Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2021, 10(5), 1559-1585
Published Online May 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2021.105166

临界非线性分数阶 Schrödinger 方程变号解的存在性

黄娅林

云南师范大学数学学院，云南 昆明
Email: 3131423643@qq.com

收稿日期：2021年4月21日；录用日期：2021年5月7日；发布日期：2021年5月25日

摘 要

本文主要研究了一类临界增长的分数阶 Schrödinger 方程

$$\epsilon^{2s}(-\Delta)^s v + V(x)v = |v|^{2_s^*-2}v + \mu|v|^{q-2}v, v \in H^s(\mathbb{R}^N)$$

变号解的存在性，其中 $0 < s < 1$， $N \geq 3, 2_s^* = \frac{2N}{N-2s}$ 是分数阶临界指数， μ 是一个正常数，$2 < q < 2_s^*, \epsilon > 0$ 是一个小参数，$V \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ 满足 $a \leq V(x) \leq b$，$b > a > 0$,$\forall x \in \mathbb{R}^N$.通过临界理论和下降流不变集法,我们得到了该方程存在 k 对变号解.

关键词

分数阶 Schrödinger 方程，下降流不变集法，变号解

Existence of Sign-Changing Solutions for a Critical Nonlinear Fractional Schrödinger Equation

Yalin Huang

Department of Mathematics, Yunnan Normal University, Kunming Yunnan

文章引用: 黄娅林. 临界非线性分数阶 Schrödinger 方程变号解的存在性[J]. 应用数学进展, 2021, 10(5): 1559-1585.
DOI: 10.12677/aam.2021.105166

Email: 3131423643@qq.com

Received: Arp. 21^{st}, 2021; accepted: May 7^{th}, 2021; published: May 25^{th}, 2021

Abstract

In this paper, we study the following critical nonlinear fractional Schrödinger equations

$$\epsilon^{2s}(-\Delta)^s v + V(x)v = |v|^{2_s^*-2}v + \mu|v|^{q-2}v, v \in H^s(\mathbb{R}^N)$$

where $0 < s < 1$,$N \geq 3, 2_s^* = \frac{2N}{N-2s}$ is the fractional critical exponent, μ is a normal number, $2 < q < 2_s^*, \epsilon > 0$ is a small parameter, $V \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ satisfies $a \leq V(x) \leq b$, $b > a > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^N$. We obtain the existence of k pairs of sign-changing solutions by combining critical point theory and invariant sets of descending flow.

Keywords

Fractional Schrödinger Equations, The Method of Invariant Sets with Descending Flow, Sign-Changing Solutions

1. 预备知识

在本文中,研究带有分数阶 Sobolev 临界指数的分数阶 Schrödinger 方程

$$\epsilon^{2s}(-\Delta)^s v + V(x)v = |v|^{2_s^*-2}v + \mu|v|^{q-2}v, v \in H^s(\mathbb{R}^N), \tag{1.1}$$

变号解的存在性.其中, $0 < s < 1$, $N \geq 3, 2_s^* = \frac{2N}{N-2s}$ 是分数阶临界指数, μ 是一个正常数, $2 < q < 2_s^*, \epsilon > 0$ 是一个小参数.势函数 V 满足如下条件:

(A_1) $V \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, 存在 $b > a > 0$ 使得 $a \leq V(x) \leq b$, $\forall x \in \mathbb{R}^N$ 并且存在一个具有光滑边界的有界域 $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^N$ 使得

$$\vec{n}(x) \cdot \nabla V(x) > 0, \forall x \in \partial\mathcal{M}, \tag{1.2}$$

其中, $\vec{n}(x)$ 表示 x 在 $\partial\mathcal{M}$ 上的单位外法向量.

在 (1.2) 的假设条件下, 临界集

$$\mathcal{A}=\{x\in\mathcal{M}\mid\nabla V(x)=0\}\neq\emptyset, \tag{1.3}$$

并且 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{M}$ 的一个紧子集.不失一般性, 我们可假设 $0\in\mathcal{A}$.对于任意的集合 $B\subset\mathbb{R}^N$ 且 $\delta>0$, 我们记 $B^\delta=\{x\in\mathbb{R}^N\mid dist(x,B):=\inf_{y\in B}|x-y|<\delta\}$ 为 B 的 δ 开邻域. 本文的主要结果如下:

定理1. 假设 $\max\{\frac{N+2}{N-2},2\}<q<2_s^*$ 且 (A_1) 成立.则对于任意正整数 k , 存在 $\epsilon_k>0$ 使得当 $0<\epsilon<\epsilon_k$ 时, 方程 (1.1) 至少有 k 对变号解 $\pm v_{j,\epsilon}, j=1,2\cdots,k$.

作变量替换 $x\mapsto\varepsilon x$, 定义 $u(x):=v(\epsilon x)$, 则方程 (1.1) 的等价形式如下

$$(-\Delta)^s u+V(\epsilon x)u=|u|^{2_s^*-2}u+\mu|u|^{q-2}u, u\in H^s(\mathbb{R}^N). \tag{1.4}$$

泛函 $I_\epsilon(u)$ 的定义如下

$$I_\epsilon(u)=\frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^N}(|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u|^2+V(\epsilon x)u^2)dx-\frac{1}{2_s^*}\int\limits_{\mathbb{R}^N}|u|^{2_s^*}dx-\frac{\mu}{q}\int\limits_{\mathbb{R}^N}|u|^q dx, u\in H^s(\mathbb{R}^N). \tag{1.5}$$

显然, $I_\epsilon(u)$ 的临界点是方程 (1.4) 的弱解.通过增加一个惩罚项 $Q_\epsilon(u)$ 并且用一个磨光项 $R_\epsilon(u)$ 来代替临界指数项, 即得到泛函 $\Gamma_\epsilon(u)$

$$\Gamma_\epsilon(u)=\frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^N}(|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u|^2+V(\epsilon x)u^2)dx+Q_\epsilon(u)-R_\epsilon(u)-\frac{\mu}{q}\int\limits_{\mathbb{R}^N}|u|^q dx$$

其中, $u\in H^s(\mathbb{R}^N)$ 且 $Q_\epsilon(u)=\frac{1}{2\beta}(\int\limits_{\mathbb{R}^N}\chi_\epsilon u^2dx-1)_+^\beta$, $R_\epsilon(u)=\frac{1}{2_s^*}\int\limits_{\mathbb{R}^N}|u|^q|m_\epsilon(u)|^{2_s^*-q}dx$.

2. 惩罚和磨光泛函 $\Gamma_\epsilon(u)$ 的 Palais-Smale 条件

在本节中, 标准的分数阶 Sobolev 空间 $H^s(\mathbb{R}^N)$ 赋予内积为

$$(u,v)=\int\limits_{\mathbb{R}^N}(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u(-\Delta)^{\frac{s}{2}}vdx+\int\limits_{\mathbb{R}^N}uvdx$$

且范数为

$$\|u\|=\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^N}|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u|^2dx+\int\limits_{\mathbb{R}^N}|u|^2dx\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

如果 $u^+\neq0$ 且 $u^-\neq0$, 则泛函 $u\in H^s(\mathbb{R}^N)$ 称为变号, 其中 $u^\pm=\max\{\pm u,0\}$. 对于任意的 $\delta>0,\epsilon>0$ 且集合 $B\subset\mathbb{R}^N$, 我们定义

$$B_\epsilon=\{x\in\mathbb{R}^N\mid\epsilon x\in B\},$$

$$B^\delta = \{x \in \mathbb{R}^N \mid dist(x, B) := \inf_{y \in B} |x - y| < \delta\}.$$

令 $\zeta \in C^2(\mathbb{R})$ 是一个截断函数使得任意 $t \in \mathbb{R}$ 满足: $0 \le \zeta(t) \le 1$ 且 $\zeta'(t) \ge 0$.若 $t \le 0, \zeta(t) = 0$;如果 $t > 0, \zeta(t) > 0$;当 $t \ge 1$ 时, $\zeta(t) = 1$.另外, 存在一个常数 $C > 0$ 和 $\kappa > 0$ 使得

$$t\zeta'(t) \ge C\zeta(t), 0 \le t \le \kappa \tag{2.1}$$

且

$$\zeta(t) \ge Ct^4, 0 \le t \le \kappa. \tag{2.2}$$

令 $\theta > 0$ 满足

$$\frac{1}{q} = \frac{\theta}{2} + \frac{1-\theta}{p},$$

其中

$$p = \frac{1}{2}(q + 2_s^*).$$

令

$$\chi_\epsilon(x) = \begin{cases} 0, & \text{如果} \quad x \in \mathcal{M}_\epsilon \\ \epsilon^{-\gamma}\zeta(dist(x, \mathcal{M}_\epsilon)), & \text{如果} \quad x \notin \mathcal{M}_\epsilon \end{cases} \tag{2.3}$$

这里, $\gamma > 0$ 且满足

$$\gamma > \max\Big\{4, \frac{12}{N-2}, \frac{2(2_s^* - q)}{(q-2)\theta}\Big\}. \tag{2.4}$$

很容易验证, 对于较小的 ϵ 使得 χ_ϵ 属于 C^1 泛函且当 $x \in \mathcal{M}_\epsilon$ 时, $\chi_\epsilon(x) = 0$,当 $x \notin (\mathcal{M}_\epsilon)^1$ 时, $\chi_\epsilon(x) = \epsilon^{-\gamma}$.对于任意的 $u \in H^s(\mathbb{R}^N)$, 令

$$Q_\epsilon(u) = \frac{1}{2\beta}\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^N} \chi_\epsilon u^2 dx - 1\Big)_+^\beta \tag{2.5}$$

其中 β 满足

$$2 < 2\beta < q$$

且 $(t)_+ = \max\{t, 0\}$.

令 $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ 使得对任意的 $\xi \in \mathbb{R}$ 满足 $\varphi(-\xi) = \varphi(\xi)$.如果 $|\xi| \le 1, \varphi(\xi) = 1$;如果 $|\xi| \ge 2, \varphi(\xi) = 0$ 并且 φ 在区间 $[1, 2]$ 上单调递减.另外, 假设 $b_\epsilon(\xi) = \varphi(\epsilon\xi)$ 且 $m_\epsilon(\xi) = \int_0^\xi b_\epsilon(\tau)d\tau$.

命题1. *泛函 b_ϵ 和 m_ϵ 满足以下性质*

(i) $\forall \xi \in \mathbb{R}, \xi m_\epsilon(\xi) \ge 0$ *;*

(ii) *如果 $\xi \ge 0$, 则 $\xi b_\epsilon(\xi) \le m_\epsilon(\xi)$;*

(iii) *存在常数 $c > 0$ 使得对任意的 ξ , 有 $|m_\epsilon(\xi)| \le c/\epsilon$. 若 $|\xi| \le 1/\epsilon$, 则 $b_\epsilon(\xi) = 1$ 且 $m_\epsilon(\xi) = \xi$.*

对于任意的 $u \in H^s(\mathbb{R}^N)$，令

$$R_\epsilon(u) = \frac{1}{2_s^*}\int\limits_{\mathbb{R}^N} |u|^q |m_\epsilon(u)|^{2_s^*-q} dx. \tag{2.6}$$

并且对于任意的 $u \in H^s(\mathbb{R}^N)$，假设

$$\Gamma_\epsilon(u) = \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^N}(|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u|^2 + V(\epsilon x)u^2)dx + Q_\epsilon(u) - R_\epsilon(u) - \frac{\mu}{q}\int\limits_{\mathbb{R}^N}|u|^q dx. \tag{2.7}$$

注1. 对于任意的 $u, v \in H^s(\mathbb{R}^N)$，有

$$\begin{aligned}\langle \Gamma'_\epsilon(u), v\rangle = &\int\limits_{\mathbb{R}^N}((-\Delta)^{\frac{s}{2}}u(-\Delta)^{\frac{s}{2}}v + V(\epsilon x)uv)dx + (\int\limits_{\mathbb{R}^N}\chi_\epsilon u^2 dx - 1)_+^{\beta-1}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\chi_\epsilon uv dx\\ &- \frac{q}{2_s^*}\int\limits_{\mathbb{R}^N}|u|^{q-2}|m_\epsilon(u)|^{2_s^*-q}uv dx\\ &- \frac{2_s^*-q}{2_s^*}\int\limits_{\mathbb{R}^N}|u|^q|m_\epsilon(u)|^{2_s^*-q-2}m_\epsilon(u)b_\epsilon(u)v dx\\ &- \mu\int\limits_{\mathbb{R}^N}|u|^{q-2}uv dx\end{aligned} \tag{2.8}$$

则 Γ_ϵ 的临界点 u 是方程

$$\begin{aligned}&(-\Delta)^s u + V(\epsilon x)u + (\int\limits_{\mathbb{R}^N}\chi_\epsilon u^2 dx - 1)_+^{\beta-1}\chi_\epsilon u\\ =&\frac{q}{2_s^*}|u|^{q-2}|m_\epsilon(u)|^{2_s^*-q}u + \frac{2_s^*-q}{2_s^*}|u|^q|m_\epsilon(u)|^{2_s^*-q-2}m_\epsilon(u)b_\epsilon(u)\\ &+ \mu|u|^{q-2}u, u \in H^s(\mathbb{R}^N).\end{aligned} \tag{2.9}$$

的解并且若 $Q_\epsilon(u) = 0$，$\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^N}|u(x)| < 1/\epsilon$，则 Γ_ϵ 的临界点 u 是方程 (1.4) 的解.

