

Burgers方程的时空Legendre谱配置方法

宋 健, 王天军, 霍金健

河南科技大学数学与统计学院, 河南 洛阳
Email: wangtianjun64@163.com

收稿日期: 2021年3月27日; 录用日期: 2021年4月15日; 发布日期: 2021年4月30日

摘 要

利用Legendre-Gauss-Lobatto节点为配置点, 构造Burgers方程初边值问题的时空Legendre谱配置格式。即在时间和空间方向都用Lagrange插值多项式将其化为非线性方程组, 数值实验证明了所提算法格式的有效性和高精度。

关键词

Burgers方程, 初边值问题, 时空Legendre谱配置法

Space-Time Legendre Spectral Collocation Methods for Burgers Equation

Jian Song, Tianjun Wang, Jinjian Huo

Mathematics & Statistics School, Henan University of Science & Technology, Luoyang Henan
Email: wangtianjun64@163.com

Received: Mar. 27th, 2021; accepted: Apr. 15th, 2021; published: Apr. 30th, 2021

Abstract

A Legendre spectral collocation scheme is constructed for Burgers equation by using the Legendre collocation method in time and space, which is a nonlinear system using Lagrange interpolation polynomials. Numerical results demonstrate the efficiency and high accuracy of the proposed algorithm.

Keywords

Burgers Equation, Initial-Boundary Value Problems, Space-Time Legendre Spectral Collocation Method

Copyright © 2021 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

Burgers 方程由 Bateman 1915 年在研究流体运动时提出[1]。浅水波以及一些物理系统中的波动过程可以归结为 Burgers 方程。一维 Burgers 方程精确解首先由 Benton 和 Platzman 得到[2], 因此, 求解 Burgers 方程是科学或工程领域中的重要课题。一些作者用 Chebyshev 谱 - Euler 混合方法、高阶紧致有限体积、时空耦合谱元方法和迎风 LDQ 方法求解 Burgers 方程初边值问题[3] [4] [5] [6]。由于时间和空间方向的误差阶不同, 导致时间和空间方向的模数不平衡, 这就会增加计算工作量, 为克服这个局限性, 有作者对发展型方程构造了时空谱方法[7] [8]。最近, 一些作者研究了以 Legendre-Gauss-Lobatto 节点为配置点的微分矩阵的一些性质[9] [10], 并用于求解常微分方程定解问题的数值解[11] [12], 特别有作者构造了 KdV 方程 Cauchy 问题的时空谱配置方法[13] [14], 基于这些工作, 本文构造 Burgers 方程初边值问题的时空 Legendre 谱配置方法, 具体地就是考虑如下 Burgers 方程初边值问题:

$$\begin{cases} \partial_s u + u \partial_x u - \partial_x^2 u = 0, & x \in (-1, 1), s \in (0, T], \\ u(-1, s) = g_1(s), u(1, s) = g_2(s), & s \in [0, T], \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in [-1, 1]. \end{cases} \quad (1)$$

用 Lagrange 二元插值多项式逼近(1)的精确解, 在时间和空间方向用 Legendre 谱配置方法, 将(1)式化为非线性矩阵方程, 然后转化为非线性代数方程组, 利用通常的不动点迭代方法求得数值解, 显然在函数关于时间和空间两个变量充分光滑时, 两个方向的数值误差阶是相同的, 都具有谱精度, 并且大大地减少了计算工作量。

2. 基于 Gauss 节点的插值多项式及其微分矩阵

记 $L_N(x)$ ($x \in I = (-1, 1)$) 为 N 次 Legendre 多项式。 $x_0 = -1; x_N = 1; x_k (1 \leq k \leq N-1)$ 是 $\partial_x L_N(x) = 0$ 的根[11]。以 x_k 为节点的 Lagrange 插值基函数为:

$$\psi_k(x) = \frac{(1-x^2) \partial_x L_N(x)}{N(N+1)(x_k-x)L_N(x_k)}. \quad (2)$$

