

平面库伦摩擦系统的动力学分析

陈会敏, 冷 轩

长沙理工大学数学与统计学院, 湖南 长沙
Email: 1765661103@qq.com

收稿日期: 2021年3月27日; 录用日期: 2021年4月15日; 发布日期: 2021年4月30日

摘 要

机械系统库伦摩擦的存在, 导致了系统的不连续性的存在。本文研究了在水平面上运动的物体在库伦摩擦力作用下的全局动力学行为。在这种情况下, 不连续系统的滑模域上的点都是系统的伪平衡点。在此基础上, 通过构造Poincaré映射, 给出了滑模域中的点构成的集合均为系统的全局吸引子这一结论, 最后通过数值模拟验证了该吸引子在有限时间内是收敛的这一结论。

关键词

库伦摩擦系统, 滑模域, Poincaré映射, 全局吸引子, 收敛

Dynamic Analysis of Planar Coulomb Friction System

Huimin Chen, Xuan Leng

School of Mathematics and Statistics, Changsha University of Science and Technology, Changsha Hunan
Email: 1765661103@qq.com

Received: Mar. 27th, 2021; accepted: Apr. 15th, 2021; published: Apr. 30th, 2021

Abstract

The existence of Coulomb friction in mechanical system leads to the existence of discontinuity. In this paper, the global dynamic behavior of an object moving on a horizontal plane under Coulomb friction is studied. In this case, the points on the sliding mode domain of the discontinuous system are all pseudo-equilibrium points of the system. On this basis, by constructing the Poincaré mapping, the conclusion that the set of points in the sliding mode domain is the global attractor of the system is given. Finally, the conclusion that the attractor is convergent in finite time is proved by numerical simulation.

Keywords

Coulomb Friction System, Sliding Mode Domain, Poincaré Mapping, Global Attractor, Convergence

Copyright © 2021 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

摩擦是表面接触时产生的一种非常复杂的现象, 摩擦现象无处不在, 其存在于两个物体之间, 并不是单一存在的[1] [2]。而库伦摩擦模型是较早存在的对摩擦现象进行描述的一种模型。许多学者对其进行了研究并取得了一些实质性的进展。Edward Berger [3]综述许多不同工程领域的大量文献, 并批判性地考察了不同情况下各种摩擦模型的使用, 得到系统模型和摩擦模型从根本上是耦合的, 不能独立选择, 摩擦模型的有用性和系统动力学模型的成功是相互依赖的, 摩擦性质和表面相互作用科学的基本问题将是未来许多领域的重要研究方向。Andrea Bacciotti [4]利用局部 Lipschitz 条件和 Lyapunov 函数研究了 Filippov 意义下的具有右端不连续系统的稳定性和正定性。得到了一般微分包含情况下的稳定性, 并给出了 Jurdjevic-Quinn 型反馈律稳定的一些充分条件。Leine R.I.和 Campen D. [5]用广义雅可比矩阵分析了两个平面非光滑连续系统的平衡分支, 研究了一个属于微分包含类的非自治 Filippov 系统的力学例子, 给出了周期解的一些显著的不连续分支, 为后续相关研究提供了参考思路。Alvarez J. [6]基于右端不连续常微分方程的 n 不变性原理, 研究了具有库伦摩擦的一自由度机械振子的渐近稳定性, 并进行了仿真验证, 实现了控制器和观测器的有限时间收敛。以往关于摩擦动力学的研究大多忽视其实际的动力学模型, 将其近似线性或弱化线性系统简化为线性系统来分析研究[7] [8]。而本文在前人研究的基础上, 重点讨论了在水平面上运动的物体所受的库伦摩擦力模型, 并进一步研究系统运动的动力学行为。

2. 系统数学模型的建立

考虑形式较简单的库伦摩擦系统, 如图 1 所示:

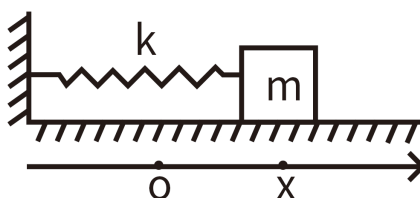


Figure 1. Coulomb friction system

图 1. 库伦摩擦系统

假设一个质量为 m 的物体在水平面上运动, 物体只受到弹簧的弹力和地面对它的摩擦力, 在运动过程中物体所受的摩擦力的大小是恒定的, 其方向与运动方向相反, 则根据牛顿第一运动定律, 系统的动力学行为可描述为

$$m\ddot{x} + p(\dot{x}) + kx = 0 \quad (1.1)$$

其中: x 表示物体的位移, k 为弹簧的弹力系数, 且

$$p(\dot{x}) = \begin{cases} p_0, & \dot{x} > 0 \\ -p_0, & \dot{x} < 0 \end{cases} \quad (1.2)$$

