

# 多级水站间的自来水管道路铺设问题

陈 泽, 涂 宇, 朱文韬

西北工业大学, 陕西 西安

Email: 664880547@qq.com

收稿日期: 2021年4月25日; 录用日期: 2021年5月8日; 发布日期: 2021年5月28日

## 摘 要

在村村通自来水工程实施过程中, 某区需建1个中心供水站、12个一级供水站、168个二级供水站。中心供水站A与一级供水站及一级供水站之间使用I型管道连接, 一级供水站与二级供水站及二级供水站间用II型管道连接。本文主要针对各级供水站间的管道铺设问题, 从保证供水质量及设备维护方便角度出发, 以最小化规定型号管道长度为目标, 综合分析了供水质量及维修便利程度、水站分布、多级水站相互关系等方面因素, 运用LINGO和C++等编程语言进行求解, 最后制定出不同条件要求情况下的各级供水管道最优优化模型, 并进行了适当的科学性分析。

## 关键词

最优规划, LINGO, 最短路径规划

# The Problem of Water Pipeline Laying in Multi-Stage Water Stations

Ze Chen, Yu Tu, Wentao Zhu

Northwest University of Technology, Xi'an Shaanxi

Email: 664880547@qq.com

Received: Apr. 25<sup>th</sup>, 2021; accepted: May 8<sup>th</sup>, 2021; published: May 28<sup>th</sup>, 2021

## Abstract

In the process of implementing the water supply project to every village, one central water supply station, 12 first-level water supply stations and 168 second-level water supply stations are needed to be built in one district. Center water stop water stop A and level and the level of water stop use between the I type pipe connection, between primary water stop and secondary water stop and secondary water stop using II type pipe connection. This paper is aimed at all levels of the plumb-

ing problem between water stop, from easy to ensure the quality of water supply and equipment maintenance perspective, to minimize regulation model pipe length as the goal, comprehensive analysis of the quality of water supply and maintenance convenience, water station distribution, the relationship between multistage water stations, using LINGO to solve and C++ programming language, finally worked out a different cases of the requirements of all levels of the water supply pipeline optimization model, and make the properly scientific analysis.

## Keywords

Optimal Programming, LINGO, Shortest Path Planning

Copyright © 2021 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 问题重述

### 1.1. 问题背景

在村村通自来水工程实施下, 拟建立 1 个中心供水站, 12 个一级供水站, 168 个二级供水站。考虑供水质量与设备维护等角度, 需要建立合适的数学模型, 求出最优路径。

### 1.2. 题目重述与理解

某地区需要建设一个中心供水站, 12 个一级供水站和 168 个二级供水站。由于供水站间管道铺设技术问题限制, 中心供水站只能和一级供水站连接(铺设 I 型管道), 不能和二级供水站直接相连。一级供水站之间可以连接(铺设 I 型管道), 且与二级供水站相连(铺设 II 型管道)。二级供水站之间可以连接(铺设 II 型管道)。管道铺设均从节点出发, 至节点终止, 管道长度看作节点间直线距离。

根据上述条件, 我们需要研究以下问题:

1. 对于给出的中心、一级、二级水站坐标、管道连接方式等信息, 问自来水管道路应该如何铺设才能使管道的总里程最少? 要求以图形给出铺设方案, 并给出 I 型管道和 II 型管道总里程数。

2. 由于二型管道供应不足, 考虑升级 2 个二级水站为一级水站解决此问题, 问选择哪两个二级水站才能使二型管道总里程数最少? 与问题一相比, 二型管道总里程减少多少?

3. 在问题一基础上, 由于受功率影响, 从一级供水站出发铺设的管道只能供水 40 公里, 为解决此问题, 考虑升级二级供水站, 问最少升级多少个二级供水站, 可保证正常运行? 铺设管道总里程为多少?

## 2. 问题分析

该问题属于优化问题, 主要的任务是: 在已知的水站位置、管道连接方式等限制条件下, 建立不同的距离优化模型, 从而科学合理地安排出多级水站之间的连接方式。问题属于最小树问题, 即对于确定水站信息给出路程最短的水站连接方式。

### 2.1. 问题一的分析

问题一的要求是在保证供水质量以及设备维护方便的前提下, 建立以水站连接管道距离最小为目标的最优化模型, 进而求出此情况下的管道连接方式。通过分析问题, 我们考虑并解决了题目中水站位置

及管道连接方式限制下的距离最短化问题。出于对供水质量及保障维修便利度因素的考虑，我们采用区域中心供水制，将更多的二级供水站划分到距离最近的一级水站区域，将 168 个二级水站按区域归属于 12 个一级水站区域。在本题中，我们先运用图论最优树模型，将一级供水系统简化为含权值的树状图形。根据给出的坐标信息，我们求得第一级系统中任意两点之间的最短距离，给出距离矩阵。然后应用同样的方法，对 12 个区域分别进行距离矩阵计算。最后，我们对水站添加节点约束条件，引入决策变量，形成最优规划模型目标函数，采用 Lingo 求解得出最短水管道的距离和连接方式。

