Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2021, 10(5), 1541-1549**
Published Online May 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2021.105164

Hans汉斯

交错代数双模的无穷小形变

臧　蕊

辽宁师范大学数学学院，辽宁　大连
Email: 823517249@qq.com

收稿日期：2021年4月17日；录用日期：2021年5月2日；发布日期：2021年5月21日

摘　要

本文主要研究交错代数双模的无穷小形变。讨论了交错代数的形变，给出了交错代数双模的无穷小形变的定义，讨论两个无穷小形变的等价条件和双模的无穷小形变是平凡的条件。文章的最后给出了交错代数上Nijenhuis算子的定义，并且找到交错代数双模的平凡形变与Nijenhuis算子结构的关系。

关键词

交错代数，双模，Nijenhuis算子，无穷小变形

Infinitesimal Deformation of the Bimodules over Alternative Algebras

Rui Zang

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning
Email: 823517249@qq.com

Received: Apr. 17th, 2021; accepted: May 2nd, 2021; published: May 21st, 2021

Abstract

In this paper, we study the infinitesimal deformation of the bimodules over alternative algebras. The deformation of alternative algebra is discussed, and the definition of infinitesimal deformation of the bimodules over alternative algebras is given. The equivalent conditions of two infinitesimal deformations are discussed. We also discuss the conditions that make infinitesimal deformation of the bimodules be trivial. At the end of the paper, the Nijenhuis operators of alternative algebras are defined, and the relationship between trivial deformation and Nijenhuis operator structure is also found.

文章引用: 臧蕊. 交错代数双模的无穷小形变[J]. 应用数学进展, 2021, 10(5): 1541-1549.
DOI: 10.12677/aam.2021.105164

Keywords

Alternative Algebra, Bimodule, Nijenhuis Operator, Infinitesimal Deformation

1. 前言

交错代数是一类非常重要的非结合代数[1] [2] [3]。它和李代数[1]，马尔采夫代数[3]，约当代数[4]有着非常密切的联系。交错代数弱化了结合代数的结合性，根据结合代数和交错代数之间的关系，我们很自然地考虑交错代数上的代数结构。文献[5]提出了许多形变的细节，形变与代数上的结构有很密切的关系。本文研究了交错代数双模的无穷小变形并且介绍了 Nijenhuis 结构的定义，本文的研究结果也可以为交错代数双模上其他结构的研究打下一定的基础。

2. 一类特殊的交错代数的构造

定义 2.1 [6] 设 A 是域 F 上的向量空间，如果 A 中有双线性代数运算 $(x,y)\to x\circ y$，满足 $\forall x,y,z\in A$，

$$(x,x,y)=(y,x,x)=0 \tag{2.1}$$

其中 $(x,y,z)=(x\circ y)\circ z-x\circ(y\circ z)$，则称 $(A,\circ)$ 为交错代数。

引理 2.1 [6] $\forall x_1,x_2,y\in A$，当域 F 的特征不是 2 时，(2.1)有以下等价形式：

$$(x_1,x_2,y)+(x_2,x_1,y)=0 \tag{2.2}$$

$$(y,x_1,x_2)+(y,x_2,x_1)=0 \tag{2.3}$$

即

$$(x_1\circ x_2)\circ y-x_1\circ(x_2\circ y)+(x_2\circ x_1)\circ y-x_2\circ(x_1\circ y)=0 \tag{2.4}$$

$$(y\circ x_1)\circ x_2-y\circ(x_1\circ x_2)+(y\circ x_2)\circ x_1-y\circ(x_2\circ x_1)=0. \tag{2.5}$$

命题 2.2 若 $(A,\circ)$ 是交错代数，$\omega:\otimes^2 A\to A$ 是双线性映射，定义

$$x\circ_t y=x\circ y+t\omega(x,y),\quad \forall x,y\in A \tag{2.6}$$

其中 t 为参数。则 $(A,\circ_t)$ 是交错代数当且仅当对任意的 $x_1,x_2,y\in A$，有下列条件成立：

$$\begin{aligned}&\omega(x_1,x_2)\circ y-x_1\circ\omega(x_2,y)+\omega(x_1\circ x_2,y)-\omega(x_1,x_2\circ y)+\omega(x_2,x_1)\circ y\\&-x_2\circ\omega(x_1,y)+\omega(x_2\circ x_1,y)-\omega(x_2,x_1\circ y)=0\end{aligned} \tag{2.7}$$

$$\omega(\omega(x_2,x_1),y)-\omega(x_2,\omega(x_1,y))+\omega(\omega(x_1,x_2),y)-\omega(x_1,\omega(x_2,y))=0 \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned}&\omega(y,x_1)\circ x_2-y\circ\omega(x_1,x_2)+\omega(y\circ x_1,x_2)-\omega(y,x_1\circ x_2)+\omega(y,x_2)\circ x_1\\&-y\circ\omega(x_2,x_1)+\omega(y\circ x_2,x_1)-\omega(y,x_2\circ x_1)=0\end{aligned} \tag{2.9}$$

$$\omega(\omega(y,x_1),x_2)-\omega(y,\omega(x_1,x_2))+\omega(\omega(y,x_2),x_1)-\omega(y,\omega(x_2,x_1))=0 \tag{2.10}$$