由此可知, 系统(1.1)~(1.2)为不连续系统。

当 $p_0 \neq 0$ 时, 由于系统(1.1)~(1.2)是一个右端不连续的分系统, 当考虑到系统(1.1)在 Filippov 意义下的解, 不难知道系统(1.1)的解是存在的, 且满足初值条件 $x(0) = x_0, y(0) = y_0$, 存在区间为 $[0, +\infty)$, 并且系统的解是右唯一的。为了后续的方便讨论, 将系统(1.1)~(1.2)化为等价的平面微分系统, 令 $\dot{x} = y$

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\frac{kx}{m} - \frac{p(y)}{m} \end{cases} \quad (1.3)$$

其中

$$p(y) = \begin{cases} p_0, & y > 0 \\ -p_0, & y < 0 \end{cases} \quad (1.4)$$

由(1.3)~(1.4)可得系统(1.3)的上半线性子系统为

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\frac{kx}{m} - \frac{p_0}{m}, & y > 0 \end{cases} \quad (1.5)$$

下半线性子系统为

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\frac{kx}{m} + \frac{p_0}{m}, & y < 0 \end{cases} \quad (1.6)$$

对于上半子系统 $e_U = \left(-\frac{p_0}{k}, 0\right)$ 为其中心, 且通解为

$$my^2 + k\left(x + \frac{p_0}{k}\right)^2 = c_1 \quad (1.7)$$

其中 c_1 为非负常数。

同理, 下半子系统以 $e_L = \left(\frac{p_0}{k}, 0\right)$ 为中心, 其通解为

$$my^2 + k\left(x - \frac{p_0}{k}\right)^2 = c_2 \quad (1.8)$$

其中 c_2 为非负常数。

3. 切换线上滑模动力学行为

由(1.3)式可知, 系统的切换线是 $\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$, 紧接着着重分析系统(1.3)在切换线 $\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$ 上和它周围附近的动力学行为。则系统(1.3)在 $y = 0$ 附近的向量场分析如图 2 所示:

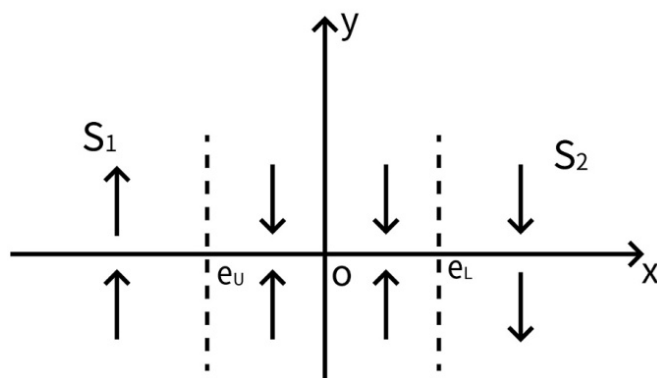


Figure 2. Vector field distribution

图 2. 向量场分布

一般地, 当弹簧被拉直时, 物体将不会再运动, 不妨设弹簧被拉直时所处的位置范围是 $\{x | -A_1 < x < A_2\}$, 为了后面的方便讨论, 给出了 $A_1 > \frac{3p_0}{k}$, $A_2 > \frac{3p_0}{k}$, 但 A_1 与 A_2 不一定相等, 则 Σ 可分为三个部分

$$\Sigma_{C_1} = \left\{ (x, y) \mid -A_1 < x < -\frac{p_0}{k}, y = 0 \right\}$$

$$\Sigma_s = \left\{ (x, y) \mid -\frac{p_0}{k} < x < \frac{p_0}{k}, y = 0 \right\}$$

$$\Sigma_{C_2} = \left\{ (x, y) \mid \frac{p_0}{k} < x < A_2, y = 0 \right\}$$

其中 Σ_{C_1} 和 Σ_{C_2} 为穿越集, 且在 Σ_{C_1} 上系统(1.3)的解从下往上穿越, 而在 Σ_{C_2} 上系统(1.3)的解从上往下穿越, Σ_s 为滑模域, 并且该滑模域是吸引的。为了分析滑模域上的动力学行为, 其滑模方程起着很重要的作用, 根据 Filippov 凸方法可以可得, 在滑模域 Σ_s 上的滑模方程为