令

$$F_\epsilon(\xi) = \frac{1}{2_s^*}|\xi|^q|m_\epsilon(\xi)|^{2_s^*-q} + \frac{\mu}{q}|\xi|^q, \tag{2.10}$$

且

$$f_\epsilon(\xi) = \frac{dF_\epsilon}{d\xi}(\xi). \tag{2.11}$$

则 (2.9) 可以被改写为

$$(-\Delta)^s u + V(\epsilon x)u + (\int\limits_{\mathbb{R}^N}\chi_\epsilon u^2 dx - 1)_+^{\beta-1}\chi_\epsilon u = f_\epsilon(u), u \in H^s(\mathbb{R}^N). \tag{2.12}$$

引理1. 对于任意 $L>0$，存在 $\epsilon_L>0$ 使得对任意的 $0<\epsilon<\epsilon_L$，若 $c<L$，则 Γ_ϵ 满足 $(PS)_c$ 条件.

证明: 令 $\{u_n\}\subset H^s(\mathbb{R}^N)$ 使得

$$\Gamma_\epsilon(u_n)\to c,\Gamma'_\epsilon(u_n)\to 0 \quad 在(H^s(\mathbb{R}^N))'中.$$

为了证明该引理, 我们只需证明在 $H^s(\mathbb{R}^N)$ 中, 序列 $\{u_n\}$ 含有一个收敛子列. 由

$$\begin{aligned}
&o(\|u_n\|)+L\\
\geq &o(\|u_n\|)+c\\
=&(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})\int\limits_{\mathbb{R}^N}(|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u_n|^2+V(\epsilon x)u_n^2)dx\\
&+\frac{1}{2\beta}(\int\limits_{\mathbb{R}^N}\chi_\epsilon u_n^2dx-1)_+^\beta-\frac{1}{q}(\int\limits_{\mathbb{R}^N}\chi_\epsilon u_n^2dx-1)_+^{\beta-1}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\chi_\epsilon u_n^2dx\\
&+\frac{2_s^*-q}{2_s^*q}\int\limits_{\mathbb{R}^N}|u_n|^{q+1}|m_\epsilon(u_n)|^{2_s^*-q-1}b_\epsilon(u_n)dx
\end{aligned}\tag{2.13}$$

且 $2<2\beta<q$ 可得, 存在一个与 ϵ 无关的 $\hat{\eta}_L>0$ 使得 $\|u_n\|\leq\hat{\eta}_L$ 且 $Q_\epsilon(u_n)\leq\hat{\eta}_L$.因此, 在 $H^s(\mathbb{R}^N)$ 中, 我们可假设当 $n\to\infty$ 时, $u_n\rightharpoonup u$ 且

$$\lambda_n:=(\int\limits_{\mathbb{R}^N}\chi_\epsilon u_n^2dx-1)_+^{\beta-1}\to\lambda,n\to\infty.\tag{2.14}$$

则当 $n,m\to\infty$ 时, 我们有

$$\begin{aligned}
&o(1)\\
=&\langle\Gamma'_\epsilon(u_n)-\Gamma'_\epsilon(u_m),u_n-u_m\rangle\\
\geq&\min\{1,a\}\|u_n-u_m\|^2+\int\limits_{\mathbb{R}^N}(\lambda_nu_n-\lambda_mu_m)(u_n-u_m)\chi_\epsilon dx\\
&-\frac{q}{2_s^*}\int\limits_{\mathbb{R}^N}(|u_n|^{q-2}u_n|m_\epsilon(u_n)|^{2_s^*-q}-|u_m|^{q-2}u_m|m_\epsilon(u_m)|^{2_s^*-q})(u_n-u_m)dx\\
&-\frac{2_s^*-q}{2_s^*}\int\limits_{\mathbb{R}^N}(|u_n|^q|m_\epsilon(u_n)|^{2_s^*-q-2}m_\epsilon(u_n)b_\epsilon(u_n)-|u_m|^q|m_\epsilon(u_m)|^{2_s^*-q-2}m_\epsilon(u_m)b_\epsilon(u_m))\\
&\quad\times(u_n-u_m)dx\\
&-\mu\int\limits_{\mathbb{R}^N}(|u_n|^{q-2}u_n-|u_m|^{q-2}u_m)(u_n-u_m)dx.
\end{aligned}\tag{2.15}$$

由 (2.14) 可得, 当 $n,m\to\infty$ 时, 有

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N}(\lambda_nu_n-\lambda_mu_m)(u_n-u_m)\chi_\epsilon dx=\lambda\int\limits_{\mathbb{R}^N}(u_n-u_m)^2\chi_\epsilon dx+o(1).\tag{2.16}$$

令 $r_0>0$ 使得 $\mathcal{M}\subset B_{r_0}(0)$.由 $Q_\epsilon(u_n)\le\hat\eta_L$ 且 $(\mathcal{M}_\epsilon)^1\subset B_{\epsilon^{-1}r_0+1}(0)$ 可得

$$\int\limits_{|x|\ge\epsilon^{-1}r_0+1} u_n^2dx\le(1+\hat\eta_L^{\frac{1}{\beta}})\epsilon^\gamma. \tag{2.17}$$

因为 $q<p<2_s^*$ 且 $\|u\|_{L^q}\le\|u\|_{L^2}^\theta\|u\|_{L^p}^{1-\theta}\le C'\|u\|_{L^2}^\theta\|u\|^{1-\theta}$ ，其中正常数 C' 与 n 和 ϵ 无关且 $1/q=\theta/2+(1-\theta)/p$ ，则由 (2.17) 和 $\|u_n\|\le\hat\eta_L$ 可得存在一个与 ϵ 和 n 的常数 $C_L>0$ 使得

$$\int\limits_{|x|\ge\epsilon^{-1}r_0+1} |u_n|^qdx\le C_L\epsilon^{\frac{1}{2}\gamma q\theta}. \tag{2.18}$$

利用中值定理, 我们可得存在一个常数 $0<v(x)<1$ 使得

$$\begin{aligned}&\Big|\int\limits_{\mathbb{R}^N}(|u_n|^{q-2}u_n-|u_m|^{q-2}u_m)(u_n-u_m)dx\Big|\\ \le&(q-1)\int\limits_{|x|\ge\epsilon^{-1}r_0+1}|vu_n+(1-v)u_m|^{q-2}(u_n-u_m)^2dx\\ &+(q-1)\int\limits_{|x|\le\epsilon^{-1}r_0+1}|vu_n+(1-v)u_m|^{q-2}(u_n-u_m)^2dx.\end{aligned} \tag{2.19}$$

因为在 $H^s(\mathbb{R}^N)$ 中, $u_n\rightharpoonup u$ ，则我们可得在 $L^q(\{x\mid|x|\le\epsilon^{-1}r_0+1\})$ 中, $u_n\to u$.从而, 当 $n,m\to\infty$ 时, 有

$$\int\limits_{|x|\le\epsilon^{-1}r_0+1}|vu_n+(1-v)u_m|^{q-2}(u_n-u_m)^2dx=\quad o(1). \tag{2.20}$$

并且由 (2.18) 可得

$$\begin{aligned}&\int\limits_{|x|\ge\epsilon^{-1}r_0+1}|vu_n+(1-v)u_m|^{q-2}(u_n-u_m)^2dx\\ \le&C\epsilon^{\frac{1}{2}\gamma(q-2)\theta}\|u_n-u_m\|^2.\end{aligned} \tag{2.21}$$

结合 (2.19) – (2.21) , 我们可得当 $n,m\to\infty$ 时, 有

$$\begin{aligned}&\Big|\int\limits_{\mathbb{R}^N}(|u_n|^{q-2}u_n-|u_m|^{q-2}u_m)(u_n-u_m)dx\Big|\\ \le&C\epsilon^{\frac{1}{2}\gamma(q-2)\theta}\|u_n-u_m\|^2+o(1).\end{aligned} \tag{2.22}$$

接下来, 我们再次使用中值定理可得, 存在一个介于 $u_n(x)$ 和 $u_m(x)$ 之间的一个常数 $V_{n,m}(x)$ 使得

$$\begin{aligned}&\Big|\int\limits_{\mathbb{R}^N}(|u_n|^{q-2}u_n|m_\epsilon(u_n)|^{2_s^*-q}-|u_m|^{q-2}u_m|m_\epsilon(u_m)|^{2_s^*-q})(u_n-u_m)dx\Big|\\ \le&C\int\limits_{\mathbb{R}^N}(|V_{n,m}|^{q-2}|m_\epsilon(V_{n,m})|^{2_s^*-q}+|V_{n,m}|^{q-2}|m_\epsilon(V_{n,m})|^{2_s^*-q-1}b_\epsilon(V_{n,m}))(u_n-u_m)^2dx.\end{aligned} \tag{2.23}$$

由 (2.23) 和 $|\xi b_\epsilon(\xi)| \le |m_\epsilon(\xi)| \le c/\epsilon$ 且 $V_{n,m}(x)$ 介于 $u_n(x)$ 和 $u_m(x)$ 之间可得

$$\begin{aligned}
&\Big|\int\limits_{\mathbb{R}^N}(|u_n|^{q-2}u_n|m_\epsilon(u_n)|^{2_s^*-q}-|u_m|^{q-2}u_m|m_\epsilon(u_m)|^{2_s^*-q})(u_n-u_m)dx\Big|\\
\le&\frac{C}{\epsilon^{2_s^*-q}}\Big(\int\limits_{|x|\ge\epsilon^{-1}r_0+1}(|u_n|^{q-2}+|u_m|^{q-2})(u_n-u_m)^2dx\\
&+\int\limits_{|x|\le\epsilon^{-1}r_0+1}(|u_n|^{q-2}+|u_m|^{q-2})(u_n-u_m)^2dx\Big).
\end{aligned}\tag{2.24}$$

正如 (2.20) 的证明，我们得到当 $n,m\to\infty$ 时，有

$$\int\limits_{|x|\le\epsilon^{-1}r_0+1}(|u_n|^{q-2}+|u_m|^{q-2})(u_n-u_m)^2dx=o(1).\tag{2.25}$$

再由 (2.21) 的证明可得，当 $n,m\to\infty$ 时，满足

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{|x|\ge\epsilon^{-1}r_0+1}(|u_n|^{q-2}+|u_m|^{q-2})(u_n-u_m)^2dx\\
\le&C\epsilon^{\frac{1}{2}\gamma(q-2)\theta}\|u_n-u_m\|^2
\end{aligned}\tag{2.26}$$