此时，称 $(A,\circ_t)$ 为 $(A,\circ)$ 的形变。

证明：由引理 2.1，$(A,\circ_t)$ 是交错代数当且仅当任意的 $x_1,x_2,y\in A$ 满足等式(2.4)和(2.5)。直接计算得

$$\begin{aligned}
&(x_1\circ_t x_2)\circ_t y-x_1\circ_t(x_2\circ_t y)+(x_2\circ_t x_1)\circ_t y-x_2\circ_t(x_1\circ_t y)\\
&=(x_1\circ x_2+t\omega(x_1,x_2))\circ y+t\omega(x_1\circ x_2+t\omega(x_1,x_2),y)-x_1\circ(x_2\circ y+t\omega(x_2,y))\\
&\quad -t\omega(x_1,x_2\circ y+t\omega(x_2,y))+(x_2\circ x_1+t\omega(x_2,x_1))\circ y+t\omega(x_2\circ x_1+t\omega(x_2,x_1),y)\\
&\quad -x_2\circ(x_1\circ y+t\omega(x_1,y))-t\omega(x_2,x_1\circ y+t\omega(x_1,y))\\
&=t\big[\omega(x_1,x_2)\circ y-x_1\circ\omega(x_2,y)+\omega(x_1\circ x_2,y)-\omega(x_1,x_2\circ y)\\
&\quad +\omega(x_2,x_1)\circ y-x_2\circ\omega(x_1,y)+\omega(x_2\circ x_1,y)-\omega(x_2,x_1\circ y)\big]\\
&\quad +t^2\big[\omega(\omega(x_2,x_1),y)-\omega(x_2,\omega(x_1,y))+\omega(\omega(x_1,x_2),y)-\omega(x_1,\omega(x_2,y))\big]
\end{aligned}$$

由 t 的任意性，$\circ_t$ 满足等式(2.4)当且仅当 ω 满足等式(2.7)，(2.8)。同理，

$$\begin{aligned}
&(y\circ_t x_1)\circ_t x_2-y\circ_t(x_1\circ_t x_2)+(y\circ_t x_2)\circ_t x_1-y\circ_t(x_2\circ_t x_1)\\
&=(y\circ x_1+t\omega(y,x_1))\circ x_2+t\omega(y\circ x_1+t\omega(y,x_1),x_2)-y\circ(x_1\circ x_2+t\omega(x_1,x_2))\\
&\quad -t\omega(y,x_1\circ x_2+t\omega(x_1,x_2))+(y\circ x_2+t\omega(y,x_2))\circ x_1+t\omega(y\circ x_2+t\omega(y,x_2),x_1)\\
&\quad -y\circ(x_2\circ x_1+t\omega(x_2,x_1))-t\omega(y,x_2\circ x_1+t\omega(x_2,x_1))\\
&=t\big[\omega(y,x_1)\circ x_2-y\circ\omega(x_1,x_2)+\omega(y\circ x_1,x_2)-\omega(y,x_1\circ x_2)\\
&\quad +\omega(y,x_2)\circ x_1-y\circ\omega(x_2,x_1)+\omega(y\circ x_2,x_1)-\omega(y,x_2\circ x_1)\big]\\
&\quad +t^2\big[\omega(\omega(y,x_1),x_2)-\omega(y,\omega(x_1,x_2))+\omega(\omega(y,x_2),x_1)-\omega(y,\omega(x_2,x_1))\big]
\end{aligned}$$

由 t 的任意性，$\circ_t$ 满足等式(2.5)当且仅当 ω 满足等式(2.9)，(2.10)。综上，结论成立。

3. 交错代数双模的无穷小形变

定义 3.1 [2] 设 $(A,\circ)$ 是交错代数并且 V 是向量空间，$L,R:A\to End(V)$ 是两个线性映射。如果对任意的 $x,y\in A$，有