## 2.2. 问题二的分析

问题二的要求是在所有二级供水站中选择两个二级供水站升级成为一级供水站，在新一级水站分布情况下建立二级管道铺设距离最短的最优化模型，以达到减少二型管道铺设长度的目的。出于最大限度保障供水质量以及提高维修便利度的要求，我们引入边缘供水站概念，即管道连接中距离线路内一级供水站最远的二级供水站集合。然后通过分析二级供水站升级后对原供水网络带来的影响得出此时必然存在部分二级水站的多源输入情况。我们通过对于新一级水站分布情况下二级水站做出限制，通过分别计算各区域边缘点对 II 级水管减少带来的影响进行排序比较，得出此最优化模型下二级水站升级的最优选取方案。

## 2.3. 问题三的分析

问题三的要求是对不满足一级供水站连接支路不超过 40 公里条件的区域，将二级供水站升级为一级供水站，升级水站数目要求尽量少，同时此配置下总里程数最小。在问题一的基础上，我们首先筛选出不符合条件的区域为 V4 和 V7 区域，对此区域选择升级二级水站，考虑到管道里程铺设，我们对 A、V4、V7 三点使用距离最小值模型，求出最适合升级的二级供水站。二级水站升级为一级水站后我们对涉及到的所有二级水站使用距离矩阵进行区域的重新划分。由问题一的图论最优树模型，求得最后新的管道铺设线路。

## 3. 模型假设

- (1) 同级供水站间功能没有明显差别，可看作完全一样。
- (2) 为保障供水质量及维修便利度，我们认为距离更高级供水站越近的低级水站具有很好的供水质量且更容易维修。
- (3) 同级管道实现的运输功能没有明显差异，可看作一样。
- (4) 管道本身不存在损坏等问题。
- (5) 中心供水站供水能力足够强且水资源储备充足。
- (6) 划分区域之间无干扰，划分区域时以到区域中心直线距离长短来暂代路径进行划分。
- (7) 供水站升级时只有供水能力相关性质发生改变。

## 4. 符号说明

符号	含义
$Z$	I 型管道总里程
$L_i$	第 $i$ 个一级水站连接的 II 型管道总里程
$d_{ij}$	水站 $i$ 与水站 $j$ 的最短直线距离
$D$	$d_{ij}$ 组成的距离矩阵
$H$	由一级水站出发到连线上最后一个二级水站的总连线长度

Continued

$B_i$	第 $i$ 区域的边缘点
$B_{ij}$	$i, j$ 区域边缘点的距离
$T$	II 型管道减少长度

## 5. 模型建立与求解

### 5.1. 问题一的模型与求解

由于中心供水站只能与一级供水站连接,我们将中心供水站与一级供水站整体看作第一级供水系统,系统内使用 I 型管道进行连接。一级供水站与二级水站整体看作第二级供水系统。

我们将题目所给地图简化为赋权图  $G$ , 设  $T$  是赋权图  $G$  的一棵生成树, 称  $T$  中全部边上的权数之和为生成树的权, 记为  $w(T)$ , 即  $w(T) = \sum w(e)$ 。如果生成树  $T^*$  的权  $w(T^*)$  是  $G$  的所有生成树的权最小者, 则称  $T^*$  是  $G$  的最优树, 即  $w(T^*) = \sum \min \{w(T)\}$ 。

基于已知的中心水站及一级水站位置坐标信息, 我们计算求得包括中心水站在内的 13 个点间的距离矩阵。

接下来, 我们对于水站节点给出限制条件, 形成最优规划模型求解一级供水系统的最短管道连接方式。

设无向图共有  $n$  个节点, 其赋权图的邻接矩阵为  $d_{n \times n}$ 。  $d_{ij}$  表示节点  $i$  到  $j$  的距离。  $D$  为对称矩阵。令  $D_{ii} = 0$ 。

现求根节点 1 到各节点生成的最优树, 要求各线路上的权值和最小[1]。

引入决策变量:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{节点 } i \text{ 与 } j \text{ 连通} \\ 0 & \text{节点 } i \text{ 与 } j \text{ 不连通} \end{cases}$$

我们的目标函数为:

$$\min Z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij} x_{ij}$$

约束条件:

- 1) 对起始点 1 至少有一条路出去, 故有:  $\sum_{j=2}^n x_{1j} \geq 1$
- 2) 对其余各节点, 恰有一条路进入, 有:  $\sum_{k \neq i}^n x_{ki} = 1, i = 2, \dots, n$
- 3) 所有节点间连线不出现圈, 引入变量  $u$ , 有:

$$u_i - u_j - nx_{ij} \leq n-1, \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

总体规划模型为:

$$\min Z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij} x_{ij}$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \sum_{j=2}^n x_{1j} \geq 1 \\ \sum_{k \neq i}^n x_{ki} = 1, \quad i = 2, \dots, n \\ u_i - u_j - nx_{ij} \leq n-1, \quad i, j = 1, 2, \dots, n \\ x_{ij} = 0 \text{ 或 } 1 \end{cases}$$

### 5.1.1. 一级供水系统的最短管道连接模型

对于一级供水系统(由中心供水站与 12 个一级供水站组成),  $n=13$ , 选取中心供水站为 1 号水站。总体规划模型为:

$$\min Z = \sum_{i=1}^{13} \sum_{j=1}^{13} d_{ij} x_{ij}$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \sum_{j=2}^{13} x_{ij} \geq 1 \\ \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{13} x_{ki} = 1, \quad i = 2, \dots, 13 \\ u_i - u_j - n x_{ij} \leq 13, \quad i, j = 1, 2, \dots, 13 \\ x_{ij} = 0 \text{ 或 } 1 \end{cases}$$