结合 (2.24) – (2.26) 可得

$$\begin{aligned}
&\Big|\int\limits_{\mathbb{R}^N}(|u_n|^{q-2}u_n|m_\epsilon(u_n)|^{2_s^*-q}-|u_m|^{q-2}u_m|m_\epsilon(u_m)|^{2_s^*-q})(u_n-u_m)dx\Big|\\
\le&C\epsilon^{\frac{1}{2}\gamma(q-2)\theta-(2_s^*-q)}\|u_n-u_m\|^2+o(1).
\end{aligned}\tag{2.27}$$

同样地，再次使用中值定理，我们可得存在一个介于 $u_n(x)$ 和 $u_m(x)$ 之间的常数 $V_{n,m}(x)$ 使得

$$\begin{aligned}
&\Big|\int\limits_{\mathbb{R}^N}(|u_n|^q|m_\epsilon(u_n)|^{2_s^*-q-2}m_\epsilon(u_n)b_\epsilon(u_n)-|u_m|^q|m_\epsilon(u_m)|^{2_s^*-q-2}m_\epsilon(u_m)b_\epsilon(u_m))\\
&\times(u_n-u_m)dx\Big|\\
=&\Big|q\int\limits_{\mathbb{R}^N}|V_{n,m}|^{q-2}V_{n,m}|m_\epsilon(V_{n,m})|^{2_s^*-q-2}m_\epsilon(V_{n,m})b_\epsilon(V_{n,m})(u_n-u_m)^2dx\\
&+(2_s^*-q-1)\int\limits_{\mathbb{R}^N}|V_{n,m}|^q|m_\epsilon(V_{n,m})|^{2_s^*-q-2}b_\epsilon^2(V_{n,m})(u_n-u_m)^2dx\\
&+\int\limits_{\mathbb{R}^N}|V_{n,m}|^q|m_\epsilon(V_{n,m})|^{2_s^*-q-2}m_\epsilon(V_{n,m})b_\epsilon'(V_{n,m})(u_n-u_m)^2dx\Big|.
\end{aligned}\tag{2.28}$$

由命题 1 和可得

$$\begin{aligned}&\Big|\int\limits_{\mathbb{R}^N}|V_{n,m}|^{q-2}V_{n,m}|m_\epsilon(V_{n,m})|^{2_s^*-q-2}m_\epsilon(V_{n,m})b_\epsilon(V_{n,m})(u_n-u_m)^2dx\Big|\\ \le& C\epsilon^{\frac{1}{2}\gamma(q-2)\theta-(2_s^*-q)}\|u_n-u_m\|^2+o(1).\end{aligned}\tag{2.29}$$

且

$$\begin{aligned}&\int\limits_{\mathbb{R}^N}|V_{n,m}|^{q}|m_\epsilon(V_{n,m})|^{2_s^*-q-2}b_\epsilon^2(V_{n,m})(u_n-u_m)^2dx\\ \le& C\epsilon^{\frac{1}{2}\gamma(q-2)\theta-(2_s^*-q)}\|u_n-u_m\|^2+o(1).\end{aligned}\tag{2.30}$$

因为若 $|\xi|\ge 2/\epsilon$，$|b_\epsilon'(\xi)|\le C\epsilon$，$b_\epsilon'(\xi)=0$ 且对于任意的 ξ，$m_\epsilon(\xi)\le C/\epsilon$，则我们可得

$$\begin{aligned}&\Big|\int\limits_{\mathbb{R}^N}|V_{n,m}|^{q}|m_\epsilon(V_{n,m})|^{2_s^*-q-2}m_\epsilon(V_{n,m})b_\epsilon'(V_{n,m})(u_n-u_m)^2dx\Big|\\ \le& C\epsilon^{\frac{1}{2}\gamma(q-2)\theta-(2_s^*-q)}\|u_n-u_m\|^2+o(1).\end{aligned}\tag{2.31}$$

结合 (2.28) − (2.31)，我们可推得

$$\begin{aligned}&\Big|\int\limits_{\mathbb{R}^N}(|u_n|^q|m_\epsilon(u_n)|^{2_s^*-q-2}m_\epsilon(u_n)b_\epsilon(u_n)-|u_m|^q|m_\epsilon(u_m)|^{2_s^*-q-2}m_\epsilon(u_m)b_\epsilon(u_m))\\ &\times(u_n-u_m)dx\Big|\\ \le& C\epsilon^{\frac{1}{2}\gamma(q-2)\theta-(2_s^*-q)}\|u_n-u_m\|^2+o(1).\end{aligned}\tag{2.32}$$

因为 $\frac{1}{2}\gamma(q-2)\theta-(2_s^*-q)>0$，则结合 (2.15), (2.16), (2.22), (2.27) 和 (2.32) 可得存在 $\epsilon_L>0$ 使得对于任意的 $0<\epsilon<\epsilon_L$，当 $n,m\to\infty$ 时，$\|u_n-u_m\|\to 0$.

3. Γ_ϵ 的多重变号临界点的存在性

令 X 是一个 Banach 空间.任意 $P\subset X$，定义 $-P=\{-u|u\in P\}$. X 的闭对称子集 A(i.e. $-A=A$) 的亏格(例如文献，[1]) 记为 $\gamma(A)$. 对任意 $J\in C^1(X,\mathbb{R})$ 和 $c\in\mathbb{R}$，记 $J^c=\{u\in X|J(u)\le c\}$ 且 $K_c=\{u\in X|J(u)=c,J'(u)=0\}$.

定义1. 令 $J\in C^1(X,\mathbb{R})$ 是一个偶泛函，$P\subset X$ 是一个非空开集并且 $W=P\cup(-P)$.如果存在 $\tau_0>0$ 且存在一个满足 $\gamma(\overline{\mathcal{N}})<\infty$ 的 $K_c\backslash W$ 的对称开邻域 $\mathcal{N}$，使得对任意的 $\tau\in(0,\tau_0)$，存在 $\eta\in C(X,X)$ 满足如下条件

(1). $\eta(\partial P)\subset P,\eta(\partial(-P))\subset -P,\eta(P)\subset P,\eta(-P)\subset -P;$

(2). $\eta(-u)=-\eta(u),\forall u\in X;$

(3). $\eta\mid_{J^{c-2\tau}}=id;$

(4). $\eta(J^{c+\tau}\backslash(\mathcal{N}\cup W))\subset J^{c-\tau}.$

则称 P 为在水平集 c 上相对于 J 的容许不变集.

定理2. 假设 $J \in C^1(X,\mathbb{R})$ 是一个偶泛函，$P \subset X$ 是一个非空开集，$M = P\cap(-P), W = P\cup(-P)$，并且 $\Sigma = \partial P \cap \partial(-P)$.假设对于某些 $L > c^*$，P 是在水平集 $c \in [c^*, L]$ 上相对于 J 的容许不变集，其中 $c^* = \inf\limits_{u\in\Sigma} J(u)$ 且对于任意的 $n \in \mathbb{N}$，存在一个连续映射 $\varphi_n : B_n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq 1\} \to X$ 满足

(1). $\varphi_n(0) \in M, \varphi_n(-t) = -\varphi_n(t), \forall t \in B_n$;

(2). $\varphi_n(\partial B_n) \cap M = \emptyset$;

(3). $\max\{J(0), \sup\limits_{u\in\varphi_n(\partial B_n)} J(u)\} < c^*$.

对于任意的 $j \in \mathbb{N}$，定义

$$c_j = \inf_{B\in\Lambda_j} \sup_{u\in B\backslash W} J(u),$$

其中

$$\begin{aligned}\Lambda_j = \{B \mid B = \varphi(B_n\backslash Y)\text{对某些}\varphi \in G_n, n \geq j\text{恒成立},\\ \text{并且开集}Y \subset B_n\text{使得} -Y = Y\text{且}\gamma(\overline{Y}) \leq n-j\}\end{aligned}$$

且

$G_n = \{\varphi \mid \varphi \in C(B_n, X), \varphi(-t) = -\varphi(t), \forall t \in B_n, \varphi|_{\partial B_n} = \varphi_n|_{\partial B_n}\}$. 则对于任意的 $j \geq 2$，如果 $L > c_j$，有

$$K_{c_j}\backslash W \neq \emptyset. \tag{3.1}$$

另外，如果 $j \geq 2$ 且 $L > c := c_j = \cdots = c_{j+m} \geq c_*$，则

$$\gamma(K_c\backslash W) \geq m+1. \tag{3.2}$$

假设

$$P_+ := \{u \in H^s(\mathbb{R}^N) \mid u \geq 0\} \text{ 且} P_- := \{u \in H^s(\mathbb{R}^N) \mid u \leq 0\}.$$

对于任意的 $\sigma > 0$，令

$$P_+^\sigma := \{u \in H^s(\mathbb{R}^N) \mid dist_{H^s}(u, P_+) < \sigma\}, P_-^\sigma := \{u \in H^s(\mathbb{R}^N) \mid dist_{H^s}(u, P_-) < \sigma\},$$

其中，$dist_{H^s}(u, B) := \inf\limits_{v\in B} \|u-v\|, \forall u \in H^s(\mathbb{R}^N)$ 且 $B \subset H^s(\mathbb{R}^N)$.显然，$P_-^\sigma = -P_+^\sigma$.

为了应用定理 2 得到 Γ_ϵ 的多重变号临界点, 在定义 1 和定理 2 中, 我们取

$$X = H^s(\mathbb{R}^N), P = P_+^\sigma, J = \Gamma_\epsilon, \text{ 和} W = P_-^\sigma \cup P_+^\sigma. \tag{3.3}$$

显然，W 是 $H^s(\mathbb{R}^N)$ 中的一个对称开子集并且仅仅在 $H^s(\mathbb{R}^N)\backslash W$ 中含有变号解.另外, 因为 0 是 Γ_ϵ 的严格局部极小值点, 所以当 $\sigma > 0$ 充分小时, 在定理 2 中的常数 c^* 满足

$$c^* = \inf_{\partial(P_-^\sigma)\cap\partial(P_+^\sigma)} \Gamma_\epsilon > 0,$$

DOI: 10.12677/aam.2021.105166

不失一般性, 我们可以假设

$$0 \in \mathcal{A}. \tag{3.4}$$

由 (3.4) 可得, 对于任意小的 $\epsilon > 0$, 我们有

$$B_1(0) \subset \mathcal{M}_\epsilon. \tag{3.5}$$

令

$$J_0(u) = \frac{1}{2}\int_{B_1(0)} (|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u|^2 + bu^2)dx - \frac{\mu}{q}\int_{B_1(0)} |u|^q dx, u \in H_0^s(B_1(0)).$$

设 $\{e_n\} \subset H_0^s(B_1(0))$ 是一个标准正交基并且 $E_n := \mathrm{span}\{e_1, \cdots, e_n\}$.由 $q > 2$ 可得, 存在一个正的单调递增序列 $\{R_n\}$ 使得

$$J_0(u) < 0, \forall u \in E_n, \|u\| \geq R_n.$$

我们定义 $\varphi_n \in C(B_n, H_0^s(B_1(0)))$ 为

$$\varphi_n(t) = R_n \sum_{i=1}^{n} t_i e_i, t = (t_1, \cdots, t_n) \in B_n. \tag{3.6}$$

很容易验证, 在 (3.3) 的假设条件下, φ_n 满足定理 2 的条件 $(1) - (3)$.