$$L(x^2)=L(x)L(x) \tag{3.1}$$

$$R(x^2)=R(x)R(x) \tag{3.2}$$

$$R(y)L(x)-L(x)R(y)=R(x\circ y)-R(y)R(x) \tag{3.3}$$

$$L(y\circ x)-L(y)L(x)=L(y)R(x)-R(x)L(y) \tag{3.4}$$

则称 V 或 (V,L,R) 是 A 的双模，简称 A-双模。

命题 3.1 设 $(A,\circ)$ 是交错代数，$(A,\circ_t)$ 是 $(A,\circ)$ 的形变，(V,L,R) 是交错代数 $(A,\circ)$ 的双模，$\sigma:A\to End(V)$ 和 $\tau:A\to End(V)$ 是线性映射，利用 σ,τ 定义两个线性映射 $L^t,R^t:A\to End(V)$，其中 $L^t(x)=L(x)+t\sigma(x)$，$R^t(x)=R(x)+t\tau(x)$，$\forall x\in A$，t 为参数，则 (V,L^t,R^t) 是交错代数 $(A,\circ_t)$ 的双模当且仅当对 $\forall x,y\in A$，有下列条件成立：

$$L(\omega(x,x))+\sigma(x\circ x)-L(x)\sigma(x)-\sigma(x)L(x)=0 \tag{3.5}$$

$$\sigma(\omega(x,x))-\sigma(x)\sigma(x)=0 \tag{3.6}$$

$$R(\omega(x,x))+\tau(x\circ x)-R(x)\tau(x)-\tau(x)R(x)=0 \tag{3.7}$$

$$\tau(\omega(x,x))-\tau(x)\tau(x)=0 \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned}&R(y)\sigma(x)-\sigma(x)R(y)+\tau(y)L(x)-L(x)\tau(y)-R(\omega(x,y))\\&-\tau(x\circ y)+R(y)\tau(x)+\tau(y)R(x)=0\end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\tau(y)\sigma(x)-\sigma(x)\tau(y)-\tau(\omega(x,y))+\tau(y)\tau(x)=0 \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned}&L(y)\tau(x)-\tau(x)L(y)+\sigma(y)R(x)-R(x)\sigma(y)-L(\omega(y,x))\\&-\sigma(y\circ x)+L(y)\sigma(x)+\sigma(y)L(x)=0\end{aligned} \tag{3.11}$$

$$\sigma(y)\tau(x)-\tau(x)\sigma(y)-\sigma(\omega(y,x))+\sigma(y)\sigma(x)=0 \tag{3.12}$$

证明：由定义 3.1，(V,L^t,R^t)是交错代数$(A,\circ_t)$的双模当且仅当$\forall x,y\in A$满足等式(3.1)~(3.4)。直接计算得

$$\begin{aligned}&L^t(x\circ_t x)-L^t(x)L^t(x)\\&=t\left[L(\omega(x,x))+\sigma(x\circ x)-L(x)\sigma(x)-\sigma(x)L(x)\right]+t^2\left[\sigma(\omega(x,x))-\sigma(x)\sigma(x)\right]\end{aligned}$$

由 t 的任意性，L^t，R^t 满足(3.1)当且仅当(3.5)，(3.6)成立。由于

$$\begin{aligned}&R^t(x\circ_t x)-R^t(x)R^t(x)\\&=t\left[R(\omega(x,x))+\tau(x\circ x)-R(x)\tau(x)-\tau(x)R(x)\right]+t^2\left[\tau(\omega(x,x))-\tau(x)\tau(x)\right]\end{aligned}$$

由 t 的任意性，L^t，R^t 满足(3.2)当且仅当(3.7)，(3.8)成立。由于

$$\begin{aligned}&R^t(y)L^t(x)-L^t(x)R^t(y)-R^t(x\circ_t y)+R^t(y)R^t(x)\\&=t\left[R(y)\sigma(x)-\sigma(x)R(y)+\tau(y)L(x)-L(x)\tau(y)\right.\\&\quad\left.-R(\omega(x,y))-\tau(x\circ y)+R(y)\tau(x)+\tau(y)R(x)\right]\\&\quad+t^2\left[\tau(y)\sigma(x)-\sigma(x)\tau(y)-\tau(\omega(x,y))+\tau(y)\tau(x)\right]\end{aligned}$$

由 t 的任意性，L^t，R^t 满足(3.3)当且仅当(3.9)，(3.10)成立。由于

$$\begin{aligned}&L^t(y\circ_t x)-L^t(y)L^t(x)-L^t(y)R^t(x)+R^t(x)L^t(y)\\&=-t\left[L(y)\tau(x)-\tau(x)L(y)+\sigma(y)R(x)-R(x)\sigma(y)\right.\\&\quad\left.-L(\omega(y,x))-\sigma(y\circ x)+L(y)\sigma(x)+\sigma(y)L(x)\right]\\&\quad-t^2\left[\sigma(y)\tau(x)-\tau(x)\sigma(y)-\sigma(\omega(y,x))+\sigma(y)\sigma(x)\right]\end{aligned}$$

由 t 的任意性，L^t，R^t 满足(3.4)当且仅当(3.11)，(3.12)成立。综上，结论成立。

定义 3.2 设$(A,\circ)$是交错代数，(V,L,R)是$(A,\circ)$的双模。如果$(A,\circ_t)$是$(A,\circ)$的形变并且(V,L^t,R^t)是$(A,\circ_t)$的双模，则称(ω,σ,τ)生成 A-双模 V 的一个无穷小形变。