得到距离矩阵  $D_1$ , 以图 1 方式给出。

	A	V1	V2	V3	V4	V5	V6	V7	V8	V9	V10	V11	V12
A	0	21.095	28.4253	17.4642	13.3417	12.0416	21.8403	16.0312	13.9284	14.2127	11.6619	15	20.2485
V1	21.095	0	24.1868	10.2956	8.06226	15.6205	27.4591	24.4131	30.0167	31.3209	32.0156	36.0555	40.3113
V2	28.4253	24.1868	0	15.1327	25.4951	16.6433	12.0416	41.6293	24.6982	42.638	32.249	39.6611	47.0106
V3	17.4642	10.2956	15.1327	0	10.4403	7.07107	17.2047	27.4591	21.8403	30.8058	26.0192	31.7805	37.6962
V4	13.3417	8.06226	25.4951	10.4403	0	11.7047	15	17.6918	24.0832	23.4094	24.6982	28.1603	32.249
V5	12.0416	15.6205	16.6433	7.07107	11.7047	0	13.3417	25.2982	14.8661	26.1725	19.105	25.2982	31.7648
V6	21.8403	27.4591	12.0416	17.2047	25	13.3417	0	37.3363	13.6015	35.3412	21.9317	29.6985	37.5366
V7	16.0312	24.4131	41.6293	27.4591	17.6918	25.2982	37.3363	0	29.6142	11.1803	24.5967	24.5967	21.9317
V8	13.9284	30.0167	24.6982	21.8403	24.0832	14.8661	13.6015	29.6142	0	24.3311	8.60233	16.4012	24.4131
V9	14.2127	31.3209	42.638	30.8058	23.4094	26.1725	35.3412	11.1803	24.3311	0	17.0294	12.53	10.7703
V10	11.6619	32.0156	32.249	26.0192	24.6982	19.105	21.9317	24.5967	8.60233	17.0294	0	7.81025	15.8114
V11	15	36.0555	39.6611	31.7805	28.1603	25.2982	29.6985	22.6274	16.4012	12.53	7.81025	0	8.06226
V12	20.2485	40.3113	47.0106	37.6962	32.249	31.7648	37.5366	21.9317	24.4131	10.7703	15.8114	8.06226	0

Figure 1. Distance matrix between water stations  
图 1. 水站间距离矩阵

### 5.1.2. 一级供水系统的最短管道连接问题求解

将上述中已得到的数据输入 LINGO 软件中, 可直接得出一级供水系统的连接方式, 如图 2 (0 对于 A 中心水站)。

A\区
0-5
0-10
1-4
3-1
5-3
5-6
6-2
9-7
10-8
10-11
11-12
12-9

Figure 2. Connection mode of primary water supply system  
图 2. 一级供水系统的连接方式

对应水站位置连接结果如图 3。图中，横坐标为水站位置相对原点水平投影，纵坐标为水站位置相对原点竖直方向投影。下文水站连接图同理。

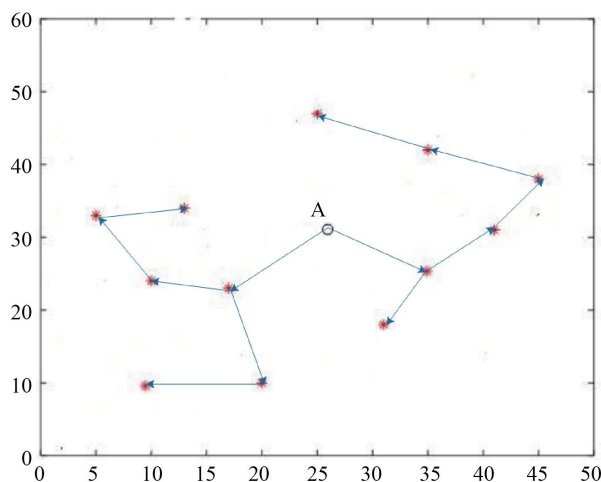


Figure 3. Location connection results of water stations  
图 3. 水站位置连接结果

此时一级管道连接最短距离为： $\min Z = \sum_{i=1}^{13} \sum_{j=1}^{13} d_{ij} x_{ij} = 120.9412 \text{ km}$ 。

### 5.1.3. 各区域内二级供水系统的最短管道连接模型

考虑到供水质量及保障维修便利度因素，我们采用区域中心供水制，从每个二级供水站出发寻找距离它最近的一级供水站，选择同一级供水站的二级水站组成一个集合，将 168 个二级水站按区域归属于 12 个一级水站区域。我们通过计算每一二级水站距离 12 个一级供水站的完整距离矩阵，得到分区情况。

对于每一个区域二级系统，我们进行赋权图简化，应用 5.1.1 中的最小树模型，将各二级区域内的一级供水站看作供水出发点，设为 1 号水站，得到总体规划模型为：

$$\min Z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij} x_{ij}$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \sum_{j=2}^n x_{ij} \geq 1 \\ \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n x_{ki} = 1, \quad i = 2, \dots, n \\ u_i - u_j - n x_{ij} \leq n - 1, \quad i, j = 1, 2, \dots, n \\ x_{ij} = 0 \text{ 或 } 1 \end{cases}$$