对于任意的 $j \in \mathbb{N}$, 定义

$$c_j^\epsilon = \inf_{B \in \Lambda_j} \sup_{u \in B \setminus W} \Gamma_\epsilon(u), \tilde{c}_j = \inf_{B \in \tilde{\Lambda}_j} \sup_{u \in B \setminus W} J_0(u),$$

其中

$$\begin{aligned} \Lambda_j = \{B \mid B = \varphi(B_n \backslash Y) \text{ 对某些}\varphi \in G_n, n \geq j, \\ \text{并且开集}Y \subset B_n \text{ 使得 } -Y = Y \text{ 且}\gamma(\overline{Y}) \leq n - j\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \widetilde{\Lambda}_j = \{B \mid B = \varphi(B_n \backslash Y) \text{ 对某些}\varphi \in \widetilde{G}_n, n \geq j, \\ \text{并且开集}Y \subset B_n \text{ 使得 } -Y = Y \text{ 且}\gamma(\overline{Y}) \leq n - j\}, \end{aligned}$$

$$G_n = \{\varphi \mid \varphi \in C(B_n, H^s(\mathbb{R}^N)), \varphi(-t) = -\varphi(t)\text{对于任意的}t \in B_n, \varphi\mid_{\partial B_n} = \varphi_n\mid_{\partial B_n}\},$$

$$\widetilde{G}_n = \{\varphi \mid \varphi \in C(B_n, H_0^s(B_1(0))), \varphi(-t) = -\varphi(t)\text{对于任意的}t \in B_n, \varphi\mid_{\partial B_n} = \varphi_n\mid_{\partial B_n}\}.$$

我们有

$$0 < c_2^\epsilon \leq c_3^\epsilon \leq \cdots, \quad \tilde{c}_2 \leq \tilde{c}_3 \leq \cdots. \tag{3.7}$$

因为 $\chi_\epsilon = 0 \text{ in } \mathcal{M}_\epsilon$, 则由 (3.5) 和 $V \leq b$, 我们可得 $\Gamma_\epsilon(u) \leq J_0(u), \forall u \in H_0^s(B_1(0))$.
集合 $\widetilde{\Lambda}_j \subset \Lambda_j$, 我们可推得, 对于充分小的 $\epsilon > 0$, 有

$$0 < c_j^\epsilon \leq \tilde{c}_j, \forall j \geq 2. \tag{3.8}$$

引理2. *([2])存在 $\sigma_0 > 0$ 使得对任意的 $0 < \sigma < \sigma_0$ 且 $L > 0$, 若 $0 < \epsilon < \epsilon_L$, 则对于任意的 $c < L$,*

P_+^σ 是相对于 Γ_ϵ 的容许不变集, 其中 ϵ_L 来自于引理 1 .

引理3. 对于任意的 $k \in \mathbb{N}$, 存在 $\epsilon_k' > 0$ 使得对任意的 $0 < \epsilon < \epsilon_k'$, Γ_ϵ 至少有 k 对变号临界点

$$\{\pm u_{j,\epsilon} \mid 1 \leq j \leq k\}$$

满足

$$\Gamma_\epsilon(u_{j,\epsilon}) = c_{j+1}^\epsilon \leq \tilde{c}_{k+1}, 1 \leq j \leq k.$$

证明: 由引理 2 , 定理 2 的 (3.3), (3.7) 和 (3.8) 式可得到该引理的证明.

4. 解序列的剖面分解和排除爆破

在本节中, 我们将证明引理 3 中得到的变号临界点 $\{u_{j,\epsilon}\}$ 不会爆破.更准确地说, 我们将证明以下命题:

命题2. 设 $\{u_{j,\epsilon}\}$ 是引理 3 中的变号临界点.则存在常数 $M_k > 0$ 和 $\epsilon_k'' > 0$ 使得对于任意的 $0 < \epsilon < \epsilon_k''$, 有

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^N} |u_{j,\epsilon}(x)| < M_k, 1 \leq j \leq k. \tag{4.1}$$

引理4. *([2])*令 $\{u_{j,\epsilon}\}$ 是引理 3 中的变号临界点.对于任意的常数 $k \in \mathbb{N}$ 和 $0 < \epsilon < \epsilon_k'$, 存在一个仅与 a, N 和 q 有关的正常数 ϱ 和与 ϵ 无关的正常数 η_k 使得

$$\varrho \leq \|u_{j,\epsilon}\| \leq \eta_k \text{ 且} Q_\epsilon(u_{j,\epsilon}) \leq \eta_k, \quad 1 \leq j \leq k.$$

引理5. 设当 $n \to \infty$ 时, $\epsilon_n \to 0$.对于任意的常数 $1 \leq j \leq k$, 存在 $\sigma_{j,i,n} > 0$ 且 $x_{j,i,n} \in \mathbb{R}^N$ 使得

$$\lim_{n \to \infty} \sigma_{j,i,n} = +\infty,$$

并且 u_{j,ϵ_n} 有一个剖面分解

$$u_{j,\epsilon_n} = \sum_{i \in \Lambda_1} U_{j,i}(\cdot - x_{j,i,n}) + \sum_{i \in \Lambda_\infty} \sigma_{i,i,n}^{\frac{N-2}{2}} U_{j,i}(\sigma_{i,i,n}(\cdot - x_{j,i,n})) + r_n \tag{4.2}$$

使得

(1). Λ_1 和 Λ_∞ 是有限集且 Λ_1 和 Λ_∞ 的元素上方有界且仅与整数 k 有关.

(2). 对于任意的 $i \in \Lambda_1$, $W = |U_{j,i}|$ 满足

$$(-\Delta)^s W + a_0 W \leq W^{2_s^*-1} + \mu W^{q-1} \text{ 在} \mathbb{R}^N \tag{4.3}$$

并且对于任意的 $i \in \Lambda_\infty, W = |U_{j,i}|$ 满足

$$(-\Delta)^s W \leq W^{2_s^*-1} + \mu W^{q-1} \text{ 在} \mathbb{R}^N. \tag{4.4}$$

(3). 存在一个仅与 N 有关的常数 $C_*>0$ 使得对于任意的 $i\in\Lambda_\infty$ ，满足

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N}|U_{j,i}|^{2_s^*}dx\geq C_*. \tag{4.5}$$

(4). 下列不等式恒成立

$$\sum_{i\in\Lambda_1\cup\Lambda_\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^N}|U_{j,i}|^{2_s^*}dx\leq\liminf_{n\to\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^N}|u_{j,\epsilon_n}|^{2_s^*}dx. \tag{4.6}$$

(5). 在 $H^s(\mathbb{R}^N)$ 中，对于任意的 $i\in\Lambda_1$ ，当 $n\to\infty$ 时，有 $u_{j,\epsilon_n}(\cdot+x_{j,i,n})\rightharpoonup U_{j,i}\neq 0$.

(6). 在 $\mathcal{D}^{s,2}$ 中，对于任意的 $i\in\Lambda_\infty$ ，当 $n\to\infty$ 时，有 $\sigma_{j,i,n}^{-\frac{N-2}{2}}u_{j,\epsilon_n}(\sigma_{j,i,n}^{-1}\cdot+x_{j,i,n})\rightharpoonup U_{j,i}\neq 0$ ，其中

$$\mathcal{D}^{s,2}=\overline{C_0^\infty(\mathbb{R}^N)}^{\|\cdot\|_{\mathcal{D}^{s,2}}}$$

且

$$\|u\|_{\mathcal{D}^{s,2}}=(\int\limits_{\mathbb{R}^N}|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

(7). 对于任意的 $i,i'\in\Lambda_1$ ，当 $n\to\infty$ 时，有

$$|x_{j,i,n}-x_{j,i',n}|\to\infty.$$

并且对于任意的 $i,i'\in\Lambda_\infty$ ，当 $n\to\infty$ 时，有

$$\frac{\sigma_{j,i,n}}{\sigma_{j,i',n}}+\frac{\sigma_{j,i',n}}{\sigma_{j,i,n}}+\sigma_{j,i,n}\sigma_{j,i',n}|x_{j,i,n}-x_{j,i',n}|^2\to\infty. \tag{4.7}$$

(8). 在 $L^{2_s^*}(\mathbb{R}^N)$ 中，当 $n\to\infty$ 时，$r_n\to 0$.

证明: 由文献 *[3]*的定理 2.1 和定理 3.3 可得到结论 (4) − (8) 并且由文献 *[4]*的命题 2.3 和推论 2.4 可得结论 (1) − (3) .

引理6. 如果 $i\in\Lambda_\infty$ ，则存在一个序列使得 $x_{j,i,n}\in\mathcal{M}_\epsilon$ 且

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_{j,i,n}dist(x_{j,i,n},\partial\mathcal{M}_\epsilon)=+\infty. \tag{4.8}$$

证明: 简单起见，我们分别记 $|u_{j,\epsilon_n}|,x_{j,i,n}$ 和 $\sigma_{j,i,n}$ 为 u_n,x_n 和 σ_n . 因为 u_{j,ϵ_n} 是 (2.9) 的解且 $|m_\epsilon(\xi)|\leq C/\epsilon$ ，其中 C 是一个与 ϵ 无关的正常数，则我们可推得存在一个与 n 无关的常数 $C>0$ 使得 u_n 满足

$$(-\Delta)^su_n\leq C\epsilon_n^{-(2_s^*-q)}u_n^{q-1}\ \text{在}\mathbb{R}^N\text{中}. \tag{4.9}$$

令 $v_n=\sigma_n^{-(N-2)/2}u_n(\sigma_n^{-1}.+x_n)$.则 v_n 满足

$$(-\Delta)^sv_n\leq C\epsilon_n^{-(2_s^*-q)}\sigma_n^{\frac{N-2}{2}(q-2)-2s}v_n^{q-1}\ \text{在}\mathbb{R}^N\text{中}. \tag{4.10}$$

让 $\omega_n=\sigma_n^{-\frac{N-2}{2}}u_{j,\epsilon_n}(\sigma_n^{-1}.+x_n)$，则有

$$\begin{aligned}&(-\Delta)^s\omega_n+\sigma_n^{-2s}V(\epsilon_n\sigma_n^{-1}x+\epsilon_nx_n)\omega_n+\lambda_n\sigma_n^{-2s}\chi_{\epsilon_n}(\sigma_n^{-1}x+x_n)\omega_n\\=&\sigma_n^{-\frac{N-2}{2}-2s}g_n(\sigma_n^{\frac{N-2}{2}}\omega_n)+\sigma_n^{\frac{N-2}{2}(q-2)-2s}\mu|\omega_n|^{q-2}\omega_n,\end{aligned}\tag{4.11}$$

其中

$$\lambda_n=(\int_{\mathbb{R}^N}\chi_{\epsilon_n}u_{j,\epsilon_n}^2dx-1)_+^{\beta-1}\tag{4.12}$$

且

$$g_n(u)=\frac{q}{2_s^*}|u|^{q-2}|m_{\epsilon_n}(u)|^{2_s^*-q}u+\frac{2_s^*-q}{2_s^*}|u|^q|m_{\epsilon_n}(u)|^{2_s^*-q-2}m_{\epsilon_n}(u)b_{\epsilon_n}(u).$$

设

$$\Lambda_n=\{\sigma_n(y-x_n)\mid y\in\mathcal{M}_{\epsilon_n}\}.$$

因此，我们有

$$\sigma_n^{-1}x+x_n\in\mathcal{M}_{\epsilon_n}\Leftrightarrow x\in\Lambda_n\tag{4.13}$$

且

$$dist(\sigma_n^{-1}x+x_n,\mathcal{M}_{\epsilon_n})=\sigma_n^{-1}dist(x,\Lambda_n).\tag{4.14}$$

从而，我们可推得

$$\chi_{\epsilon_n}(\sigma_n^{-1}x+x_n)=\begin{cases}0, & \text{如果}x\in\Lambda_n\\ \epsilon_n^{-\gamma}\zeta(\sigma_n^{-1}dist(x,\Lambda_n)), & \text{如果}x\notin\Lambda_n.\end{cases}\tag{4.15}$$

不失一般性，我们假设 $\{x_n\}$ 要么满足 $\{x_n\}\subset\mathcal{M}_{\epsilon_n}$ 要么满足 $\{x_n\}\subset\mathbb{R}^N\backslash\mathcal{M}_{\epsilon_n}$.