由命题 2.2 和命题 3.1 知，交错代数$(A,\circ_t)$的双模(V,L^t,R^t)是 A-双模 V 的无穷小形变当且仅当 ω,σ,τ 满足等式(2.7)~(2.10)和(3.5)~(3.12)。

定义 3.3 设(V,L,R)和(V',L',R')分别是交错代数$(A,\circ)$和$(A',\circ')$的双模，如果存在交错代数的同态映射 $\varphi_{A'}:A'\to A$ 和线性映射 $\varphi_{V'}:V'\to V$，且它们满足

$$\varphi_{V'}L'(x)=L(\varphi_{A'}(x))\varphi_{V'},\quad \varphi_{V'}R'(x)=R(\varphi_{A'}(x))\varphi_{V'},\quad \forall x\in A'$$

则称($\varphi_{A'}$，$\varphi_{V'}$)为从双模(V',L',R')到双模(V,L,R)的同态。

定义 3.4 设 $(A,\circ)$ 是交错代数，(V,L,R) 是 A 的双模，交错代数 $(A,\circ_t)$ 的双模 (V,L^t,R^t) 和交错代数 $(A,\circ_t')$ 的双模 (V,L'',R'') 分别是 A-双模 V 的两个无穷小形变。如果存在 $N\in End(A)$ 和 $S\in End(V)$，使得 (Id_A+tN,Id_V+tS) 是从双模 (V,L'',R'') 到双模 (V,L^t,R^t) 的同态，即对任意的 $x,y\in A$，有下列条件成立：

$$(Id_A+tN)(x\circ_t' y)=(Id_A+tN)(x)\circ_t(Id_A+tN)(y) \tag{3.13}$$

$$(Id_V+tS)L''(x)=L^t((Id_A+tN)(x))(Id_V+tS) \tag{3.14}$$

$$(Id_V+tS)R''(x)=R^t((Id_A+tN)(x))(Id_V+tS) \tag{3.15}$$

则称这两个无穷小形变是等价的。如果 A-双模 V 的一个无穷小形变和 A-双模 V 是等价的，则称该形变是平凡的。

命题 3.2 设 $(A,\circ)$ 是交错代数，(V,L,R) 是 A 的双模，$N\in End(A)$，$S\in End(V)$，$(A,\circ_t)$ 是 $(A,\circ)$ 的形变，则 $(A,\circ_t)$ 的双模 (V,L^t,R^t) 是平凡的无穷小形变当且仅当对任意的 $x,y\in A$，有下列条件成立：

$$\omega(x,y)=N(x)\circ y+x\circ N(y)-N(x\circ y) \tag{3.16}$$

$$N(\omega(x,y))=N(x)\circ N(y) \tag{3.17}$$

$$\sigma(x)=L(N(x))+L(x)S-SL(x) \tag{3.18}$$

$$L(N(x))S=S\sigma(x) \tag{3.19}$$

$$\tau(x)=R(N(x))+R(x)S-SR(x) \tag{3.20}$$

$$R(N(x))S=S\tau(x) \tag{3.21}$$

证明： 由平凡无穷小形变的定义知，交错代数 $(A,\circ_t)$ 的双模 (V,L^t,R^t) 是平凡的无穷小形变当且仅当对任意的 $x,y\in A$，有

$$(Id_A+tN)(x\circ_t y)=(Id_A+tN)(x)\circ(Id_A+tN)(y) \tag{3.22}$$

$$(Id_V+tS)L^t(x)=L((Id_A+tN)(x))(Id_V+tS) \tag{3.23}$$

$$(Id_V+tS)R^t(x)=R((Id_A+tN)(x))(Id_V+tS) \tag{3.24}$$

考虑等式(3.22)，由于

$$\begin{aligned}&(Id_A+tN)(x\circ_t y)-(Id_A+tN)(x)\circ(Id_A+tN)(y)\\&=(x\circ y+t\omega(x,y))+tN(x\circ y+t\omega(x,y))-(x+tN(x))\circ(y+tN(y))\\&=t[\omega(x,y)-N(x)\circ y-x\circ N(y)+N(x\circ y)]+t^2[N(\omega(x,y))-N(x)\circ N(y)]\end{aligned}$$

则由 t 的任意性，(3.22)成立当且仅当(3.16)，(3.17)成立。考虑等式(3.23)，由于

$$\begin{aligned}&(Id_V+tS)R^t(x)-R((Id_A+tN)(x))(Id_V+tS)\\&=R(x)+t\tau(x)+tS(R(x)+t\tau(x))-R(x+tN(x))-tR(x+tN(x))S\\&=t[\tau(x)-R(N(x))-R(x)S+SR(x)]+t^2[-R(N(x))S+S\tau(x)]\end{aligned}$$