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

由此可知, Σ_s 上的所有点均为系统(1.3)的伪平衡点, 即 Σ_s 为系统(1.3)的伪平衡点集, 显然 Σ_s 中的伪平衡点均不孤立。

4. 系统的全局动力学行为

下面将用 Poincaré 映射来分析系统(1.3)的全局动力学行为。

注意到从 $(x_0, 0) \in \Sigma_{C_2}$ 出发的解将进入 S_2 , 并经过有限的时间再次与 Σ 相交不妨设交点为 $(x_1^L, 0)$, 且 $x_1^L < \frac{p_0}{k}$, 则下半 Poincaré 映射 $P_L(\cdot)$ 定义如下:

$$P_L(x_0) = \begin{cases} x_1^L, x_0 \in \left[\frac{p_0}{k}, A_2 \right] \\ x_0, x_0 \in \left[-A_1, \frac{p_0}{k} \right] \end{cases}$$

另一方面, 若 $(x_0, 0) \in \Sigma_{C_1}$, 即 $x_0 < -\frac{p_0}{k}$ 出发的解将进入 S_1 , 并经过有限时间再次与 Σ 相交。不妨设交点为 $(x_1^U, 0)$, 且 $x_1^U > -\frac{p_0}{k}$ 。同理, 我们可定义上半 Poincaré 映射 $P_U(\cdot)$ 如下所示:

$$P_U(x_0) = \begin{cases} x_1^U, x_0 \in \left[-A_1, -\frac{p_0}{k}\right) \\ x_0, x_0 = \left[\frac{p_0}{k}, -A_2\right] \end{cases}$$

由上述通解公式可知, 上半子系统的通解为椭圆, 椭圆的中心为 $e_U = \left(-\frac{p_0}{k}, 0\right)$, 从而

$$x_1^U = P_U(x_0) = -x_0 - \frac{2p_0}{k}, x_0 \in \left[-A_1, -\frac{p_0}{k}\right) \quad (3.1)$$

同理可得

$$x_1^L = P_L(x_0) = -x_0 + \frac{2p_0}{k}, x_0 \in \left[\frac{p_0}{k}, A_2\right] \quad (3.2)$$

进一步, 根据(3.1)和(3.2)可定义 Poincaré 映射如下

$$P(x_0) = P_U(P_L(x_0)) = x_0 - \frac{4p_0}{k}, x_0 \in \left[\frac{3p_0}{k}, A_2\right] \quad (3.3)$$

定理 3.1 由滑模域中的点构成的集合 $\Sigma_s = \left\{(x, 0) \mid |x| \leq \frac{p_0}{k}\right\}$ 为系统(1.3)的全局吸引子, 且该吸引子在有限时间内是收敛的。

证明: 由子系统的通解公式(1.7)和(1.8)可知, 系统(1.3)的任意一个解都将在有限时间内到达切换线 Σ 上, 下面只需证明从切换线 Σ 出发的解在有限时间内收敛到平衡点集 Σ_s 上, 从而只需证明对于任意 $x_0 \in \Sigma_s$, 存在正整数 N 使得

$$P(x_0) \in \Sigma_s, \text{ 这里 } P^N = \underbrace{P \circ P \circ \dots \circ P}_N$$

事实上, 根据 Poincaré 映射的表达式(3.3), 当 $x_0 \in \left[-\frac{3p_0}{k}, \frac{3p_0}{k}\right]$ 时, 则 $P(x_0) \in \Sigma_s$, 即此时取 $N=1$, 当 $x_0 \in \left(\frac{3p_0}{k}, A_2\right]$ 时, 由于 $|P(x_0) - x_0| = \frac{4p_0}{k}$, 因此取 $N = \left[\frac{kx_0 - p_0}{4p_0}\right] + 1$, 则 $P^N(x_0) \in \Sigma_s$; 而当 $x_0 \in \left[-A_1, -\frac{3p_0}{k}\right)$ 时, $P(x_0) \in \left(\frac{3p_0}{k}, A_2\right]$, 从而取 $N = \left[\frac{-kx_0 - 3p_0}{4p_0}\right] + 2$ 可得 $P^N(x_0) \in \Sigma_s$ 。证毕!