### 5.1.4. 二级供水系统的最短管道连接问题求解

根据我们得到的分区情况，区域对应规划模型中的  $n$  值如图 3。

将上述中已得到的数据输入 LINGO 软件中，可直接得出各区二级供水系统的连接方式，如图 4~图 6 (各区中区号点对应区域的一级供水站)。

V1区	V2区	V3区	V4区
1-94	2-26	3-92	4-61
1-95	2-115	3-93	4-78
80-81	2-116	3-111	10-18
81-97	26-24	3-112	30-62
84-85	114-113	86-89	30-64
85-91	115-114	88-133	61-66
91-96	116-106	89-88	62-99
95-80	116-118	90-86	66-30
95-84	118-87	92-90	66-68
97-82	118-117	107-110	67-29
97-83		112-107	68-67
			68-69
			78-79
			79-98
			99-10
			99-131
			131-132

**Figure 4.** Connection mode of water stations in zone V1~V4

**图 4.** V1~V4 区水站连接方式

V5区	V6区	V7区	V8区
5-125	6-23	7-41	8-122
5-126	6-28	7-73	8-123
11-16	25-27	31-59	8-136
15-11	27-22	32-34	122-121
16-17	27-108	32=57	122-149
17-9	28-25	40-53	123-104
100-124	28-103	41-44	123-105
100-127	102-109	42-71	136-148
125-100	102-120	42-76	142-150
125-119	103-102	44-42	145-129
126-101		44-65	148-145
127-128		44-72	149-142
128-130		53-52	150-151
130-15		53-54	
		54-51	
		57-36	
		59-60	
		63-31	
		65-63	
		70-43	
		71-70	
		72-32	
		73-40	
		73-74	
		74-75	

**Figure 5.** Connection mode of water stations in V5~V8 zones

**图 5.** V5~V8 区水站连接方式

得到最终整体二级供水系统连接方式如图 7。

此时二级管道连接最短距离为： $\min L = 484.38409 \text{ km}$ 。

综合上述一级、二级供水系统连接方式求解，我们得到最终所有水站连接方式如图 8。

V9区	V10区	V11区	V12区
9-37	10-135	11-139	12-13
9-47	10-153	11-162	12-14
9-56	12-8	2-1	12-163
5-21	134-137	3-4	14-46
6-7	134-156	19-20	46-38
7-5	135-134	20-2	46-165
33-35	137-154	20-5	138-164
35-6	141-147	139-161	164-166
35-58	146-12	143-155	165-167
37-48	153-140	159-19	167-138
39-168	153-152	160-159	
47-45	156-157	161-143	
48-49	157-158	161-160	
49-50	158-141	162-144	
50-39	158-146		
56-33			
56-55			

Figure 6. Connection mode of water stations in V9~V12 zones

图 6. V9~V12 区水站连接方式

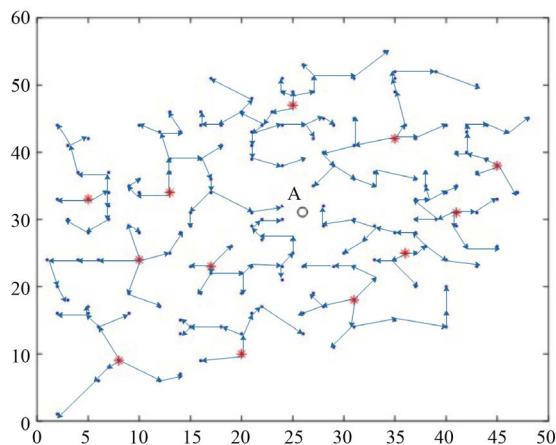


Figure 7. Connection mode of the overall secondary water supply system

图 7. 整体二级供水系统连接方式

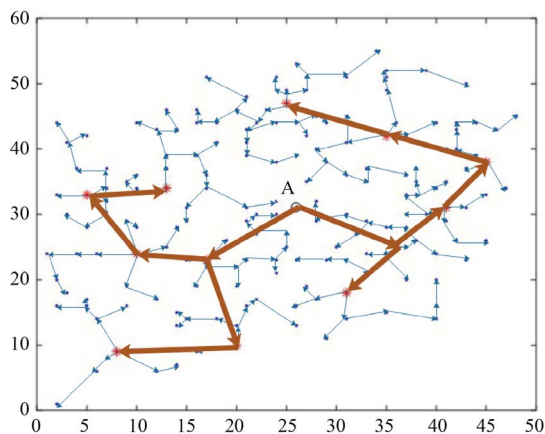


Figure 8. Connection mode of primary and secondary water supply systems

图 8. 一级、二级供水系统连接方式



## 5.2. 二级水站升级的选取模型与求解

### 5.2.1. 二级水站升级的选取模型

根据二级水站连接方式，我们可以将二级水站进行分类。基于二级供水站有无传递水源能力，我们将二级水站分为以下两类：

- { 只接受供水类型 (如下图9中B点)
- { 作为供水中转类型 (如下图9中A点)

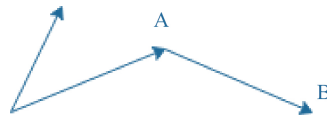


Figure 9. Classification diagram of secondary water stations

图 9. 二级水站分类示意图

通过决策变量  $\sum_{k \neq i}^n x_{ki} = 1, i = 2, \dots, n$  可以看出，任何类型的二级水站都只有一个输入路线[2]。