记 $P_N(I)$ 为次数不超过 N 的多项式集合, 对 $u(x) \in C(\bar{I})$, 其 Lagrange 插值多项式

$$p_N(x) = \sum_{j=0}^N u_j \psi_j(x), u_j = u(x_j), x \in I.$$

对 $p_N(x)$ 关于 x 求 m 阶导数, 并令 $x = x_k, k = 0, 1, \dots, N$, 得

$$\partial_x^m p_N(x) = \sum_{j=0}^N u_j \partial_x^m \psi_j(x).$$

相应于 $\psi_j(x)$ 的 m 阶微分矩阵和一阶微分矩阵分别记为:

$$D^{(m)} = (\partial_x^m \psi_j(x_k))_{0 \leq k, j \leq N}, \quad D = D^{(1)} = (d_{kj} = \partial_x \psi_j(x_k))_{0 \leq k, j \leq N}.$$

引理 根据文献[9]中的(3.68)和(3.203)式, 则有[9] [10] [11]:

$$d_{kj} = \begin{cases} -\frac{N(N+1)}{4}, & k = j = 0; \\ \frac{L_N(x_k)}{(x_k - x_j)L_N(x_j)}, & k \neq j; \\ \frac{N(N+1)}{4}, & k = j = N; \\ 0, & k = j, (k, j = 1, 2, \dots, N-1). \end{cases} \quad (3)$$

而且 m 阶微分矩阵是一阶微分矩阵的 m 次幂。

3. Burgers 方程初边值问题的谱配置格式

对(1)式作变换 $t = \frac{2s}{T} - 1$, 问题转化为:

$$\begin{cases} \frac{2}{T} \partial_t u + u \partial_x u - \partial_x^2 u = 0, & x \in (-1, 1), t \in (-1, 1], \\ u(-1, t) = g_1(s(t)), u(1, t) = g_2(s(t)), & t \in [-1, 1], \\ u(x, -1) = \varphi(x) & x \in [-1, 1]. \end{cases} \quad (4)$$

记 $\Omega = I \otimes I$, 及 $Q_{M,N}(\Omega) = P_M(I) \otimes P_N(I)$ 。式(4)的 Legendre 时空谱配置方法就是求 $u_{M,N}(x,t) \in Q_{M,N}(\Omega)$ 满足:

$$\begin{cases} \frac{2}{T} \partial_t u_{M,N} + u_{M,N} \partial_x u_{M,N} - \partial_x^2 u_{M,N} = 0, & x \in (-1, 1), t \in (-1, 1], \\ u_{M,N}(-1, t) = g_1(s(t)), u_{M,N}(1, t) = g_2(s(t)), & t \in [-1, 1], \\ u_{M,N}(x, -1) = \varphi(x), & x \in [-1, 1]. \end{cases} \quad (5)$$

用 $u_{M,N}(x,t) = \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M \hat{u}_{m,n} \psi_n(x) \psi_m(t)$ 逼近(4)式的解, 并将其带入到(5)式中, 得:

$$\begin{cases} \frac{2}{T} \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M \hat{u}_{m,n} \psi_n(x_k) \partial_t \psi_m(t_l) + \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M \hat{u}_{m,n} \psi_n(x_k) \psi_m(t_l) \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M \hat{u}_{m,n} \partial_x \psi_n(x_k) \psi_m(t_l) \\ - \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M \hat{u}_{m,n} \partial_x^2 \psi_n(x_k) \psi_m(t_l) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N-1; l = 1, 2, \dots, M, \\ \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M \hat{u}_{m,n} \psi_n(x_0) \psi_m(t_l) = g_1\left(\frac{t_l+1}{2}T\right), \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M \hat{u}_{m,n} \psi_n(x_N) \psi_m(t_l) = g_2\left(\frac{t_l+1}{2}T\right), \\ l = 0, 1, \dots, M, \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M \hat{u}_{m,n} \psi_n(x_k) \psi_m(t_0) = \varphi(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, N. \end{cases} \quad (6)$$