第一步. 在这一步，我们将证明，存在一个子列使得

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_ndist(x_n,\partial\mathcal{M}_{\epsilon_n})=+\infty.\tag{4.16}$$

假设结论不成立，则

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_ndist(x_n,\partial\mathcal{M}_{\epsilon_n})=r<+\infty.\tag{4.17}$$

因此，通过旋转变换，我们有

$$\Lambda_n\to\begin{cases}\Pi_+:=\{x=(x_1,\cdots,x_N)\in\mathbb{R}^N\mid x_N\le r\}, & \text{如果}\{x_n\}\subset\mathcal{M}_{\epsilon_n}\\ \Pi_-:=\{x=(x_1,\cdots,x_N)\in\mathbb{R}^N\mid x_N\le -r\}, & \text{如果}\{x_n\}\subset\mathbb{R}^N\backslash\mathcal{M}_{\epsilon_n}.\end{cases}\tag{4.18}$$

接下来，我们将证明在 $\mathbb{R}^N\backslash\Pi_+$ 中，若 $\{x_n\}\subset\mathcal{M}_{\epsilon_n}$，则 $U_{j,i}\neq0$.如果结论不成立，则 $U_{j,i}=0$ $a.e.$ 在$\mathbb{R}^N\backslash\Pi_+$.结合 $U_{j,i}\in\mathcal{D}^{s,2}$，我们可推得

$$U_{j,i}\in\mathcal{D}_0^{s,2}(\Pi_+),\tag{4.19}$$

这里

$$\mathcal{D}_0^{s,2}(\Pi_+) = \overline{C_0^\infty(\Pi_+)}^{\|\cdot\|_{\mathcal{D}^{s,2}}}.$$

对于任意的 $\varphi \in C_0^\infty(\Pi_+)$，当 $n \to \infty$ 时，我们有

$$\sigma_n^{-2s} \int_{\mathbb{R}^N} \omega_n \varphi \to 0 \text{ 且} \sigma_n^{\frac{(N-2)(q-2)}{2}-2s} \int_{\mathbb{R}^N} |\omega_n|^{q-2}\omega_n\varphi \to 0. \tag{4.20}$$

因为 $\varphi \in C_0^\infty(\Pi_+)$，则由 (4.18) 可得对于充分大的 n，φ 的支集包含在 Λ_n 中.从而，由 (4.15) 可得，对于充分大的 n 满足

$$\chi_{\epsilon_n}(\sigma_n^{-1}x + x_n)\omega_n\varphi = 0. \tag{4.21}$$

由 (4.11), (4.19), (4.20), (4.21) 和当 $n \to \infty$ 时，$g_n(u) \to |u|^{2_s^*-2}u$ 可得 $U_{j,i}$ 是方程

$$(-\Delta)^s u = \sigma_n^{\frac{(N-2)(2_s^*-2)}{2}-2s}|u|^{2_s^*-2}u, u \in \mathcal{D}_0^{s,2}(\Pi_+). \tag{4.22}$$

的一个解.由文献 [5]的定理 1.1 可得，在 $\mathcal{D}_0^{s,2}(\Pi_+)$ 中，$U_{j,i} = 0$.因此，在 $\mathcal{D}^{s,2}(\mathbb{R}^N)$ 中，$U_{j,i} = 0$.这和引理 3.11 的结论 (6) 产生矛盾.从而，在 $\mathbb{R}^N \backslash \Pi_+$ 中，有 $U_{j,i} \not\equiv 0$.

类似地，我们可以证明，在 $\mathbb{R}^N \backslash \Pi_-$ 中，当 $\{x_n\} \subset \mathbb{R}^N \backslash \mathcal{M}_{\epsilon_n}$ 时，$U_{j,i} \not\equiv 0$.

因为在 $\mathbb{R}^N \backslash \Pi_\pm$ 中，$U_{j,i} \not\equiv 0$，则我们可以选取充分大的 $R > 0$ 和充分小的 $\delta > 0$ 使得

$$b' := \int_{B_R(0)\cap(\mathbb{R}^N \backslash (\Pi_\pm)^\delta)} U_{j,i}^2 > 0. \tag{4.23}$$

由引理 5 的结论 (6) 可得

$$v_n = \sigma_n^{-\frac{N-2}{2}}|u_{j,\epsilon_n}|(\sigma_n^{-1}. + x_n) \rightharpoonup |U_{j,i}| \neq 0 \text{ 在} \mathcal{D}^{s,2}.$$

则由 (4.18) 和 (4.23) 可得对于充分大的 n，有

$$\frac{1}{2}b' \leq \int_{B_R(0)\cap(\mathbb{R}^N \backslash (\Lambda_n)^\delta)} v_n^2. \tag{4.24}$$

由 $Q_\epsilon(u_{j,\epsilon_n}) \leq \eta_k$ 和 χ_ϵ 的定义可得，存在常数 $C = C(k) > 0$ 使得

$$\int_{\mathbb{R}^N \backslash \mathcal{M}_{\epsilon_n}} \zeta(dist(x, \mathcal{M}_{\epsilon_n})u_n^2 dx \leq C\epsilon_n^\gamma. \tag{4.25}$$

因此，我们可得

$$\int_{\mathbb{R}^N \backslash \Lambda_n} \zeta(\sigma_n^{-1}dist(x, \Lambda_n))v_n^2 dx \leq C\epsilon_n^\gamma\sigma_n^2. \tag{4.26}$$

DOI: 10.12677/aam.2021.105166

由 (2.2) 和 (4.18) 可得当 n 充分大时，对于任意的 $x \in B_R(0) \cap (\mathbb{R}^N \backslash (\Lambda_n)^\delta)$，有

$$\zeta(\sigma_n^{-1} dist(x, \Lambda_n)) \geq C' \sigma_n^{-4}. \tag{4.27}$$

由 (4.27) 可得到

$$C' \sigma_n^{-4} \int\limits_{B_R(0) \cap (\mathbb{R}^N \backslash (\Lambda_n)^\delta)} v_n^2 \leq \int\limits_{B_R(0) \cap (\mathbb{R}^N \backslash (\Lambda_n)^\delta)} \zeta(\sigma_n^{-1} dist(x, \Lambda_n)) v_n^2 dx \leq C \epsilon_n^\gamma \sigma_n^2.$$

从而，我们可得到

$$\int\limits_{B_R(0) \cap (\mathbb{R}^N \backslash (\Lambda_n)^\delta)} v_n^2 \leq C \epsilon_n^\gamma \sigma_n^6. \tag{4.28}$$

则由 (4.24) 和 (4.28) 可得

$$\epsilon_n^{-1} \leq C \sigma_n^{6/\gamma}, \tag{4.29}$$

其中 C 是与 n 无关的正常数.结合 (4.29) 和 (4.10)，我们可以得到

$$(-\Delta)^s v_n \leq C \sigma_n^{\frac{6(2_s^* - q)}{\gamma} + \frac{(N-2)(q-2)}{2} - 2s} v_n^{q-1} \text{ 在} \mathbb{R}^N \text{中}. \tag{4.30}$$

因为 $\gamma > 12/(N-2)$，则 $\frac{6(2_s^*-q)}{\gamma} + \frac{N-2}{2}(q-2) - 2s < 0$.在 (4.30) 中，令 $n \to \infty$，则由 $v_n \rightharpoonup W = |U_{j,i}| \neq 0 \ in \ \mathcal{D}^{s,2}$，我们可得

$$(-\Delta)^s W \leq 0 \text{ 在} \mathbb{R}^N \text{中}.$$

这与 $W \geq 0, W \neq 0$ 和 $\int\limits_{\mathbb{R}^N} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} W|^2 < +\infty$ 产生矛盾.因此，(4.17) 不成立.从而 (4.16) 成立.

第二步. 在这一步中，我们将证明存在序列 $\{x_n\} \subset \mathcal{M}_{\epsilon_n}$. 假设结论不成立，则任意序列 $\{x_n\} \subset \mathbb{R}^N \backslash \mathcal{M}_{\epsilon_n}$.结合 (4.16) 可得对于任意的常数 $R > 0$，当 n 充分大时，有

$$B_R(0) \subset \mathbb{R}^N \backslash (\Lambda_n)^1. \tag{4.31}$$

因为 $U_{j,i} \not\equiv 0$，则存在常数 $R_0 > 0$ 使得

$$b'' := \int\limits_{B_{R_0(0)}} U_{j,i}^2 > 0. \tag{4.32}$$

使用第一步中相同的参数，则由 (4.31) 和 (4.32) 可得 (4.29) 成立.同样地，我们可得与第一步类似的矛盾.因此，存在一个序列 $\{x_n\} \subset \mathcal{M}_{\epsilon_n}$.

由上述的第一步和第二步的证明过程即可得到引理 6 的证明.

引理7. 存在一个常数 $C > 0$ 使得对于任意的 $i \in \Lambda_\infty$，满足

$$|U_{j,i}(x)| \leq C|x|^{-(N-2)}, |x| \geq 1.$$

下列引理给出了 $U_{j,i}$ 的精确的极限方程.

引理8. 对于任意的 $i \in \Lambda_1$，存在 $y_{j,i} \in \overline{\mathcal{M}}$ 使得 $U_{j,i}$ 是方程

$$(-\Delta)^s u + V(y_{j,i})u = |u|^{2_s^*-2}u + \mu|u|^{q-2}u, u \in H^s(\mathbb{R}^N). \tag{4.33}$$

的一个解.对于任意的 $i \in \Lambda_\infty, U_{j,i}$ 是方程

$$(-\Delta)^s u = \sigma_n^{\frac{N-2}{2}(2_s^*-2)-2s}|u|^{2_s^*-2}u, u \in \mathcal{D}^{s,2}(\mathbb{R}^N). \tag{4.34}$$

的一个解.

证明: 若 $i \in \Lambda_1$，则由文献 [2] 的引理 4.3 可得 $\epsilon_n x_{j,i,n} \in \mathcal{M}$ 且

$$\lim_{n\to\infty} dist(x_{j,i,n}, \partial\mathcal{M}_{\epsilon_n}) = +\infty.$$

则由引理 5 的结论 (5)，我们可得 $U_{j,i}$ 是方程 (4.33) 的解且

$$y_{j,i} = \lim_{n\to\infty} \epsilon_n x_{j,i,n} \in \overline{\mathcal{M}}.$$

如果 $i \in \Lambda_\infty$，则由 u_{j,ϵ_n} 是方程 (2.9) 的解，我们可得 $\omega_n = \sigma_{j,i,n}^{-\frac{N-2}{2}} u_{j,\epsilon_n}(\sigma_{j,i,n}^{-1}\cdot + x_{j,i,n})$ 满足方程 (4.11).对于任意的 $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$，当 $n \to \infty$ 时，有

$$\sigma_{j,i,n}^{-2s}\int_{\mathbb{R}^N}\omega_n\varphi \to 0 \text{ 且} \sigma_{j,i,n}^{\frac{(N-2)(q-2)}{2}-2s}\int_{\mathbb{R}^N}|\omega_n|^{q-2}\omega_n\varphi \to 0. \tag{4.35}$$

由引理 4 和引理 6 可得 λ_n 是有界的且

$$\lambda_n\int_{\mathbb{R}^N}\chi_{\epsilon_n}(\sigma_{j,i,n}^{-1}x + x_{j,i,n})\omega_n\varphi \to 0, n \to \infty. \tag{4.36}$$

由 (4.11), (4.35), (4.36) 和当 $n \to \infty$ 时，$g_n(u) \to |u|^{2_s^*-2}u$，我们可得 $U_{j,i}$ 满足 (4.34)．

令 $i_\infty \in \Lambda_\infty$ 满足

$$\sigma_n := \sigma_{j,i_\infty,n} = \min\{\sigma_{j,i,n} \mid i \in \Lambda_\infty\}. \tag{4.37}$$

记

$$x_n := x_{j,i_\infty,n}. \tag{4.38}$$

引理9. 存在一个常数 $\overline{C} > 0$ 使得集合

$$\mathcal{A}_n^1 = B_{(\overline{C}+5)\sigma_n^{-\frac{1}{2}}}(x_n) \backslash B_{\overline{C}\sigma_n^{-\frac{1}{2}}}(x_n)$$