我们首先引入边缘点的概念：边缘点是在各二级供水系统中，到达一级供水站路线长度较长，处于各区二级供水系统边缘的二级水站。根据分析，我们可以知道边缘点具有如下特征：

- (1) 距离区域一级供水站距离较远，供水质量等条件较差。
- (2) 连接边缘点使用更多 II 型供水管道。

出于更大程度增强供水质量以及缩短 II 型供水管道的目的，我们认为应优先升级各区域的边缘点。

根据分析二级点升级后对于周围二级点的影响，我们发现，在一条线路中对二级点进行升级时，将必然出现  $\sum_{k \neq i}^n x_{ki} > 1, i = 2, \dots, n$  的情况，如图 10 示意。此时 B 升级为一级点，A 存在两条输入路线。

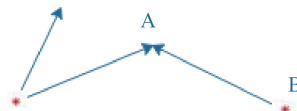


Figure 10. Schematic diagram of connection of secondary water station after upgrade

图 10. 二级水站升级后连接示意图

针对这种情况，为了满足  $\sum_{k \neq i}^n x_{ki} = 1, i = 2, \dots, n$  的决策变量限制，我们在已知线路中减去一条输入路线。

此时升级成一级供水站的二级供水站可以使全部二级供水站满足单条道路输入并且减短了二级水站的供水距离。根据 5.1 中所得到的各区域内部距离矩阵，我们挑选出成为通道的二级管道距离，并进行排序。找出各区域内最长的单条二级管道并设置该条通道上的边缘点为所在区域边缘点：B1~B12。如图 11 所示。

12 个区域内最长二级管道距离 J1~J12 如图 12。

当以  $i$  区边缘点作为升级点时，比较  $B_{ij} (i=1,2,\dots,12; j=1,\dots,12)$  与  $J_j (j \neq i)$  的大小关系，当  $B_{ij} (i=1,2,\dots,12; j=1,\dots,12) > J_j (j \neq i)$  时，不连通两个边缘点。当  $B_{ij} (i=1,2,\dots,12; j=1,\dots,12) \leq J_j (j \neq i)$

时, 连通两个边缘点, 此时 II 型管道长增加  $B_{ij}$ , 减小  $J_j$ 。

区号	X	Y	编号
1	2	44	P83
2	2	1	P113
3	3	18	P88
4	24	32	P18
5	24	30	P9
6	26	13	P120
7	17	51	P77
8	40	20	P151
9	27	35	P58
10	37	20	P152
11	45	26	P155
12	47	34	P163

Figure 11. Area edge points B1~B12

图 11. 区域边缘点 B1~B12

区号	距离	两端序号
1	4.12	P97 P81
2	6.4	P113 P114
3	4	V3 P92
4	5	P99 P10
5	3	P125 P100
6	5.66	P102 P120
7	5	P77 P76
8	5.1	P149 P142
9	13.04	P9 P56
10	27.46	P152 P153
11	3	P155 P143
12	4.47	P163 V12

Figure 12. Distance of the longest secondary pipeline in 12 areas J1~J12

图 12. 12 个区域内最长二级管道距离 J1~J12

12 个区域边缘点间距离矩阵如图 13。

引入决策变量  $Y_{ij}$  :

$$Y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{节点 } B_i \text{ 与 } B_j \text{ 连通} \\ 0 & \text{节点 } B_i \text{ 与 } B_j \text{ 不连通} \end{cases}$$

目标函数为:

$$\min T = \sum_{i=1}^{12} \sum_{j=1}^{12} (B_{ij} - J_j) Y_{ij}$$

$$\text{s.t. } \begin{cases} B_{ij} > J_j, Y_{ij} = 0 \\ B_{ij} \leq J_j, Y_{ij} = 1 \\ Y_{ij} = 0 \text{ 或 } 1 \end{cases}$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	0.0000	43.0000	26.0192	25.0599	26.0768	39.2046	16.5529	44.9444	26.5707	42.4382	46.6154	46.0977
2	43.0000	0.0000	17.0294	38.0132	36.4005	26.8328	52.2015	42.4853	42.2019	39.8246	49.7393	55.8032
3	26.0192	17.0294	0.0000	25.2389	24.1868	23.5372	35.8469	37.0540	29.4109	34.0588	42.7551	46.8188
4	25.0599	38.0132	25.2389	0.0000	2.0000	19.1050	20.2485	20.0000	4.2426	17.6918	21.8403	23.0868
5	26.0768	36.4005	24.1868	2.0000	0.0000	17.1172	22.1359	18.8680	5.8310	16.4012	21.3776	23.3452
6	39.2046	26.8328	23.5372	19.1050	17.1172	0.0000	39.0512	15.6525	22.0227	13.0384	23.0217	29.6985
7	16.5529	52.2015	35.8469	20.2485	22.1359	39.0512	0.0000	38.6005	18.8680	36.8917	37.5366	34.4819
8	44.9444	42.4853	37.0540	20.0000	18.8680	15.6525	38.6005	0.0000	19.8494	3.0000	7.8102	15.6525
9	26.5707	42.2019	29.4109	4.2426	5.8310	22.0227	18.8680	19.8494	0.0000	18.0278	20.1246	20.0250
10	42.4382	39.8246	34.0588	17.6918	16.4012	13.0384	36.8917	3.0000	18.0278	0.0000	10.0000	17.2047
11	46.6154	49.7393	42.7551	21.8403	21.3776	23.0217	37.5366	7.8102	20.1246	10.0000	0.0000	8.2462
12	46.0977	55.8032	46.8188	23.0868	23.3452	29.6985	34.4819	15.6525	20.0250	17.2047	8.2462	0.0000