则由 t 的任意性，(3.23)成立当且仅当(3.18)，(3.19)成立。考虑等式(3.24)，由于

$$\begin{aligned}&\left(Id_V+tS\right)R^t\left(x\right)-R\left(\left(Id_A+tN\right)\left(x\right)\right)\left(Id_V+tS\right)\\&=R\left(x\right)+t\tau\left(x\right)+tS\left(R\left(x\right)+t\tau\left(x\right)\right)-R\left(x+tN\left(x\right)\right)-tR\left(x+tN\left(x\right)\right)S\\&=t\left[\tau\left(x\right)-R\left(N\left(x\right)\right)-R\left(x\right)S+SR\left(x\right)\right]+t^2\left[-R\left(N\left(x\right)\right)S+S\tau\left(x\right)\right]\end{aligned}$$

则由 t 的任意性，(3.24)成立当且仅当(3.20)，(3.21)成立。

综上，交错代数 $(A,\circ_t)$ 的双模 (V,L^t,R^t) 是平凡的无穷小形变当且仅当对任意的 $x,y\in A$，有(3.16)~(3.21)成立。

定义 3.5 如果交错代数 $(A,\circ)$ 上的线性变换 $N:A\to A$ 满足

$$N(x)\circ N(y)=N\left(N(x)\circ y+x\circ N(y)-N(x\circ y)\right) \tag{3.25}$$

$\forall x,y\in A$，则称 N 是交错代数 $(A,\circ)$ 的 Nijenhuis 算子。

命题 3.3 设 $(A,\circ)$ 是交错代数，(V,L,R) 是 $(A,\circ)$ 的双模，$N\in End(A)$，$S\in End(V)$，$\sigma,\tau:A\to End(V)$ 是线性映射，如果 N,S,σ,τ 满足(3.16)~(3.21)，则 N 是交错代数 $(A,\circ)$ 的 Nijenhuis 算子，且满足下面两个等式：

$$L\left(N(x)\right)S(v)=S\left(L\left(N(x)\right)v+L(x)S(v)-S\left(L(x)v\right)\right),\ \forall x\in A,\ v\in V \tag{3.26}$$

$$R\left(N(x)\right)S(v)=S\left(R\left(N(x)\right)v+R(x)S(v)-S\left(R(x)v\right)\right),\ \forall x\in A,\ v\in V \tag{3.27}$$

证明： $\forall x,y\in A$，将(3.16)代入(3.17)中，有

$$N(x)\circ N(y)=N\left(N(x)\circ y+x\circ N(y)-N(x\circ y)\right)$$

即 N 是 Nijenhuis 算子。将(3.18)代入(3.19)中，有(3.26)成立。将(3.20)代入(3.21)中，有(3.27)成立。

命题 3.4 设 (V,L,R) 是交错代数 $(A,\circ)$ 的双模，$N\in End(A)$，$S\in End(V)$。如果 N 是交错代数 $(A,\circ)$ 的 Nijenhuis 算子，且 S 满足(3.26)和(3.27)，定义映射 $\omega:A\otimes A\to A$，$\sigma,\tau\in End(V)$ 且 ω,σ,τ 满足下列条件：

$$\omega(x,y)=N(x)\circ y+x\circ N(y)-N(x\circ y) \tag{3.28}$$

$$\sigma(x)=L\left(N(x)\right)+L(x)S-SL(x) \tag{3.29}$$

$$\tau(x)=R\left(N(x)\right)+R(x)S-SR(x) \tag{3.30}$$

其中 $x,y\in A$，则 (ω,σ,τ) 生成 A-双模 V 的一个平凡的无穷小形变。

证明： 要证 (ω,σ,τ) 生成 A-双模 V 的一个无穷小形变，须证 $(A,\circ_t)$ 是交错代数并且 (V,L^t,R^t) 是 $(A,\circ_t)$ 的双模，即证所设 ω,σ,τ 满足等式(2.7)~(2.10)和(3.5)~(3.12)。$\forall x_1,x_2,y\in A$，由于

$$\begin{aligned}&\omega\left(k_1x_1+k_2x_2,y\right)-k_1\omega\left(x_1,y\right)-k_2\omega\left(x_2,y\right)\\&=N\left(k_1x_1+k_2x_2\right)\circ y+\left(k_1x_1+k_2x_2\right)\circ N(y)-N\left(\left(k_1x_1+k_2x_2\right)\circ y\right)\\&\quad-k_1N\left(x_1\right)\circ y-k_1x_1\circ N(y)+k_1N\left(x_1\circ y\right)-k_2N\left(x_2\right)\circ y-k_2x_2\circ N(y)+k_2N\left(x_2\circ y\right)\\&=k_1\left(N\left(x_1\right)\circ y+x_1\circ N(y)-N\left(x_1\circ y\right)-N\left(x_1\right)\circ y-x_1\circ N(y)+N\left(x_1\circ y\right)\right)\\&\quad+k_2\left(N\left(x_2\right)\circ y+x_2\circ N(y)-N\left(x_2\circ y\right)-N\left(x_2\right)\circ y-x_2\circ N(y)+N\left(x_2\circ y\right)\right)\\&=0\end{aligned}$$