记 $\hat{d}_{l,m} = \partial_t \psi_m(t_l)$, $\tilde{d}_{k,n} = \partial_x \psi_n(x_k)$, $\tilde{d}_{k,n}^{(2)} = \partial_x^2 \psi_n(x_k)$, 利用 Lagrange 插值多项式的性质, 式(6)关于 l 、 k 展开, 则(6)式可转化成矩阵形式为:

$$AX - XB^T + X * D = -X * (XC^T) - F. \quad (7)$$

用 E_n 表示 n 阶单位矩阵, “ \otimes ” 表示 Kronecker 积, G 是矩阵 D 按行向量拉长后的转置向量, R 是矩阵 F 按行向量拉长后的转置向量, “ $*$ ” 表示对应元素相乘, 则(7)式可化为如下的非线性方程组:

$$(A \otimes E_{N-1} - E_M \otimes B)Y + Y.*G = -Y.*((E_M \otimes C)Y) - R. \quad (8)$$

$$A = \frac{2}{T} \begin{pmatrix} \hat{d}_{1,1} & \hat{d}_{1,2} & \cdots & \hat{d}_{1,M} \\ \hat{d}_{2,1} & \hat{d}_{2,2} & \cdots & \hat{d}_{2,M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{d}_{M,1} & \hat{d}_{M,2} & \cdots & \hat{d}_{M,M} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} \hat{u}_{1,1} & \hat{u}_{1,2} & \cdots & \hat{u}_{1,N-1} \\ \hat{u}_{2,1} & \hat{u}_{2,2} & \cdots & \hat{u}_{2,N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{u}_{M,1} & \hat{u}_{M,2} & \cdots & \hat{u}_{M,N-1} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \tilde{d}_{1,1}^{(2)} & \tilde{d}_{1,2}^{(2)} & \cdots & \tilde{d}_{1,N-1}^{(2)} \\ \tilde{d}_{2,1}^{(2)} & \tilde{d}_{2,2}^{(2)} & \cdots & \tilde{d}_{2,N-1}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{d}_{N-1,1}^{(2)} & \tilde{d}_{N-1,2}^{(2)} & \cdots & \tilde{d}_{N-1,N-1}^{(2)} \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} \tilde{d}_{1,1} & \tilde{d}_{1,2} & \cdots & \tilde{d}_{1,N-1} \\ \tilde{d}_{2,1} & \tilde{d}_{2,2} & \cdots & \tilde{d}_{2,N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{d}_{N-1,1} & \tilde{d}_{N-1,2} & \cdots & \tilde{d}_{N-1,N-1} \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} \hat{u}_{1,0} \\ \hat{u}_{2,0} \\ \vdots \\ \hat{u}_{M,0} \end{pmatrix} (\tilde{d}_{1,0} \tilde{d}_{2,0} \cdots \tilde{d}_{N-1,0}) + \begin{pmatrix} \hat{u}_{1,N} \\ \hat{u}_{2,N} \\ \vdots \\ \hat{u}_{M,N} \end{pmatrix} (\tilde{d}_{1,N} \tilde{d}_{2,N} \cdots \tilde{d}_{N-1,N}),$$

$$F = -\frac{2}{T} \begin{pmatrix} \hat{d}_{1,0} \\ \hat{d}_{2,0} \\ \vdots \\ \hat{d}_{M,0} \end{pmatrix} (\hat{u}_{0,1} \hat{u}_{0,2} \cdots \hat{u}_{0,N-1}) + \begin{pmatrix} \hat{u}_{1,0} \\ \hat{u}_{2,0} \\ \vdots \\ \hat{u}_{M,0} \end{pmatrix} (\tilde{d}_{1,0}^{(2)} \tilde{d}_{2,0}^{(2)} \cdots \tilde{d}_{N-1,0}^{(2)}) + \begin{pmatrix} \hat{u}_{1,N} \\ \hat{u}_{2,N} \\ \vdots \\ \hat{u}_{M,N} \end{pmatrix} (\tilde{d}_{1,N}^{(2)} \tilde{d}_{2,N}^{(2)} \cdots \tilde{d}_{N-1,N}^{(2)}),$$