满足

$$\mathcal{A}_n^1 \cap \{x_{j,i,n} \mid i \in \Lambda_\infty\} = \emptyset.$$

证明: 由引理 4 可推得

$$T := 1 + \limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |u_{j,\epsilon_n}|^{2_s^*} < +\infty. \tag{4.39}$$

令

$$m_0 = [\frac{T}{C_*}] + 1, \tag{4.40}$$

这里的 C_* 来自 (4.5) 且 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数部分.令

$$\mathcal{B}_{n,m} = B_{6m\sigma_n^{-\frac{1}{2}}}(x_n)\backslash B_{(6m-5)\sigma_n^{-\frac{1}{2}}}(x_n), m = 1, 2, \cdots, m_0.$$

接下来, 我们需要证明, 对于充分大的 n , 存在 $1 \le m_n \le m_0$ 使得

$$\mathcal{B}_{n,m_n} \cap \{x_{j,i,n} \mid i \in \Lambda_\infty\} = \emptyset. \tag{4.41}$$

假设结论不成立, 则对于充分大的 n , 存在 $i_m \in \Lambda_\infty$ 使得

$$x_{j,i_m,n} \in \mathcal{B}_{n,m}, m = 1, 2, \cdots, m_0. \tag{4.42}$$

由 $\mathcal{B}_{n,m}$ 的定义和 (4.42) 可得

$$B_{\sigma_n^{-\frac{1}{2}}/4}(x_{j,i_m,n}) \cap B_{\sigma_n^{-\frac{1}{2}}/4}(x_{j,i_{m'},n}) = \emptyset, m \neq m'. \tag{4.43}$$

因此, 我们可得

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^N} |u_{j,\epsilon_n}|^{2_s^*} dx \\ &\ge \sum_{m=1}^{m_0} \int_{B_{\sigma_{j,i_m,n}\frac{1}{4}\sigma_n^{-\frac{1}{2}}}(0)} \sigma_{j,i_m,n}^{\frac{N-2s}{N-2}} |\sigma_{j,i_m,n}^{-\frac{N-2}{2}} u_{j,\epsilon_n}(\sigma_{j,i_m,n}^{-1} x + x_{j,i_m,n})|^{2_s^*} dx. \end{aligned} \tag{4.44}$$

因为当 $n \to \infty$ 时, $\sigma_{j,i_m,n}\sigma_n^{-\frac{1}{2}} \ge \sigma_n^{\frac{1}{2}} \to \infty$, 则由 (4.44) 和引理 5 的结论 (6) 可得

$$\liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |u_{j,\epsilon_n}|^{2_s^*} \ge \sum_{m=1}^{m_0} \int_{\mathbb{R}^N} |U_{j,i_m}|^{2_s^*}. \tag{4.45}$$

结合 (4.5), (4.39) 和 (4.45) 可得

$$T \ge m_0 C_*. \tag{4.46}$$

这和 (4.40) 产生矛盾.

由 (4.41) 可得, 存在常数 m_* 和序列 $\{n_l\}$ 有

$$\mathcal{B}_{n_l,m_*} \cap \{x_{j,i,n_l} \mid i \in \Lambda_\infty\} = \emptyset, l = 1, 2, \cdots. \tag{4.47}$$

令 $\overline{C}=6m_*-5$, 则由 (4.47) 即可得到该引理的证明.

引理10. 令

$$\mathcal{A}_n^2=B_{(\overline{C}+4)\sigma_n^{-\frac{1}{2}}}(x_n)\backslash B_{(\overline{C}+1)\sigma_n^{-\frac{1}{2}}}(x_n).$$

则存在与 n 无关的正常数 C 使得

$$|u_{j,\epsilon_n}(x)|\le C, x\in\mathcal{A}_n^2.$$

证明: 因为当 $\epsilon=\epsilon_n$ 时, u_{j,ϵ_n} 满足 (2.12) , 则在 $\mathbb{R}^N$ 中, 由 (4.2) 和引理 8 可得

$$\begin{aligned}
&(-\Delta)^s r_n+V(\epsilon_n x)r_n+\lambda_n\chi_{\epsilon_n}r_n\\
=&f_{\epsilon_n}\big(\sum_{i\in\Lambda_1}U_{j,i}(x-x_{j,i,n})+\sum_{i\in\Lambda_\infty}\sigma_{j,i,n}^{\frac{N-2}{2}}U_{j,i}(\sigma_{j,i,n}(x-x_{j,i,n}))+r_n\big)\\
&+\sum_{i\in\Lambda_1}\big(-|U_{j,i}(x-x_{j,i,n})|^{2_s^*-2}U_{j,i}(x-x_{j,i,n})-\mu|U_{j,i}(x-x_{j,i,n})|^{q-2}U_{j,i}(x-x_{j,i,n})\\
&\quad+V(y_{j,i})U_{j,i}(x-x_{j,i,n})-V(\epsilon_n x)U_{j,i}(x-x_{j,i,n})-\lambda_n\chi_{\epsilon_n}U_{j,i}(x-x_{j,i,n})\big)\\
&+\sum_{i\in\Lambda_\infty}\big(-|\sigma_{j,i,n}^{\frac{N-2}{2}}U_{j,i}(\sigma_{j,i,n}(x-x_{j,i,n}))|^{2_s^*-2}\sigma_{j,i,n}^{\frac{N-2}{2}}U_{j,i}(\sigma_{j,i,n}(x-x_{j,i,n}))\\
&\quad-V(\epsilon_n x)\sigma_{j,i,n}^{\frac{N-2}{2}}U_{j,i}(\sigma_{j,i,n}(x-x_{j,i,n}))-\lambda_n\chi_{\epsilon_n}\sigma_{j,i,n}^{\frac{N-2}{2}}U_{j,i}(\sigma_{j,i,n}(x-x_{j,i,n}))\big),
\end{aligned}\tag{4.48}$$

其中 λ_n 来自 (4.12) .令

$$R_n=|r_n|.$$

因为存在一个与 ϵ 无关的正常数 C 使得

$$|f_\epsilon(t)|\le\frac{a}{2}|t|+C|t|^{2_s^*-1}, t\in\mathbb{R},$$

由 (4.48) 和 $V\ge a$ (参见 (A_1) 可得, 存在与 n 无关的正常数 C 使得

$$\begin{aligned}
&(-\Delta)^s R_n+\frac{a}{2}R_n+\lambda_n\chi_{\epsilon_n}R_n\\
\le&C|r_n|^{2_s^*-2}R_n+C\sum_{i\in\Lambda_1}|U_{j,i}(x-x_{j,i,n})|^{2_s^*-1}+C\sum_{i\in\Lambda_\infty}|\sigma_{j,i,n}^{\frac{N-2}{2}}U_{j,i}(\sigma_{j,i,n}(x-x_{j,i,n}))|^{2_s^*-1}\\
&+C\sum_{i\in\Lambda_1}|U_{j,i}(x-x_{j,i,n})|+C\sum_{i\in\Lambda_\infty}|\sigma_{j,i,n}^{\frac{N-2}{2}}U_{j,i}(\sigma_{j,i,n}(x-x_{j,i,n}))|\\
&+\lambda_n\chi_{\epsilon_n}\sum_{i\in\Lambda_1}|U_{j,i}(x-x_{j,i,n})|+\lambda_n\chi_{\epsilon_n}\sum_{i\in\Lambda_\infty}|\sigma_{j,i,n}^{\frac{N-2}{2}}U_{j,i}(\sigma_{j,i,n}(x-x_{j,i,n}))|.
\end{aligned}\tag{4.49}$$

令 $R_n^{(1)}$ 满足

$$\begin{aligned}
&(-\Delta)^s R_n^{(1)}+\frac{a}{2}R_n^{(1)}+\lambda_n\chi_{\epsilon_n}R_n^{(1)}-C|r_n|^{2_s^*-2}R_n^{(1)}\\
=&C\sum_{i\in\Lambda_1}|U_{j,i}(x-x_{j,i,n})|^{2_s^*-1}+C\sum_{i\in\Lambda_1}|U_{j,i}(x-x_{j,i,n})|, \text{在}\mathbb{R}^N\text{中}.
\end{aligned}\tag{4.50}$$

因为对于任意的 $i\in\Lambda_1$，$U_{j,i}\in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ 且当 $n\to\infty$ 时，$\||r_n|^{2_s^*-2}\|_{L^{\frac{N}{2s}}(\mathbb{R}^N)}\to 0$，则使用文献 [6] 中的定理 2.9 的 (2.47) 的类似证明和椭圆方程的 *Moser* 法(例如，可参见文献 [7]的定理 4.1 的证明)，我们可得存在一个与 n 无关的正常数 C 使得

$$0\le R_n^{(1)}\le C. \tag{4.51}$$

对于任意的 $i\in\Lambda_\infty$，令 $T_{j,i,n}\in\mathcal{D}^{s,2}$ 满足

$$(-\Delta)^s T_{j,i,n}-C|\omega_{j,i,n}|^{2_s^*-2}T_{j,i,n}=C|U_{j,n}|^{2_s^*-1}\ \text{在}\mathbb{R}^N\text{中}, \tag{4.52}$$

其中

$$\omega_{j,i,n}(x)=\sigma_{j,i,n}^{-\frac{N-2s}{2}}r_n(\sigma_{j,i,n}^{-1}x+x_{j,i,n}),x\in\mathbb{R}^N. \tag{4.53}$$

因为

$$\|\omega_{j,i,n}\|_{L^{2_s^*}(\mathbb{R}^N)}=\|r_n\|_{L^{2_s^*}(\mathbb{R}^N)}\to 0,n\to\infty$$

且 $U_{j,i}\in L^\infty(\mathbb{R}^N)$，则我们可得存在一个与 n 无关的正常数 C 使得

$$0\le T_{j,i,n}\le C. \tag{4.54}$$

因此，由 (4.54)可得存在一个与 n 无关的正常数 C 使得

$$0\le T_{j,i,n}\le C(1+|x|)^{-(N-2)},x\in\mathbb{R}^N. \tag{4.55}$$

令

$$R_n^{(2)}=\sum_{i\in\Lambda_\infty}\sigma_{j,i,n}^{\frac{(2_s^*-1)(N-2)}{2}-2s}T_{j,i,n}(\sigma_{j,i,n}(x-x_{j,i,n})). \tag{4.56}$$

则

$$\begin{aligned}&(-\Delta)^s R_n^{(2)}+\frac{a}{2}R_n^{(2)}+\lambda_n\chi_{\epsilon_n}R_n^{(2)}-C|r_n|^{2_s^*-2}R_n^{(2)}\\ \ge& C\sum_{i\in\Lambda_\infty}|\sigma_{j,i,n}^{\frac{N-2}{2}}U_{j,i}(\sigma_{j,i,n}(x-x_{j,i,n}))|^{2_s^*-1}\ \text{在}\mathbb{R}^N\text{中}.\end{aligned} \tag{4.57}$$

假设 φ 满足

$$\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^N),\varphi\ge 0\ and\ \varphi\not\equiv 0\ \text{在}\mathbb{R}^N\text{中}. \tag{4.58}$$

对于任意的 $i\in\Lambda_\infty$，令 $H_{j,i,n}\in\mathcal{D}^{s,2}$ 满足

$$(-\Delta)^s H_{j,i,n}-C|h_{j,i,n}|^{2_s^*-2}H_{j,i,n}=\varphi\ \text{在}\mathbb{R}^N\text{中}, \tag{4.59}$$

其中

$$h_{j,i,n}=\sigma_{j,i,n}^{-\frac{N-2s}{2}}r_n(\sigma_{j,i,n}^{-1}y+x_{j,i,n}).$$