所以 ω 是双线性映射，又因为

$$\omega(x_1,x_2)\circ y-x_1\circ\omega(x_2,y)+\omega(x_1\circ x_2,y)-\omega(x_1,x_2\circ y)$$
$$+\omega(x_2,x_1)\circ y-x_2\circ\omega(x_1,y)+\omega(x_2\circ x_1,y)-\omega(x_2,x_1\circ y)$$
$$=(N(x_1)\circ x_2)\circ y+(x_1\circ N(x_2))\circ y-N(x_1\circ x_2)\circ y-x_1\circ(N(x_2)\circ y)$$
$$-x_1\circ(x_2\circ N(y))+x_1\circ N(x_2\circ y)+N(x_1\circ x_2)\circ y+(x_1\circ x_2)\circ N(y)$$
$$-N((x_1\circ x_2)\circ y)-N(x_1)\circ(x_2\circ y)-x_1\circ N(x_2\circ y)+N(x_1\circ(x_2\circ y))$$
$$+(N(x_2)\circ x_1)\circ y+(x_2\circ N(x_1))\circ y-N(x_2\circ x_1)\circ y-x_2\circ(N(x_1)\circ y)$$
$$-x_2\circ(x_1\circ N(y))+x_2\circ N(x_1\circ y)+N(x_2\circ x_1)\circ y+(x_2\circ x_1)\circ N(y)$$
$$-N((x_2\circ x_1)\circ y)-N(x_2)\circ(x_1\circ y)-x_2\circ N(x_1\circ y)+N(x_2\circ(x_1\circ y))$$
$$=\left[(N(x_1)\circ x_2)\circ y-N(x_1)\circ(x_2\circ y)+(x_2\circ N(x_1))\circ y-x_2\circ(N(x_1)\circ y)\right]$$
$$+\left[(x_1\circ N(x_2))\circ y-x_1\circ(N(x_2)\circ y)+(N(x_2)\circ x_1)\circ y-N(x_2)\circ(x_1\circ y)\right]$$
$$+\left[(x_1\circ x_2)\circ N(y)-x_1\circ(x_2\circ N(y))+(x_2\circ x_1)\circ N(y)-x_2\circ(x_1\circ N(y))\right]$$
$$+N\left(x_1\circ(x_2\circ y)-(x_1\circ x_2)\circ y+x_2\circ(x_1\circ y)-(x_2\circ x_1)\circ y\right)$$
$$=0$$

故 ω 满足等式(2.7)。

用同样的方法将 ω,σ,τ 代入等式(2.8)~(2.10)和(3.5)~(3.12)，利用已知条件，得以上等式均成立。故 (ω,σ,τ) 生成 A-双模 V 的一个无穷小形变。由 N 是交错代数 $(A,\circ)$ 的 Nijenhuis 算子及(3.28)知(3.16)和(3.17)成立，由 S 满足(3.26)且等式(3.29)成立知(3.18)和(3.19)成立，由 S 满足(3.27)且等式(3.30)成立知(3.20)和(3.21)成立，故此无穷小形变也满足条件(3.16)~(3.21)，也就是说，这个形变是平凡的。综上，此命题得证。

4. 交错代数半直积的 Nijenhuis 算子

由[7]知，设 $(A,\circ)$ 是交错代数，V 是向量空间，$L,R:A\to End(V)$ 是两个线性映射。定义向量空间的直和 $A\oplus V$ 上的乘法

$$(x_1+v_1)\Diamond(x_2+v_2)=x_1\circ x_2+L(x_1)v_2+R(x_2)v_1,\quad \forall x_1,x_2\in A,\ \ v_1,v_2\in V \tag{4.1}$$

则 (V,L,R) 是交错代数 $(A,\circ)$ 的双模当且仅当 $(A\oplus V,\Diamond)$ 是交错代数，此时称 $(A\oplus V,\Diamond)$ 为 A 和 V 的半直积，记为 $A\ltimes_{L,R}V$，简记为 $A\ltimes V$。

命题 4.1 设 (V,L,R) 是交错代数 $(A,\circ)$ 的双模，$N\in End(A)$，$S\in End(V)$，则 N 是交错代数 $(A,\circ)$ 的 Nijenhuis 算子且 S 满足(3.26)和(3.27)当且仅当 $N+S$ 是交错代数半直积 $A\ltimes_{L,R}V$ 的 Nijenhuis 算子。