$$Y = (\hat{u}_{1,1}, \hat{u}_{1,2}, \cdots, \hat{u}_{1,N-1}, \hat{u}_{2,1}, \hat{u}_{2,2}, \cdots, \hat{u}_{2,N-1}, \cdots, \hat{u}_{M,1}, \hat{u}_{M,2}, \cdots, \hat{u}_{M,N-1})^T,$$

$$Y_0 = (\hat{u}_{0,1}, \hat{u}_{0,2}, \cdots, \hat{u}_{0,N-1}, 0, 0, \cdots, 0, \cdots, 0, 0, \cdots, 0)^T,$$

$$R = (f_{1,1}, f_{1,2}, \cdots, f_{1,N-1}, f_{2,1}, f_{2,2}, \cdots, f_{2,N-1}, \cdots, f_{M,1}, f_{M,2}, \cdots, f_{M,N-1})^T,$$

$$G = (d_{1,1}, d_{1,2}, \cdots, d_{1,N-1}, d_{2,1}, d_{2,2}, \cdots, d_{2,N-1}, \cdots, d_{M,1}, d_{M,2}, \cdots, d_{M,N-1})^T.$$

4. 数值结果

Burgers 方程有精确孤波解及初边值[15]:

$$u(x, s) = \frac{2\omega e^{-\frac{\omega}{\alpha k^2}(kx - \omega s)}}{C_1 + e^{\frac{\omega}{\alpha k^2}(kx - \omega s)}}, \quad \varphi(x) = \frac{2\omega e^{-\frac{\omega}{\alpha k^2}kx}}{C_1 + e^{\frac{\omega}{\alpha k^2}kx}}, \quad (9)$$

$$g_1(s) = \frac{2\omega e^{-\frac{\omega}{\alpha k^2}(-k - \omega s)}}{C_1 + e^{\frac{\omega}{\alpha k^2}(-k - \omega s)}}, \quad g_2(s) = \frac{2\omega e^{-\frac{\omega}{\alpha k^2}(k - \omega s)}}{C_1 + e^{\frac{\omega}{\alpha k^2}(k - \omega s)}}.$$

这里 k, ω, α 和 C_1 都是常数。

在(1)式中时间方向令 $T = 1$ 。用下面的 L^∞ - 范数度量数值误差

$$E_{M,N} = \max_{1 \leq l \leq M, 1 \leq k \leq N-1} |u_{M,N}(x_k, t_l) - u(x_k, t_l)|.$$

图 1 是(1)式中时间方向 $T = 1$, (9)式中的参数 $k = 0.5, \omega = 0.3, C_1 = 2\omega/k, \alpha = 1$, 时间方向插值多项式次数 $M = 7$ 时最大值误差 $E_{M,N}$ 随空间插值多项式次数 N 的变化情况, 可以看出误差随 N 的增大而快速减小, 算法格式在空间方向有谱精度, 而且空间方向和时间方向所用的模数相差不大, 算法格式平衡了两个方向的代价, 这是所提算法的一个优点。

图 2 的参数和图 1 相同, 空间方向插值多项式次数 $N = 15$ 时最大值误差 $E_{M,N}$ 随时间插值多项式次数 M 的变化情况, 表明算法格式在时间方向有谱精度。