因为 $\||h_{j,i,n}|^{2_s^*-2}\|_{L^{\frac{N}{2s}}(\mathbb{R}^N)} = \||r_n|^{2_s^*-2}\|_{L^{\frac{N}{2s}}(\mathbb{R}^N)} \to 0$，则在 $\mathbb{R}^N$ 中，由 (4.59) 可得，$H_{j,i,n} \geq 0$.故

$$(-\Delta)^s H_{j,i,n} \geq 0 \text{ 在}\mathbb{R}^N\text{中}.$$

从而，存在一个与 n 无关的正常数 C 满足

$$H_{j,i,n} \geq C(1+|x|)^{-(N-2)}, x \in \mathbb{R}^N. \tag{4.60}$$

另外，由 (4.55) 的证明，我们可得存在一个与 n 无关的正常数 C' 使得

$$H_{j,i,n} \leq C'(1+|x|)^{-(N-2)}, x \in \mathbb{R}^N. \tag{4.61}$$

由引理 7 和 (4.60) 可推得存在一个与 n 无关的正常数 ρ 满足

$$\min\left\{\frac{a}{2}, 1\right\} \rho H_{j,i,n} \geq \max\{C, 1\}|U_{j,i}| \text{ 在}\mathbb{R}^N\text{中}, \tag{4.62}$$

这里的常数 C 来自 (4.49) .令

$$Q_{j,i,n}(x) = \sigma_{j,i,n}^{\frac{N-2}{2}} \rho H_{j,i,n}(\sigma_{j,i,n}(x - x_{j,i,n})), x \in \mathbb{R}^N. \tag{4.63}$$

则由 (4.59) 可得

$$(-\Delta)^s Q_{j,i,n} - C|r_n|^{2_s^*-2} Q_{j,i,n} = \varphi_n \text{ 在}\mathbb{R}^N\text{中}, \tag{4.64}$$

其中

$$\varphi_n = \sigma_{j,i,n}^{\frac{N+2}{2}+2s} \rho\varphi(\sigma_{j,i,n}(\cdot - x_{j,i,n})).$$

由 (4.62) 和 (4.64) 可得

$$\begin{aligned} &(-\Delta)^s Q_{j,i,n} + \frac{a}{2} Q_{j,i,n} - C|r_n|^{2_s^*-2} Q_{j,i,n} \\ \geq &C|\sigma_{j,i,n}^{\frac{N-2}{2}} U_{j,i}(\sigma_{j,i,n}(\cdot - x_{j,i,n}))| \text{ 在}\mathbb{R}^N\text{中}, \end{aligned} \tag{4.65}$$

且

$$\begin{aligned} &(-\Delta)^s Q_{j,i,n} + \frac{a}{2} Q_{j,i,n} + \lambda_n \chi_{\epsilon_n} Q_{j,i,n} - C|r_n|^{2_s^*-2} Q_{j,i,n} \\ \geq &\lambda_n \chi_{\epsilon_n} |\sigma_{j,i,n}^{\frac{N-2}{2}} U_{j,i}(\sigma_{j,i,n}(\cdot - x_{j,i,n}))| \text{ 在}\mathbb{R}^N\text{中}. \end{aligned} \tag{4.66}$$

令

$$R_n^{(3)} = \sum_{i \in \Lambda_\infty} Q_{j,i,n}. \tag{4.67}$$

则有

$$\begin{aligned} &(-\Delta)^s R_n^{(3)} + \frac{a}{2} R_n^{(3)} + \lambda_n \chi_{\epsilon_n} R_n^{(3)} - C|r_n|^{2_s^*-2} R_n^{(3)} \\ \geq &C \sum_{i \in \Lambda_\infty} |\sigma_{j,i,n}^{\frac{N-2}{2}} U_{j,i}(\sigma_{j,i,n}(\cdot - x_{j,i,n}))| \text{ 在}\mathbb{R}^N\text{中}, \end{aligned} \tag{4.68}$$

且

$$\begin{aligned}&(-\Delta)^s R_n^{(3)} + \frac{a}{2} R_n^{(3)} + \lambda_n \chi_{\epsilon_n} R_n^{(3)} - C|r_n|^{2_s^*-2} R_n^{(3)} \\ \geq & \lambda_n \chi_{\epsilon_n} \sum_{i\in\Lambda_\infty} |\sigma_{j,i,n}^{\frac{N-2}{2}} U_{j,i}(\sigma_{j,i,n}(\cdot - x_{j,i,n}))| \text{ 在}\mathbb{R}^N\text{中}.\end{aligned} \tag{4.69}$$

对于任意的 $i \in \Lambda_1$，令 $S_{j,i,n} \in \mathcal{D}^{s,2}$ 满足

$$(-\Delta)^s S_{j,i,n} - C|r_n|^{2_s^*-2} S_{j,i,n} = |U_{j,i}(\cdot - x_{j,i,n})|^{2_s^*-1} + \mu |U_{j,i}(\cdot - x_{j,i,n})|^{q-1} \text{ 在}\mathbb{R}^N\text{中}. \tag{4.70}$$

因为 $U_{j,i}(\cdot - x_{j,i,n})$ 满足 (4.33)，则我们可得

$$\begin{aligned}&(-\Delta)^s |U_{j,i}(\cdot - x_{j,i,n})| - C|r_n|^{2_s^*-2} |U_{j,i}(\cdot - x_{j,i,n})| \\ \leq & |U_{j,i}(\cdot - x_{j,i,n})|^{2_s^*-1} + \mu |U_{j,i}(\cdot - x_{j,i,n})|^{q-1} \text{ 在}\mathbb{R}^N\text{中}.\end{aligned} \tag{4.71}$$

结合 (4.70)，我们可得在 $\mathbb{R}^N$ 中，有

$$S_{j,i,n} \geq |U_{j,i}(\cdot - x_{j,i,n})|. \tag{4.72}$$

另外，对于任意的 $i \in \Lambda_1$，$U_{j,i} \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ 且当 $n \to \infty$ 时，$\||r_n|^{2_s^*-2}\|_{L^{\frac{N}{2s}}(\mathbb{R}^N)} \to 0$，则由 (4.51) 的证明可得，存在一个与 n 无关的正常数 C 满足

$$0 \leq S_{j,i,n} \leq C. \tag{4.73}$$

因此，由 (4.70) 和 (4.72) 可得

$$\begin{aligned}&(-\Delta)^s S_{j,i,n} + \frac{a}{2} S_{j,i,n} + \lambda_n \chi_{\epsilon_n} S_{j,i,n} - C|r_n|^{2_s^*-2} S_{j,i,n} \\ \geq & \lambda_n \chi_{\epsilon_n} |U_{j,i}(\cdot - x_{j,i,n})| \text{ 在}\mathbb{R}^N\text{中}.\end{aligned} \tag{4.74}$$

令

$$R_n^{(4)} = \sum_{i\in\Lambda_1} S_{j,i,n}. \tag{4.75}$$

则存在一个与 n 无关的正常数 C 使得

$$0 \leq R_n^{(4)} \leq C \text{ 在}\mathbb{R}^N, \tag{4.76}$$

并且

$$\begin{aligned}&(-\Delta)^s R_n^{(4)} + \frac{a}{2} R_n^{(4)} + \lambda_n \chi_{\epsilon_n} R_n^{(4)} - C|r_n|^{2_s^*-2} R_n^{(4)} \\ \geq & \lambda_n \chi_{\epsilon_n} \sum_{i\in\Lambda_1} |U_{j,i}(\cdot - x_{j,i,n})| \text{ 在}\mathbb{R}^N\text{中}.\end{aligned} \tag{4.77}$$

从而，由 (4.49), (4.50), (4.57), (4.68), (4.69) 和 (4.77) 可得

$$0 \leq R_n \leq R_n^{(1)} + R_n^{(2)} + 2R_n^{(3)} + R_n^{(4)}. \tag{4.78}$$

由 (4.51), (4.55), (4.56), (4.61), (4.63), (4.67) 和 (4.76) 可得存在一个与 n 无关的正常数 C 满足

$$\begin{aligned} &R_n^{(1)} + R_n^{(2)} + 2R_n^{(3)} + R_n^{(4)} \\ \leq &C + C\sum_{i\in\Lambda_\infty} \sigma_{j,i,n}^{\frac{N-2}{2}}(1+\sigma_{j,i,n}|x-x_{j,i,n}|)^{-(N-2)} \\ &+ C\sum_{i\in\Lambda_\infty} \sigma_{j,i,n}^{\frac{(2_s^*-1)(N-2)}{2}-2s}(1+\sigma_{j,i,n}|x-x_{j,i,n}|)^{-(N-2)}. \end{aligned} \tag{4.79}$$

由 (4.2), (4.61), (4.62), (4.72), (4.73), (4.78) 和 (4.79) 可得存在一个与 n 无关的正常数 C 使得

$$\begin{aligned} |u_{j,\epsilon_n}(x)| \leq &C + C\sum_{i\in\Lambda_\infty} \sigma_{j,i,n}^{\frac{N-2}{2}}(1+\sigma_{j,i,n}|x-x_{j,i,n}|)^{-(N-2)} \\ &+ C\sum_{i\in\Lambda_\infty} \sigma_{j,i,n}^{\frac{(2_s^*-1)(N-2)}{2}-2s}(1+\sigma_{j,i,n}|x-x_{j,i,n}|)^{-(N-2)}. \end{aligned} \tag{4.80}$$

由引理 9 可得, 对于任意的 $i \in \Lambda_\infty, x \in \mathcal{A}_n^2$ ，有

$$\sigma_{j,i,n}|x-x_{j,i,n}| \geq \sigma_{j,i,n}\sigma_n^{-\frac{1}{2}} \geq \sigma_{j,i,n}^{\frac{1}{2}}. \tag{4.81}$$

从而, 我们可得到 (4.80) 和 (4.81) 的证明.

引理11. 下列不等式恒成立

$$\int_{\mathcal{A}_n^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u_{j,\epsilon_n}|^2 dx \leq C\sigma_n^{-(N-2)/2},$$

其中

$$\mathcal{A}_n^3 = B_{(\overline{C}+3)\sigma_n^{-\frac{1}{2}}}(x_n) \backslash B_{(\overline{C}+2)\sigma_n^{-\frac{1}{2}}}(x_n).$$

引理12. 令

$$B_n = B_{(\overline{C}+2.7)\sigma_n^{-\frac{1}{2}}}(x_n) \tag{4.82}$$

且 $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ 使得在 $\mathbb{R}$ 中, 有 $\phi \geq 0$.若 $t \geq (\overline{C}+2.7)\sigma_n^{-\frac{1}{2}}$ ，则 $\phi(t) = 0$;若 $t \leq (\overline{C}+2.1)\sigma_n^{-\frac{1}{2}}$ ，则 $\phi(t) = 1$;若 $t \geq 0$ ，则 $\phi'(t) \leq 0$ 且 $|\phi'(t)| \leq 3\sigma_n^{\frac{1}{2}}$. 令

$$\varphi(x) = \phi(|x-x_n|), x \in B_n. \tag{4.83}$$

则存在一个与 n 无关的正常数 C 使得

$$\lambda_n \int_{\mathcal{A}_n^3} |\nabla \chi_{\epsilon_n}| u_{j,\epsilon_n}^2 \varphi \leq C\sigma_n^{-\frac{N-3}{2}}, \tag{4.84}$$

且

$$\lambda_n \int_{\mathcal{A}_n^3} \chi_{\epsilon_n} u_{j,\epsilon_n}^2 \varphi \leq C\sigma_n^{-\frac{N-2}{2}}. \tag{4.85}$$

证明: 因为 u_{j,ϵ_n} 满足 (2.12)，则在方程 (2.12) 两边同乘 u_{j,ϵ_n} 并关于 $\mathcal{A}_n^3$ 积分可得

$$\int\limits_{\mathcal{A}_n^3} ((-\Delta)^s u_{j,\epsilon_n} \cdot u_{j,\epsilon_n} + V(\epsilon_n x)u_{j,\epsilon_n}^2 + \lambda_n \chi_{\epsilon_n} u_{j,\epsilon_n}^2)dx = \int\limits_{\mathcal{A}_n^3} f_{\epsilon_n}(u_{j,\epsilon_n})u_{j,\epsilon_n}dx$$

结合引理 10 和引理 11，我们可得

$$\begin{aligned}\lambda_n \int\limits_{\mathcal{A}_n^3} \chi_{\epsilon_n} u_{j,\epsilon_n}^2 dx &= \int\limits_{\mathcal{A}_n^3} f_{\epsilon_n}(u_{j,\epsilon_n})u_{j,\epsilon_n}dx - \int\limits_{\mathcal{A}_n^3} V(\epsilon_n x)u_{j,\epsilon_n}^2 dx - \int\limits_{\mathcal{A}_n^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u_{j,\epsilon_n}|^2 dx \\ &\leq C\sigma_n^{-\frac{N-2}{2}}.\end{aligned}$$

因为

$$\nabla\chi_\epsilon(x) = \begin{cases} 0, & \text{如果} \quad x \in \mathcal{M}_\epsilon \\ \epsilon^{-\gamma}\zeta'(dist(x, \mathcal{M}_{\epsilon_n}))\nabla dist(x, \mathcal{M}_{\epsilon_n}), & \text{如果} \quad x \in \mathbb{R}^N \backslash \mathcal{M}_\epsilon. \end{cases}$$

由 (2.14) 和引理 10 可得

$$\begin{aligned}&\lambda_n \int\limits_{\mathcal{A}_n^3} |\nabla\chi_{\epsilon_n}|u_{j,\epsilon_n}^2 \varphi dx \\ \leq &C\sigma_n^{-\frac{N-3}{2}}.\end{aligned}$$

命题3. 如果 $\max\{\frac{N+2}{N-2}, 2\} < q < 2_s^*$，则 $\Lambda_\infty = \emptyset$.

