

一种改进的MQ拟插值方法及其性质

熊 晗^{1,2}, 曾 光^{1,2*}, 雷 莉^{1*}, 王斌斌^{1,2}

¹东华理工大学理学院, 江西 南昌

²科学与工程计算实验室, 东华理工大学理学院, 江西 南昌

Email: x123456hxx@163.com, *zengguang5340@sina.com, *betterleili@163.com

收稿日期: 2021年5月10日; 录用日期: 2021年5月29日; 发布日期: 2021年6月16日

摘 要

本文基于Wu-Schaback拟插值算子 $L_n f(x)$ 构造了一种新的MQ径向拟插值算子, 该算子增加了在两端点处的一阶导数的线性组合项, 并结合三点微分公式替代其两端点处的导数值, 提高了该算子的收敛阶。通过理论分析得出该算子的线性多项式具有再生性、二阶保形性和较高的收敛阶等优点。最后, 通过数值实验比较了该拟插值格式与Wu-Schaback和Feng-Li的拟插值格式的近似能力, 数值计算结果证实了理论分析的正确性, 验证了该算子对数值求解中的有效性。

关键词

数值逼近, 径向基函数, 拟插值, 保形性, 收敛阶

A New Quasi Interpolation Scheme for MQ Radial Basis Function

Han Xiong^{1,2}, Guang Zeng^{1,2*}, Li Lei^{1*}, Binbin Wang^{1,2}

¹College of Science, East China University of Technology, Nanchang Jiangxi

²Laboratory of Science and Engineering Computing, College of Science, East China University of Technology, Nanchang Jiangxi

Email: x123456hxx@163.com, *zengguang5340@sina.com, *betterleili@163.com

Received: May 10th, 2021; accepted: May 29th, 2021; published: Jun. 16th, 2021

Abstract

Based on Wu-schaback's Quasi interpolation operator, a new MQ radial quasi interpolation operator

*通讯作者。

文章引用: 熊晗, 曾光, 雷莉, 王斌斌. 一种改进的 MQ 拟插值方法及其性质[J]. 应用数学进展, 2021, 10(6): 1945-1955. DOI: 10.12677/aam.2021.106205

is proposed. The operator has the advantages of linear polynomial regeneration, shape-preserving property of order 2 and high convergence rate, and does not need the derivative of the function at the end point. Through theoretical analysis, it is concluded that the linear polynomial of the operator has the advantages of reproducibility, second-order shape preservation and higher convergence order. Finally, the approximation ability of the proposed scheme is compared with Wu-schaback's and Feng Li's quasi interpolation scheme by numerical experiments. The numerical results confirm the conclusion of the theoretical analysis and the effectiveness of the operator.

Keywords

Numerical Approximation, Radial Basis Function, Quasi-Interpolation, Shape-Preserving, Approximation Capacity

Copyright © 2021 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

插值是函数逼近的一种经典而又十分重要的方法。随着径向基函数的发展, 许多的研究者利用径向基函数构造插值函数去解决问题, 并取得了不错的效果。Powell [1]将 MQ 径向基函数转移到一维空间的离散数据上, 构造了拟插值函数 $Lf(x)$, 使 $Lf(x)$ 满足了线性多项式的再生性。然后, Beatson 和 Powell [2]通过将 MQ 径向基函数转移至有限分散数据上, 构造了拟插值算子 $L_c f(x)$, 该算子满足线性多项式的再生性。然而, 要求算子 $L_c f(x)$ 在 $f(x)$ 端点处的导数值, 这在实际应用中很复杂。因此, Wu 和 Schaback [3]对 $L_c f(x)$ 进行了适当的修改, 构造了拟插值算子 $L_D f(x)$, 该算子不必求得 $f(x)$ 在端点处的导数, 也满足线性多项式的再生性质。但是, 他们发现当 $c = O(h)$ 时, 算子 $L_D f(x)$ 的误差不是 $O(h^2)$, 而是 $O(h^2 |\ln h|)$, 其中 h 是相邻节点之间的最大距离。Leevan 和 Ling [4]基于文献[3]提出了一种 MQ 径向基函数的多级单变量拟插值方案, 并证明了该方案在当 $c = O(h)$ 时, 收敛速率为 $O(h^{2.5} |\ln h|)$ 。而 Zhang 和 Wu [5]通过三次 MQ-B 样条原理, 构造了四种保形性的拟插值算子, 然而这些算子不能满足多项式的再现性, 并且要求 $f(x)$ 在端点处的导数。Feng 和 Li [6]构造了一个保形拟插值算子, 该算子满足三次 MQ 径向基函数对离散数据的二次多项式再生性, 并证明了它的逼近速率最大为 $O(h^3)$ 。Walddron [7]在 m 次多项式的拟插值算子的基础上, 构造了再现 $(m+r)$ 次多项式的拟插值算子 (r 为非负整数)。但是, 它涉及到 $f(x)$ 在每一个节点的导数, 并且要求被逼近函数额外的 r 阶光滑。Chen *et al.* [8]利用 Hermite 插值多项式设计了一种新的 MQ 拟插值算子, 该具有线性再生和保持单调性。Wang *et al.* [9]提出了一种改进的单变量 MQ 拟插值算子, 并在一定的假设下给出了收敛速度。在文献[10]-[15]中, 也可以发现更多关于 MQ 拟插值的应用。