图 3 的参数和图 1 的参数相同, 表明在迭代 30 次时 CPU 所耗费的时间秒数, 表明算法格式的高效性。

图 4 是(1)式中时间方向 $T = 10$, (9)式中的参数 $k = 0.5, \omega = 0.3, C_1 = 2\omega/k, \alpha = 1$, 时间方向插值多项式次数 $M = 20$ 时最大值误差 $E_{M,N}$ 随空间插值多项式次数 N 的变化情况, 可以看出算法格式对(1)式中时间方向 T 取较大值仍然得到很好的结果。

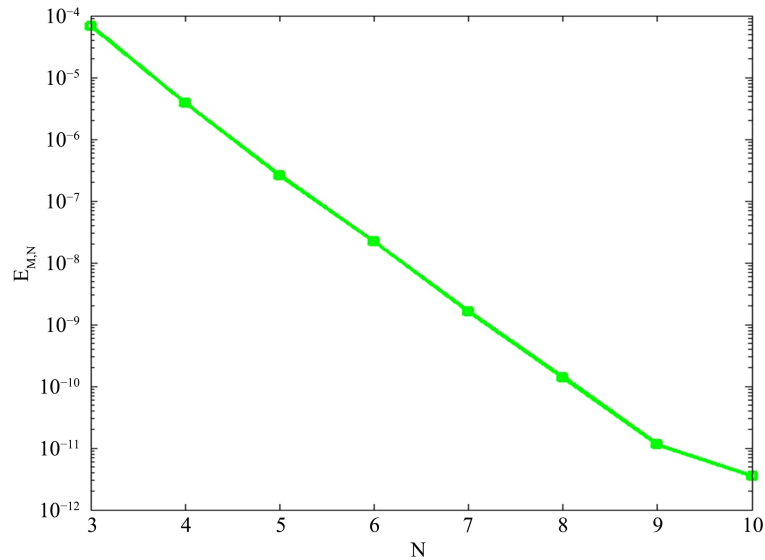


Figure 1. L^∞ - error with $M = 7, k = 0.5, \omega = 0.3, C_1 = 2\omega/k, \alpha = 1$

图 1. $M = 7, k = 0.5, \omega = 0.3, C_1 = 2\omega/k, \alpha = 1$ 时的 L^∞ - 误差

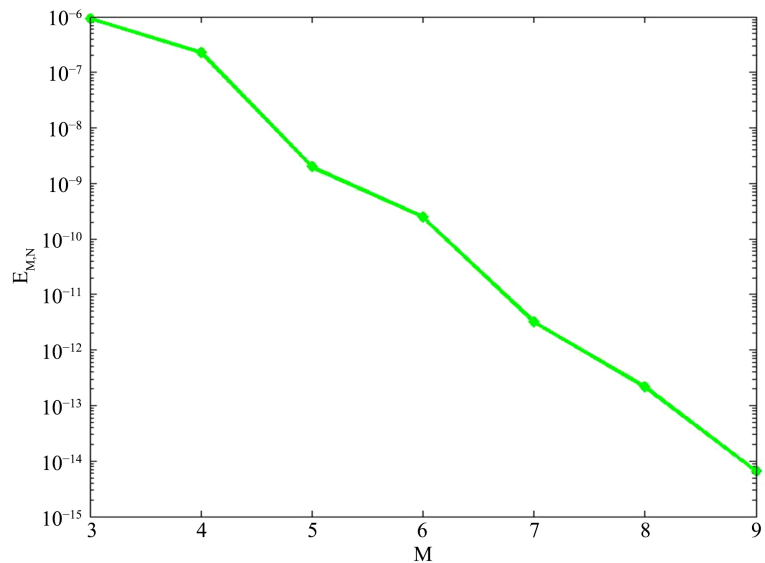


Figure 2. L^∞ - error with $N = 15, k = 0.5, \omega = 0.3, C_1 = 2\omega/k, \alpha = 1$