证明: 如果 $\Lambda_\infty \neq \emptyset$，我们可选取 x_n 和 σ_n 分别满足 (4.38) 和 (4.37) .因为对于任意的 $x \in \mathcal{A}_n^3$，$|\nabla\varphi| \leq 3\sigma_n^{\frac{1}{2}}$ 且 $|x - x_n| \leq (\overline{C} + 3)\sigma_n^{-\frac{1}{2}}$，则由引理 10 可得

$$\int\limits_{\mathcal{A}_n^3} V(\epsilon_n x)u_{j,\epsilon_n}^2 \varphi + \frac{\epsilon_n}{2}\int\limits_{\mathcal{A}_n^3} |(x - x_n, \nabla V(\epsilon_n x))|u_{j,\epsilon_n}^2 \varphi \leq C\sigma_n^{-\frac{N-2}{2}}. \tag{4.86}$$

由引理 12 可得

$$\lambda_n \int\limits_{\mathcal{A}_n^3} \chi_{\epsilon_n} u_{j,\epsilon_n}^2 \varphi \leq C\sigma_n^{-\frac{N-2}{2}}, \tag{4.87}$$

且

$$\begin{aligned}&|\frac{\lambda_n}{2}\int\limits_{\mathcal{A}_n^3} ((x - x_n) \cdot \nabla\chi_{\epsilon_n})u_{j,\epsilon_n}^2 \varphi| \\ \leq &C\sigma_n^{-\frac{1}{2}}\lambda_n \int\limits_{\mathcal{A}_n^3} |\nabla\chi_{\epsilon_n}|u_{j,\epsilon_n}^2 \varphi \\ \leq &C\sigma_n^{-\frac{N-2}{2}}.\end{aligned} \tag{4.88}$$

通过直接计算, 则由命题 1 的结论 (ii) 可得

$$\begin{aligned}
&NF_\epsilon(\xi)-\frac{N-2S}{2}\xi f_\epsilon(\xi)\\
=&\frac{N}{2_s^*}|\xi|^q|m_\epsilon(\xi)|^{2_s^*-q}+\frac{N\mu}{q}|\xi|^q-\frac{N-2s}{2}\cdot\frac{q}{2_s^*}|\xi|^q|m_\epsilon(\xi)|^{2_s^*-q}\\
&-\frac{N-2s}{2}\cdot\frac{2_s^*-q}{2_s^*}|\xi|^q|m_\epsilon(\xi)|^{2_s^*-q-2}m_\epsilon(\xi)b_\epsilon(\xi)\xi-\frac{N-2s}{2}\mu|\xi|^q\\
\geq&C|\xi|^q.
\end{aligned}\tag{4.89}$$

结合 (4.86) − (4.89)，我们可得

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\mathcal{A}_n^3}(NF_{\epsilon_n}(u_{j,\epsilon_n})-\frac{N-2S}{2}u_{j,\epsilon_n}f_{\epsilon_n}(u_{j,\epsilon_n}))\varphi-\int\limits_{\mathcal{A}_n^3}(V(\epsilon_nx)+\lambda_n\chi_{\epsilon_n})u_{j,\epsilon_n}^2\varphi\\
&\quad-\frac{\epsilon_n}{2}\int\limits_{\mathcal{A}_n^3}((x-x_n)\cdot\nabla V(\epsilon_nx))u_{j,\epsilon_n}^2\varphi-\frac{\lambda_n}{2}\int\limits_{\mathcal{A}_n^3}((x-x_n)\cdot\nabla\chi_{\epsilon_n})u_{j,\epsilon_n}^2\varphi\\
\geq&\ C\int\limits_{\mathcal{A}_n^3}|u_{j,\epsilon_n}|^q\varphi dx-C\sigma_n^{-\frac{N-2}{2}}.
\end{aligned}\tag{4.90}$$

记 $B_{L\sigma_n^{-1}}(x_n)=\{x\mid|x-x_n|\leq L\sigma_n^{-1}\}$ 且 $G_n=B_{L\sigma_n^{-1}}(x_n)\backslash B_{r\sigma_n^{-1}}(x_n)$，这里的 L 是充分大的正常数且满足

$$\int\limits_{B_L(0)\backslash B_r(0)}|U_{j,i_\infty}|^{2_s^*}dx\geq\frac{C_*}{2},\tag{4.91}$$

这里的 C_* 来自引理 5 的结论 (3) .对于充分大的 n，我们有

$$G_n\subset B_{(\overline{C}+2)\sigma_n^{-\frac{1}{2}}}(x_n)\backslash B_{r\sigma_n^{-\frac{1}{2}}}(x_n)\subset B_n\backslash B_{r\sigma_n^{-\frac{1}{2}}}(x_n)$$

并且对于任意的 $x\in G_n$， $\varphi(x)=1$.因为在 $\mathcal{D}^{s,2}$ 中， $\tilde{u}_n=\sigma_n^{-\frac{N-2}{2}}u_{j,\epsilon_n}(\sigma_n^{-1}\cdot+x_n)\rightharpoonup U_{j,i_\infty}$，因此，对于充分大的 n，我们有

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathcal{A}_n^3}|u_{j,\epsilon_n}|^q\varphi dx\geq\int\limits_{G_n}|u_{j,\epsilon_n}|^qdx&=\sigma_n^{\frac{N-2}{2}q-N}\int\limits_{B_L(0)\backslash B_r(0)}|\sigma_n^{-\frac{N-2}{2}}u_{j,\epsilon_n}(\sigma_n^{-1}x+x_n)|^qdx\\
&\sim\sigma_n^{\frac{N-2}{2}q-N}\int\limits_{B_L(0)\backslash B_r(0)}|U_{j,i_\infty}|^qdx\geq\frac{C_*}{4}\sigma_n^{\frac{N-2}{2}q-N}.
\end{aligned}\tag{4.92}$$

由 (4.84), (4.85) 和引理 10 可得

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\mathcal{A}_n^3}(NF_{\epsilon_n}(u_{j,\epsilon_n})-\frac{N-2S}{2}u_{j,\epsilon_n}f_{\epsilon_n}(u_{j,\epsilon_n}))\varphi-\int\limits_{\mathcal{A}_n^3}(V(\epsilon_nx)+\lambda_n\chi_{\epsilon_n})u_{j,\epsilon_n}^2\varphi\\
&\quad-\frac{\epsilon_n}{2}\int\limits_{\mathcal{A}_n^3}((x-x_n)\cdot\nabla V(\epsilon_nx))u_{j,\epsilon_n}^2\varphi-\frac{\lambda_n}{2}\int\limits_{\mathcal{A}_n^3}((x-x_n)\cdot\nabla\chi_{\epsilon_n})u_{j,\epsilon_n}^2\varphi\\
\leq&C\sigma_n^{-\frac{N-2}{2}}.
\end{aligned}\tag{4.93}$$

结合 (4.93), (4.90) 和 (4.92)，我们可得

$$\sigma_n^{\frac{N-2}{2}q-N} \le C\sigma_n^{-\frac{N-2}{2}}. \tag{4.94}$$

如果 $q > \frac{N+2}{N-2}$，则

$$\frac{N-2}{2}q - N > -\frac{N-2}{2},$$

这和 (4.94) 产生矛盾.

命题 2 的证明. 假设当 $n \to \infty$ 时, 有 $\epsilon_n \to 0$. 则由命题 3 和 (4.2) 可得对于任意的 $\eta > 0$，存在与 n 无关的正常数 δ 使得对任意的 $1 \le j \le \kappa$，有

$$\sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B_\delta(y)} |u_{j,\epsilon_n}|^{2_s^*} dx < \eta. \tag{4.95}$$

因为 $W = |u_{j,\epsilon_n}|$ 满足

$$(-\Delta)^s W \le W^{2_s^*-1} + \mu W^{q-1} \text{ 在}\mathbb{R}^N\text{中},$$

由 (4.95)，引理 4 和椭圆方程的标准正则性可推得, 存在常数 $M_k > 0$ 使得

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^N} |u_{j,\epsilon_n}(x)| < M_k.$$

5. 定理 1 的证明

由命题 2 可得, 存在 $\epsilon_k^{'''} > 0$ 使得对任意的 $0 < \epsilon < \epsilon_k^{'''}$，有

$$m_\epsilon(u_{j,\epsilon}) = u_{j,\epsilon}. \tag{5.1}$$

由 $\Lambda_\infty = \emptyset$ 和 (5.1) 以及剖面分解 (4.2) 可得存在 $\epsilon_k^{''} > 0$ 使得对于任意的 $0 < \epsilon < \epsilon_k^{''}$，有

$$Q_\epsilon(u_{j,\epsilon}) = 0. \tag{5.2}$$

则由 (5.1), (5.2) 和引理 3 可得到定理 1 的证明.

参考文献

[1] Rabinowitz, P. (1986) Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island. https://doi.org/10.1090/cbms/065

[2] Chen, S. and Wang, Z.Q. (2017) Localized Nodal Solutions of Higher Topological Type for Semiclassical Nonlinear Schrödinger Equations. *Calculus of Variations and Partial Differential*

Equations, **56**, Article No. 1. https://doi.org/10.1007/s00526-016-1094-4

[3] Tintarev, C. (2013) Concentration Analysis and Cocompactness. In: Adimurthi, Sandeep, K., Schindler, I. and Tintarev, C., Eds., *Concentration Analysis and Applications to PDE. Trends in Mathematics*, Birkhäuser, Basel, 117-141. https://doi.org/10.1007/978-3-0348-0373-1_7

[4] Zhao, J., Liu, X.Q. and Liu, J. (2017) p-Laplacian Equations in $\mathbb{R}^N$ with Finite Potential via Truncation Method the Critical Case. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **455**, 58-88.

[5] Esteban, M.J. and Lions, P.L. (1982) Existence and Non-Existence Results for Semilinear Elliptic Problems in Unbounded Domains. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A. Mathematics*, **93**, 1-14. https://doi.org/10.1017/S0308210500031607

[6] Vassilev, D. (2011) L^p Estimates and Asymptotic Behavior for Finite Energy Solutions of Extremals to Hardy-Sobolev Inequalities. *Transactions of the American Mathematical Society*, **363**, 37-62.
https://doi.org/10.1090/S0002-9947-2010-04850-0

[7] Han, Q. and Lin, F. (2011) Elliptic Partial Differential Equations. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island.