证明： 必要性。由 N 是交错代数 $(A,\circ)$ 的 Nijenhuis 算子，知

$$N(x_1)\circ N(x_2)=N\left(N(x_1)\circ x_2+x_1\circ N(x_2)-N(x_1\circ x_2)\right),\quad \forall x_1,x_2\in A。$$

若要证 $N+S$ 是半直积交错代数 $A\ltimes_{L,R}V$ 的 Nijenhuis 算子，则由定义 3.5 知须证 $N+S$ 满足等式(3.25)。$\forall x_1,x_2\in A$，$v_1,v_2\in V$，直接计算得

$$
\begin{aligned}
&(N+S)\big((N+S)(x_1+v_1)\lozenge(x_2+v_2)+(x_1+v_1)\lozenge(N+S)(x_2+v_2)\\
&-(N+S)\big((x_1+v_1)\lozenge(x_2+v_2)\big)\big)-\big(N(x_1)+S(v_1)\big)\lozenge\big(N(x_2)+S(v_2)\big)\\
&=(N+S)\big(\big(N(x_1)+S(v_1)\big)\lozenge(x_2+v_2)+(x_1+v_1)\lozenge\big(N(x_2)+S(v_2)\big)\\
&\ -(N+S)\big(x_1\circ x_2+L(x_1)v_2+R(x_2)v_1\big)\big)\\
&\ -\big(N(x_1)\circ N(x_2)+L\big(N(x_1)\big)S(v_2)+R\big(N(v_1)\big)S(v_1)\big)\\
&=(N+S)\big(N(x_1)\circ x_2+x_1\circ N(v_1)-N(x_1\circ x_2)+L\big(N(x_1)\big)v_2+L(x_1)S(v_2)\\
&\ -S\big(L(x_1)v_2\big)+R\big(N(x_2)\big)v_1+R(x_2)S(v_1)-S\big(R(x_2)v_1\big)\\
&\ -\big(N(x_1)\circ N(v_1)+L\big(N(x_1)\big)S(v_2)+R\big(N(x_2)\big)S(v_1)\big)\\
&=N\big(N(x_1)\circ x_2+x_1\circ N(x_2)-N(x_1\circ x_2)\big)\\
&\ +S\big(L\big(N(x_1)\big)v_2+L(x_1)S(v_2)-S\big(L(x_1)v_2\big)\big)\\
&\ +S\big(R\big(N(x_2)\big)v_1+R(x_2)S(v_1)-S\big(R(x_2)v_1\big)\big)\\
&\ -\big(N(x_1)\circ N(x_2)+L\big(N(x_1)\big)S(v_2)+R\big(N(x_2)\big)S(v_1)\big)\\
&=0
\end{aligned}
$$

故 $N+S$ 满足等式(3.25)，则 $N+S$ 是半直积交错代数 $A\ltimes_{L,R}V$ 的 Nijenhuis 算子。

充分性。已知 $N+S$ 是半直积交错代数 $A\ltimes_{L,R}V$ 的 Nijenhuis 算子，即满足(3.25)，则有

$$
\begin{aligned}
&(N+S)\big((N+S)(x_1+v_1)\lozenge(x_2+v_2)+(x_1+v_1)\lozenge(N+S)(x_2+v_2)\\
&-(N+S)\big((x_1+v_1)\lozenge(x_2+v_2)\big)\big)-\big(N(x_1)+S(v_1)\big)\lozenge\big(N(x_2)+S(v_2)\big)\\
&=N\big(N(x_1)\circ x_2+x_1\circ N(x_2)-N(x_1\circ x_2)\big)+S\big(L\big(N(x_1)\big)v_2+L(x_1)S(v_2)\\
&\ -S\big(L(x_1)v_2\big)\big)+S\big(R\big(N(x_2)\big)v_1+R(x_2)S(v_1)-S\big(R(x_2)v_1\big)\big)\\
&\ -\big(N(x_1)\circ N(x_2)+L\big(N(x_1)\big)S(v_2)+R\big(N(x_2)\big)S(v_1)\big)\\
&=\big(N\big(N(x_1)\circ x_2+x_1\circ N(x_2)-N(x_1\circ x_2)\big)-N(x_1)\circ N(x_2)\big)\\
&\ +\big(S\big(L\big(N(x_1)\big)v_2+L(x_1)S(v_2)-S\big(L(x_1)v_2\big)\big)-L\big(N(x_1)\big)S(v_2)\big)\\
&\ +\big(S\big(R\big(N(x_2)\big)v_1+R(x_2)S(v_1)-S\big(R(x_2)v_1\big)\big)-R\big(N(x_2)\big)S(v_1)\big)\\
&=0
\end{aligned}
$$

