相似再合同[5]”的原则进行证明的，所以我们总结出，若给定的正定矩阵在左边选用 $C^{\mathrm{T}}C$，若给定的正定矩阵在右，则选取 $C\ C^{\mathrm{T}}$。

5. 应用

若 A, B 都是 n 阶是对称矩阵并且 B 是正定矩阵，证明 BA 的特征值全部大于零的充分必要条件是 A 正定。

证明：先证必要性，由于 B 是正定的，存在 n 阶可逆矩阵 C，使得 $B = CC'$，则有 $BA = CC'A = CC'ACC^{-1}CC'ACC^{-1} \approx C'AC \cong A$，由于 A 是正定的。合同不改变其正定性，$C'AC$ 的特征值大于零，相似不改变特征值，故 $BA = CC'ACC^{-1}$ 的特征值全部大于零。同理若 BA 特征值都大于零，则 $C'AC$ 的特征值大于零，从而 A 的特征值全部都大于零。而题目中已知 A 是对称矩阵，因此可以证明 A 是正定矩阵。

6. 总结

本文介绍了一种针对于一类特殊矩阵的证明方法。通过与其他的证明方法比较，显而易见在做题步骤上有很大的简化，而且对学者的知识储备量的要求也不高，学者学起来轻松易懂。但是本方法还有一定的局限性。我所讲的方法是针对一类特定类型的正定矩阵的证明问题。针对比较特殊的正定矩阵的证明还是有一定的局限性。所以此类方法还不能广泛地应用在正定矩阵的证明问题上，还需要改进。如何简化正定矩阵的证明方法，得到更高效的解决正定矩阵的证明方法，将会是我今后继续努力研究的方向。

参考文献

[1] 刘潇奕. 利用同时合同对角阵解决几类正定矩阵相关问题[J]. 高等数学研究, 2021, 24(1): 40-41+94.

[2] 王萼芳, 石生明. 高等代数[M]. 第 4 版. 北京: 高等教育出版社, 2013.

[3] 钱吉林. 高等代数解题精粹[M]. 北京: 中央民族大学出版社, 2002.

[4] 徐仲. 高等代数考研教案[M]. 西安: 西北工业大学出版社, 2006.

[5] 李扬. 高等代数强化讲义[Z], 2020.