Figure 13. Distance matrix between edge points of 12 regions

图 13. 12 个区域边缘点间距离矩阵

### 5.2.2. 二级水站升级的选取模型求解

将上述中已得到的  $B_{ij}$  距离矩阵逐个输入与  $J_j$  进行比较, 可得出分别取 12 区域时  $T$  值, 经过排序后得到最小  $T$  值为 T5 和 T8, 即选取 P9 (24, 30) 及 P151 (40, 20) 点升级为一级供水站, 和的值分别为 -21.2678 和 -24.46。B5 连接 B4, B9, B10, B8 连接 B10。升级二级水站取点情况如图 14 所示。图中黄色点为新升级的一级供水站。

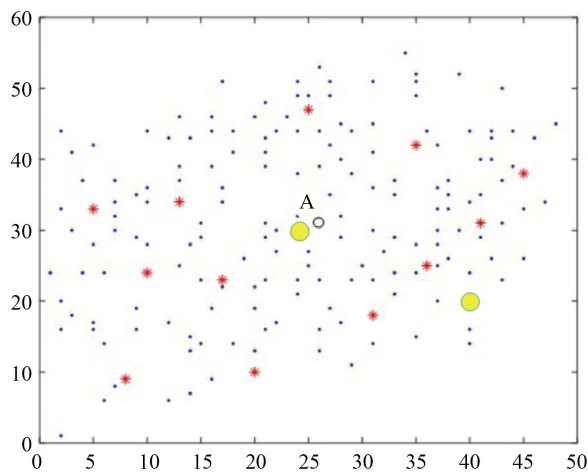


Figure 14. Schematic diagram of newly upgraded first-level water supply station

图 14. 新升级的一级供水站示意图

此时 II 型管道减少长度最多, 相对于问题一减少 45.7278 km (T5 + T8)。II 级管道总里程为 438.65629 km。

该情况下二级管道连接方式如图 15。

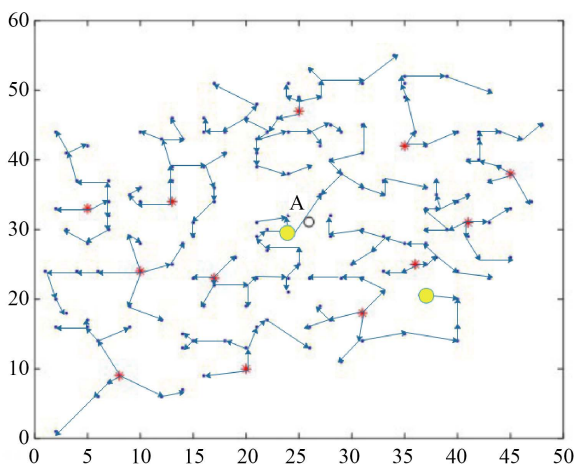


Figure 15. Connection mode of secondary pipeline  
图 15. 二级管道连接方式

### 5.3. 考虑功率因素的二级水站升级模型与求解

#### 5.3.1. 考虑功率因素的二级水站升级选取模型

在问题一的基础上，我们筛选出不符合题目要求的区域为 V4、V7 区，考虑将在这两个区域范围内的二级水站中的一个进行升级。新升级一个二级水站为一级水站会增加一级管道铺设里程，本着尽量少使用一级管道的原则，我们将改变中心水站与一级水站原本的连接路线。为使连接线路最短。我们将 A、4、7 三点连接成三角形，寻求三角形内一点到三角形三个顶点距离之和最小点，将此点设为 Q。最靠近此点的二级水站被优化。这种情况下我们不考虑新升级水站对于其他区域的影响。

##### (1) 寻找点 Q

在 A、V4、V7 构成的三角形(如图 16)中选取距离三个顶点距离之和最小的点。

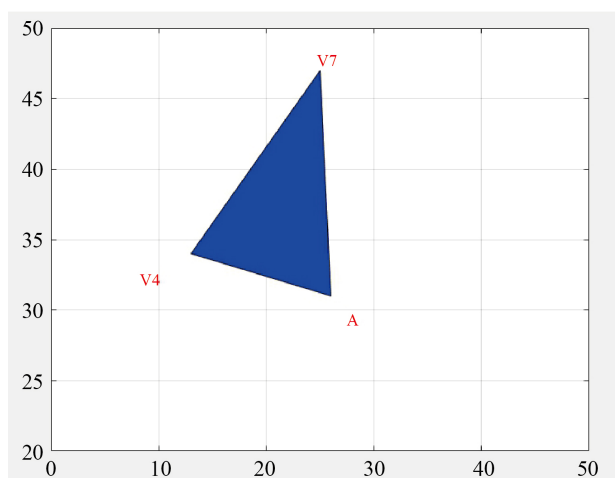


Figure 16. Triangles formed by A, V4 and V7  
图 16. A、V4、V7 构成的三角形

对于 Q 点的寻找我们建立距离最小模型，设 Q 点坐标为  $(x, y)$ 。

目标函数为：

$$Z = \sqrt{(x-26)^2 + (y-31)^2} + \sqrt{(x-13)^2 + (y-34)^2} + \sqrt{(x-25)^2 + (y-47)^2}$$