图 2. $N = 15, k = 0.5, \omega = 0.3, C_1 = 2\omega/k, \alpha = 1$ 时的 L^∞ - 误差

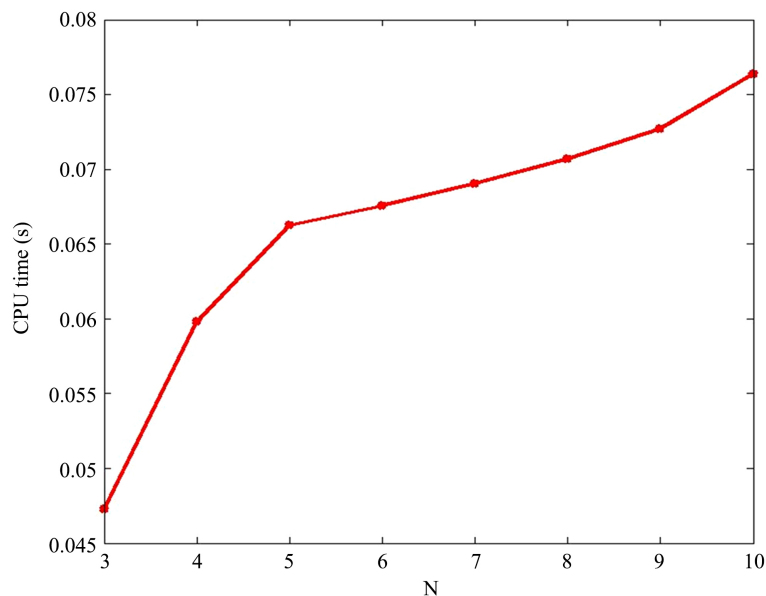


Figure 3. Costing seconds of CPU with $M = 7, k = 0.5, \omega = 0.3, C_1 = 2\omega/k, \alpha = 1$

图 3. $M = 7, k = 0.5, \omega = 0.3, C_1 = 2\omega/k, \alpha = 1$ 时 CPU 耗费时间秒数

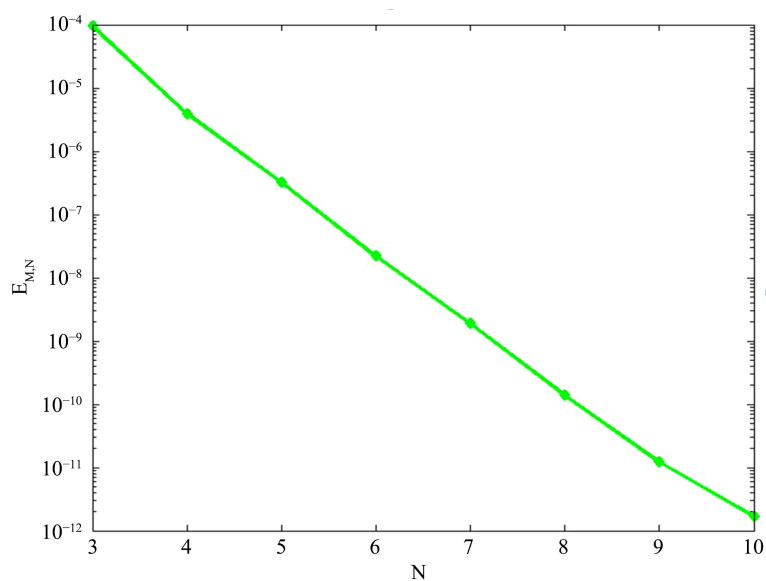


Figure 4. L^∞ - error with $M = 20, k = 0.5, \omega = 0.3, C_1 = 2\omega/k, \alpha = 1$