故 N 是交错代数 $(A,\circ)$ 的 Nijenhuis 算子且 S 满足(3.26)和(3.27)。综上，本命题得证。

5. 交错代数双模的 Nijenhuis 结构

定理 5.1 [6]设 (V,L,R) 是交错代数 $(A,\circ)$ 的双模，定义 $L^*:A\to End(V^*)$ 和 $R^*:A\to End(V^*)$，其中

$$\langle L^*(x)\alpha,v\rangle=\langle\alpha,L(x)v\rangle,\ \langle R^*(x)\alpha,v\rangle=\langle\alpha,R(x)v\rangle,\ \forall x\in A,\ \alpha\in V^*,\ v\in V \tag{5.1}$$

则 (V^*,R^*,L^*) 是交错代数 $(A,\circ)$ 的双模。

定义 5.1 设 (V,L,R) 是交错代数 $(A,\circ)$ 的双模，$N\in End(A)$，$S\in End(V)$。如果 (V^*,R^*,L^*) 是 A-双模 V 的平凡无穷小形变，$(Id+N,Id+S^*)$ 是从双模 (V^*,R^*,L^*) 到 (V,L,R) 的同态，则 (N,S) 称为 A-双模 V 的 Nijenhuis 结构。

命题5.2 (N,S)是A-双模V的Nijenhuis结构等价于N是交错代数$(A,\circ)$的Nijenhuis算子且对$\forall x\in A$，$v\in V$，有下列条件成立：

$$L(N(x))S(v)=S(L(N(x))v)+L(x)S^2(v)-S(L(x)S(v)) \tag{5.2}$$

$$R(N(x))S(v)=S(R(N(x))v)+R(x)S^2(v)-S(R(x)S(v)) \tag{5.3}$$

证明： 由命题3.4知N和S^*生成交错代数$(A,\circ)$的双模(V^*,R^*,L^*)的无穷小形变当且仅当N是交错代数$(A,\circ)$的Nijenhuis算子且对$\forall x\in A$，$u^*\in V^*$，有

$$R^*(N(x))S^*(u^*)=S^*\left(R^*(N(x))u^*+R^*(x)S^*(u^*)-S^*(R^*(x)u^*)\right) \tag{5.4}$$

$$L^*(N(x))S^*(u^*)=S^*\left(L^*(N(x))u^*+L^*(x)S^*(u^*)-S^*(L^*(x)u^*)\right) \tag{5.5}$$

$\forall x\in A$，$v\in V$，$u^*\in V^*$，由于

$$\begin{aligned}&\left\langle R^*(N(x))S^*(u^*)-S^*(R^*(N(x))u^*)-S^*(R^*(x))S^*(u^*)+S^*S^*(R^*(x)u^*),v\right\rangle\\&=\left\langle u^*,-R(N(x))S(v)+S(R(N(x))v)+R(x)S^2(v)-S(R(x)S(v))\right\rangle\end{aligned}$$

由u^*的任意性，有(5.4)成立当且仅当(5.3)成立。由于

$$\begin{aligned}&\left\langle L^*(N(x))S^*(u^*)-S^*(L^*(N(x))u^*)-S^*(L^*(x))S^*(u^*)+S^*S^*(L^*(x)u^*),v\right\rangle\\&=\left\langle u^*,-L(N(x))S(v)+S(L(N(x))v)+L(x)S^2(v)-S(L(x)S(v))\right\rangle\end{aligned}$$

由u^*的任意性，有(5.5)成立当且仅当(5.2)成立。综上，本命题得证。

6. 结束语

本文给出了一类特殊交错代数的构造方法，并且由此为基础进一步研究交错代数的双模、无穷小形变以及交错代数半直积的Nijenhuis算子，为日后进一步的研究提供了一些思路。

参考文献

[1] Schafer, R.D. (1954) On the Algebras Formed by the Cayley-Dickson Process. *American Journal of Mathematics*, **76**, 435-446. https://doi.org/10.2307/2372583

[2] Schafer, R.D. (1952) Representations of Alternative Algebras. *Transactions of the American Mathematical Society*, **72**, 1-17. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1952-0045101-X

[3] Kuz'min, E.N. and Shestakov, I.P. (1995) Non-Associative Structures. *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*, **57**, 197-280.

[4] Jacobson, N. (1968) Structure and Representations of Jordan Algebras. American Mathematical Society. https://doi.org/10.1090/coll/039

[5] Gerstenhaber, M. (1953) On the Deformation of Rings and Algebras. *Annals of Mathematics*, **57**, 591-603.

[6] Bai, C. (2010) Prealternative Algebras and Prealternative Bialgebras. *Pacific Journal of Mathematics*, **248**, 355-391. https://doi.org/10.2140/pjm.2010.248.355

[7] Schafer, R.D. (1995) An Introduction to Nonassociative Algebras. Dover, New York.