令  $\frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial Z}{\partial y} = 0$ ，求出  $x, y$  的值即为 Q 点坐标。

(2) 寻找被升级的二级水站

在 Q 点附近搜寻与 Q 点距离最小的二级水站，将此二级水站升级为一级水站。

(3) 给出新规划区域的最优连接方式

随后我们沿用解决问题一的模型，将新升级为一级水站命名为 V13。对原 V4 区 V7 区包含的二级供水站重新划分区域，现区域为新 V4、V7、V13 区。得到每个区域内的距离矩阵，利用图论最优树模型得到新的水站铺设路线。将新规划的 4、7、13 区域中的一级点设置为 1 号水站。如 5.1 给出总体规划模型 [3] 为：

$$\begin{aligned} \min L &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij} x_{ij} \\ \text{s.t.} &\begin{cases} \sum_{j=2}^n x_{ij} \geq 1 \\ \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n x_{ki} = 1, \quad i = 2, \dots, n \\ u_i - u_j - n x_{ij} \leq n - 1, \quad i, j = 1, 2, \dots, n \\ x_{ij} = 0 \text{ 或 } 1 \end{cases} \end{aligned}$$

同时对中心供水站与一级供水站利用图论最优树模型得到新 A 区的铺设路线图。

$$\begin{aligned} \min Z &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij} x_{ij} \\ \text{s.t.} &\begin{cases} \sum_{j=2}^n x_{ij} \geq 1 \\ \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n x_{ki} = 1, \quad i = 2, \dots, n \\ u_i - u_j - n x_{ij} \leq n - 1, \quad i, j = 1, 2, \dots, n \\ x_{ij} = 0 \text{ 或 } 1 \end{cases} \end{aligned}$$

### 5.3.2. 升级后区域划分及铺设路线求解

(1) Q 点坐标求解

通过模型建立中的最小距离模型，我们得到被升级的二级水站为 P59 (24, 38)。取点情况如图 17 (图中黄色点为升级点)。

(2) 新 V4、V7、V13 区铺设线路图

根据我们得到的分区情况，区域对应规划模型中的  $n$  值如图 18。

将上述中已得到的数据输入 LINGO 软件中，可直接得出各区二级供水系统的连接方式，如图 19 (各区中区号点对应区域的一级供水站)。

由 LINGO 求得  $L_4 = 36.11771 \text{ km}$ ， $L_7 = 50.66563 \text{ km}$ ， $L_{13} = 22.72291 \text{ km}$ 。结合 5.1 已知结果，可得： $\min L = \sum_i^{12} L_{i\min} = 484.48187 \text{ km}$ 。

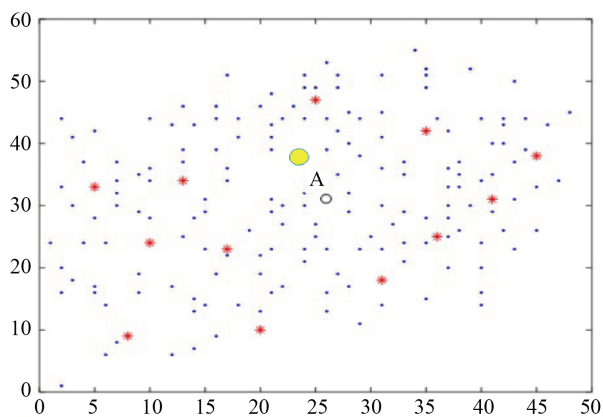


Figure 17. Upgraded secondary water stations are shown in yellow dots

图 17. 被升级的二级水站如图黄色点

区号	n
V4	15
V7	22
V13	8

Figure 18. The region corresponds to the n value in the planning model

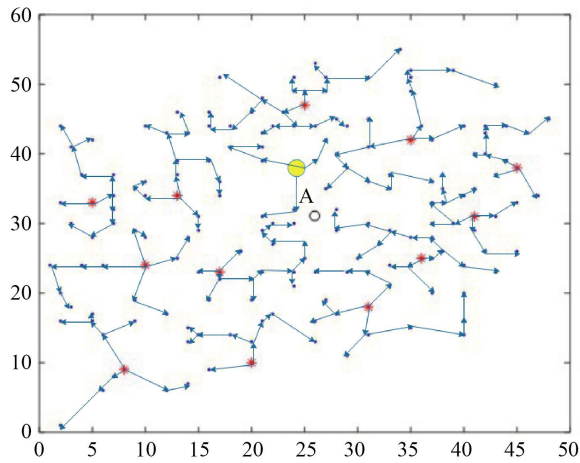
图 18. 区域对应规划模型中的 n 值

V4	V7	V13
4 61	7 41	13 18
4 78	7 73	13 31
4 131	32 57	13 60
30 62	40 53	18 10
61 66	41 72	31 64
62 99	41 76	60 34
66 30	42 71	63 64
66 68	44 65	
67 29	53 52	
67 68	53 54	
68 69	54 51	
78 79	57 36	
79 98	70 43	
131 132	71 70	
	72 32	
	72 44	
	73 40	
	73 74	
	74 75	
	76 42	
	76 77	