5. 数值仿真及应用分析

当 $k=1, m=1, p_0 = \frac{1}{2}$ 时, 系统的滑模域区间为 $[-0.5, 0.5]$, 从图 3 中可以看出, 在有限时间内从任何点出发的轨线, 最后都收敛到 $[-0.5, 0.5]$ 区间的滑模域上。

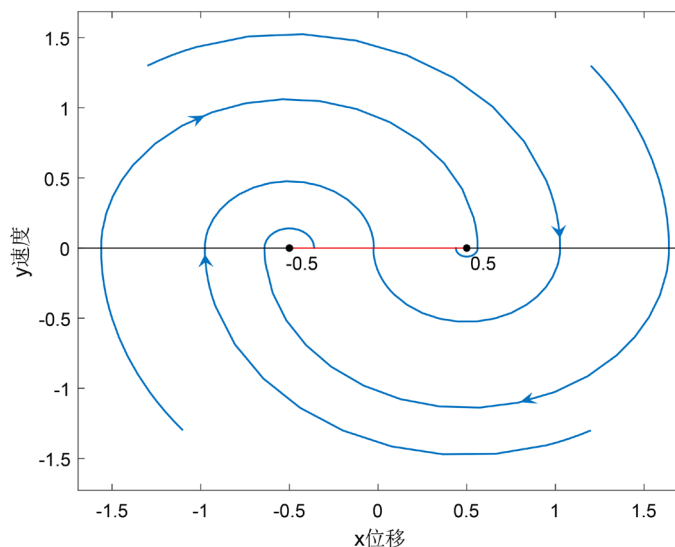


Figure 3. Trajectory phase diagram of plane Coulomb friction system
图 3. 平面库伦摩擦系统的轨线相图

6. 结论

线性运动理论是运动力学研究中应用最为广泛的工具。以往研究人员都将近似线性或弱化线性系统简化为线性系统来分析研究, 忽视所研究的实际动力学系统模型。本章首先建立了在水平面上带有库伦摩擦系统的动力学模型, 进而研究了其运动行为, 然后讨论了具有两个子系统且子系统的切换线为直线的分段线性微分系统的动力学行为, 并通过构造 Poincaré 映射得到了滑模域中的点构成的集合为系统的全局吸引子, 且该吸引子在有限时间内是收敛的这一结论。最后通过数值模拟, 证实了这一结论的正确性。

参考文献

- [1] Urbakh, M., Klafter, J., Gourdon, D., *et al.* (2004) The Nonlinear Nature of Friction. *Nature*, **430**, 525. <https://doi.org/10.1038/nature02750>
- [2] 王松年. 摩擦学原理及应用[M]. 北京: 中国铁道出版社, 1990.
- [3] Berger, E. (2002) Friction Modeling for Dynamic System Simulation. *Applied Mechanics Reviews*, **55**, 25-32. <https://doi.org/10.1115/1.1501080>
- [4] Bacciotti, A. and Ceragioli, F. (1999) Stability and Stabilization of Discontinuous Systems and Nonsmooth Lyapunov Functions. *ESAIM Control Optimisation and Calculus of Variations*, **4**, 361-376. <https://doi.org/10.1051/cocv:1999113>
- [5] Leine, R.I. and Campen, D. (2006) Bifurcation Phenomena in Non-Smooth Dynamical Systems. *European Journal of Mechanics—A/Solids*, **25**, 595-616. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2006.04.004>
- [6] Alvarez, J., Orlov, I. and Acho, L. (2000) An Invariance Principle for Discontinuous Dynamic Systems with Application to a Coulomb Friction Oscillator. *Journal of Dynamic Systems Measurement and Control*, **122**, 317-322. <https://doi.org/10.1115/1.1317229>
- [7] 黄立宏, 郭振远, 王佳伏. 右端不连续微分方程理论与应用[M]. 北京: 科学出版社, 2011.
- [8] 丁千, 翟红梅. 机械系统摩擦动力学研究进展[J]. 力学进展, 2013, 43(1): 112-131.