图 4. $M = 20, k = 0.5, \omega = 0.3, C_1 = 2\omega/k, \alpha = 1$ 时的 L^∞ - 误差

5. 结论

本文针对 Burgers 方程初边值问题用时空 Legendre-谱配置方法构造了问题的二元 Lagrange 插值逼近格式, 利用已有的微分矩阵将 Burgers 方程转化为非线性矩阵方程, 再转化为等价形式的非线性方程组, 利用通常的不动点迭代求解。算法格式简单有效, 数值实验表明在时间和空间方向所用节点数相差很小, 总节点个数 $21 \leq MN \leq 200$, 大大地减少了工作量, 这是所提算法的主要优点。另外, 本文所提算法格式也可以用来求解其他经典的数学物理问题。

基金项目

国家自然科学基金(批准号: 11371123); 河南科技大学 srtp 基金(批准号: 202010464053); 河南自然科学基金(批准号: 202300410156)。

参考文献

- [1] Burger, J.M. (1948) A Mathematical Model Illustrating the Theory of Turbulence. In: Von Mises, R. and Von Karman, T., Eds., *Advances in Applied Mechanics*, Academic Press, New York, 171-199.
[https://doi.org/10.1016/S0065-2156\(08\)70100-5](https://doi.org/10.1016/S0065-2156(08)70100-5)
- [2] Benton, E. and Platzman, G.W. (1972) A Table of Solutions of the One-Dimensional Burgers' Equation. *Quarterly of Applied Mathematics*, **30**, 195-212. <https://doi.org/10.1090/qam/306736>
- [3] 闵涛, 任菊成, 耿蓓, 等. Chebyshev 谱-Euler 混合方法求解一类非线性 Burgers 方程[J]. 数值计算与计算机应用, 2013, 34(2): 3-10.
- [4] 高巍, 张宝, 李宏, 刘洋. Burgers 方程的高阶紧致有限体积解法[J]. 应用数学, 2016, 29(2): 331-339.
- [5] 王亚洲, 秦国良, 和文强, 包振忠. 时空耦合谱元方法求解一维 Burgers 方程[J]. 西安交通大学学报, 2017, 51(1): 45-50.
- [6] 陈龙, 张学莹, 胡婷婷. 基于迎风 LDQ 方法解 Burgers 方程[J]. 西北师范大学学报, 2017, 53(6): 10-15.
- [7] Tang, J.G. and Ma, H.P. (2007) A Legendre Spectral Method in Time for First-Order Hyperbolic Equations. *Applied Numerical Mathematics*, **57**, 1-11. <https://doi.org/10.1016/j.apnum.2005.11.009>
- [8] Liu, L. and Ma, H.P. (2020) Space-Time Spectral Method for Parabolic Inverse Problem with Unknown Control Parameter. *Journal of Numerical Methods and Computer Applications*, **41**, 19-26.
- [9] Shen, J., Tang, T. and Wang, L.L. (2011) *Spectral Methods: Algorithms, Analysis and Applications*. Springer-Verlag, Berlin.
- [10] 王天军, 殷政伟. Legendre-Gauss-Lobatto 节点的一个注记[J]. 河南科技大学学报: 自然科学版, 2012, 33(1): 71-74.
- [11] Wang, Z.Q. and Guo, B.Y. (2012) Legendre-Gauss-Radau Collocation Method for Solving Initial Value Problems of First Order Ordinary Differential Equations. *Journal of Scientific Computing*, **52**, 226-255.
<https://doi.org/10.1007/s10915-011-9538-7>
- [12] 王天军. 一类线性奇异边值问题的谱配置方法[J]. 河南科技大学学报: 自然科学版, 2013, 34(6): 75-78.
- [13] Jia, H.L. and Wang, Z.Q. (2013) Chebyshev-Hermite Spectral Collocation Method for KdV Equations. *Communications on Applied Mathematics and Computation*, **27**, 1-8.
- [14] 马亚楠, 王天军, 李冰冰. Korteweg-de Vries 方程的时空谱置方法[J]. 数值计算与计算机应用, 2020. (接收)
- [15] 杨先林. Burgers 方程的精确解[J]. 动力学与控制学报, 2006, 4(4): 308-311.