Figure 19. Connection mode of secondary water supply system in each district

图 19. 各区二级供水系统的连接方式

图形连接方式如图 20。



**Figure 20.** Connection modes of all graphs  
**图 20.** 全部图形连接方式

(3) 新一级供水系统铺设线路图

对于一级供水系统， $n = 14$ 。将上述中已得到的数据输入 LINGO 软件中，可直接得出新一级供水系统的连接方式，如图 21 (1 点对应中心供水站)。

A
1 14
2 4
4 6
5 2
6 7
7 3
8 10
10 13
11 9
12 11
13 12
14 5
14 8

**Figure 21.** Connection pattern of the new primary water supply system  
**图 21.** 新一级供水系统的连接方式

图形连接方式如图 22。

整体管道连接方式如图 23 所示。

在这种情况下，只选取一个二级供水站进行升级。此时，每个一级供水站的分支路线长均小于 40 km，所以可以确实，只需升级一个节点即可满足题目要求。这种情况下总距离长为： $L_{\min} + Z_{\min} = 609.75977 \text{ km}$ 。

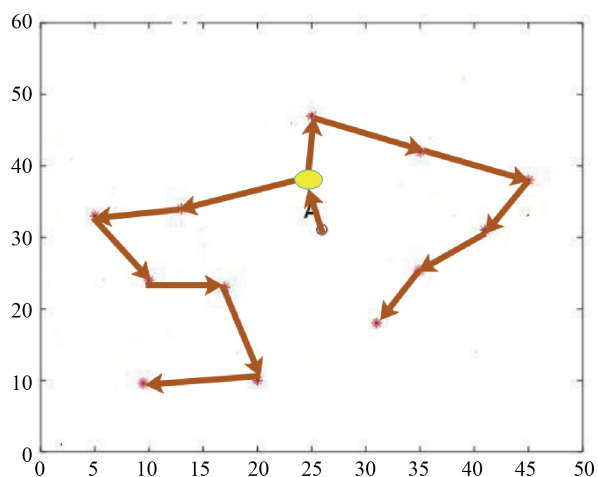


Figure 22. Connection modes of all graphs

图 22. 全部图形连接方式

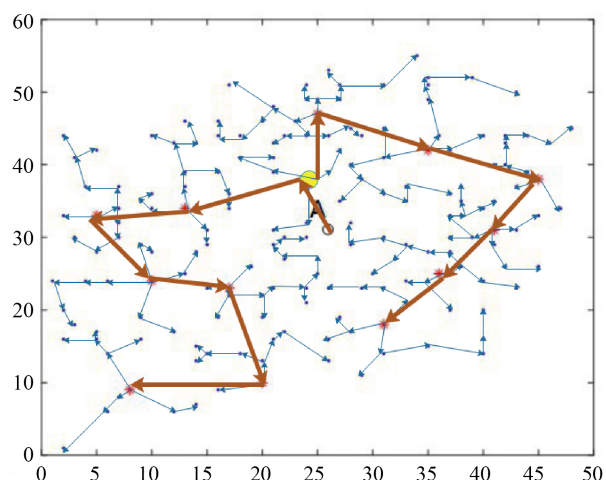


Figure 23. Overall pipeline connection mode

图 23. 整体管道连接方式

## 6. 模型评价与推广

### 6.1. 优缺点分析

#### 6.1.1. 优点

1. 我们的模型在最优规划的基础上，进一步灵活运用线性规划、非线性规划、整数规划、图论最小数等具体模型；

2. 对问题的求解直观简单，计算效率高，程序较易实现；

3. 对问题进行了多方面考虑，按题目对于 I、II 级管道的限制要求，并综合、多方面考虑了水站的供水质量及维修便利程度等等因素并使用分区供水方式保障供水；

4. 使用的最优规划方法不仅限于题目条件，更将所运用方法向普遍情况发展，具有普遍适用性。此模型不仅可以在本问题中使用，我们还可以将其推广到其他实际问题使用。如通信网络搭建、城市乡村交通规划、都可以通过此模型得到解决。



### 6.1.2. 缺点

1. 采用的分区域的方法将 168 个二级供水站分配到 12 个区域。分区的进行可能一定程度上会影响最小生成树的建立；
2. 模型考虑部分实际影响因素，但与实际情况可能仍存在差异；
3. 在解决一级供水站功率问题时，忽略新一级供水站对功率充足的区域的影响。

### 6.2. 模型改进方向及拓展

1. 可将整个供水区域作为范围进行水管路线探索，使提升供水质量与维修便利度的方法更完善；
2. 新建立一级供水站时可更多考虑对整体供水系统管道缩短的影响。

### 参考文献

- [1] 肖华勇. 实用数学建模与软件应用[M]. 西安: 西北工业大学出版社, 2014.
- [2] 西北工业大学数学建模指导委员会. 数学建模简明教程[M]. 北京: 高等教育出版社, 2008.
- [3] 肖华勇. 基于 Matlab 和 LINGO 的数学实验[M]. 西安: 西北工业大学出版社, 2009.