本文的结构如下: 首先, 在第 2 节, 我们介绍了一些必要的定义及拟插值函数的相关性质。接着, 我们通过修正满足线性多项式再生性质的拟插值算子 $L_D f(x)$ 构造了一种新的 MQ 拟插值算子。在第 3 节中, 详细讨论了该算子二阶保形性质, 收敛性及其收敛阶。在第 4 节中, 我们通过数值实验比较了 Wu-Schaback 和 Feng-Li 与该拟插值算子拟插值格式的逼近能力, 并通过实例验证了该拟插值算子的收敛速度。最后, 在第 5 节, 我们给出了一些结论和未来的工作安排。

2. MQ 径向拟插值格式的构造

2.1. 预备知识

本节首先给出一些必要的定义和已知的结论。

定义 2.1 [3] 给定一组散乱的数据 $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, 函数 $f(x): C[a, b] \rightarrow R$ 的拟插值算子 $Lf(x)$ 定义为:

$$Lf(x) = \sum_{j=0}^n f(x_j) \alpha_j(x), x \in [a, b]$$

其中 $\alpha_j(x)$ 为拟插值基函数。

定义 2.2 [3] 假设由数据点 $\{x_j, f(x_j)\}_{j=1}^n$ 构造而成的 $Lf(x)$ 是函数 $f(x)$ 的近似, 如果数据点 $\{x_j, f(x_j)\}_{j=1}^n$ 的 k 阶导函数是非负的, 并且 $Lf(x)$ 的 k 阶导函数也是非负的, 那么 $Lf(x)$ 则具有 k 阶的保形性。特别的, 一阶保形性称为保单调性, 二阶的保形性称为保凸性。

下面, 我们介绍已知的拟插值算子 $L_D f(x)$ 和 $L_s f(x)$ 。首先, 对于给定的分散数据 $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, Wu 和 Schaback [3] 基于基函数 $\phi_j(x) = \left((x-x_j)^2 + c^2 \right)^{1/2}$ 构造了拟插值算子 $L_D f(x)$ 。

$$L_D f(x) = f(x_0) \alpha_0(x) + f(x_1) \alpha_1(x) + \sum_{j=2}^{n-2} f(x_j) \alpha_j(x) + f(x_{n-1}) \alpha_{n-1}(x) + f(x_n) \alpha_n(x)$$

此时

$$\begin{aligned} \alpha_0(x) &= \frac{1}{2} + \frac{\phi_1(x) - (x-x_0)}{2(x_1-x_0)} \\ \alpha_1(x) &= \frac{\phi_2(x) - \phi_1(x)}{2(x_1-x_0)} - \frac{\phi_1(x) - (x-x_0)}{2(x_1-x_0)} \\ \alpha_j(x) &= \frac{\phi_{j+1}(x) - \phi_j(x)}{2(x_{j+1}-x_j)} - \frac{\phi_j(x) - \phi_{j-1}(x)}{2(x_j-x_{j-1})} \\ \alpha_{n-1}(x) &= \frac{(x_n-x) - \phi_{n-1}(x)}{2(x_n-x_{n-1})} - \frac{\phi_{n-1}(x) - \phi_{n-2}(x)}{2(x_{n-1}-x_{n-2})} \\ \alpha_n(x) &= \frac{1}{2} + \frac{\phi_{n-1}(x) - (x_n-x)}{2(x_n-x_{n-1})} \end{aligned}$$

2.2. MQ 拟插值算子的构造

在满足线性多项式再生的算子 $L_D f(x)$ 的基础上, 对 $L_D f(x)$ 进行改进, 并其后添加一阶导数的线性组合项, 构造拟插值算子 $L_1 f(x)$ 。针对实际问题中两端导数值不易求出的问题, 利用三点微分公式代替一阶导数值, 得到了新的 MQ 拟插值算子 $L_2 f(x)$ 。具体形式如下:

$$L_1 f(x) = L_D f(x) + f'(x_0) \lambda_0(x) + f'(x_n) \lambda_n(x) \quad x \in [a, b] \quad (3.1)$$

$$L_2 f(x) = L_D f(x) + D_1(x_0) \lambda_0(x) + D_2(x_n) \lambda_n(x) \quad x \in [a, b] \quad (3.2)$$

此时

$$\lambda_0(x) = \frac{1}{2}(x - x_0) - \frac{1}{2}\phi_0(x)$$

$$\lambda_n(x) = \frac{1}{2}\phi_n(x) - \frac{1}{2}(x_n - x)$$

$$D_1(x_0) \approx f'(x_0) = \frac{1}{2h}[-3f(x_0) + 4f(x_1)] - \frac{1}{2h}f(x_2)$$

$$D_2(x_n) \approx f'(x_n) = \frac{1}{2h}[f(x_{n-2}) - 4f(x_{n-1})] + \frac{3}{2h}f(x_n)$$

3. MQ 拟插值算子的相关性质

定理 3.1 MQ 拟插值算子 $L_1f(x)$ 和 $L_2f(x)$ 满足线性多项式再生性质。

证明:

$$\begin{aligned} L_1f(x) &= L_Df(x) + f'(x_0)\lambda_0(x) + f'(x_n)\lambda_n(x) \\ &= f(x_0)\left(\frac{1}{2} + \frac{\phi_1(x) - x + x_0}{2(x_1 - x_0)}\right) + f(x_1)\frac{\phi_2(x) - \phi_1(x)}{2(x_2 - x_1)} - f(x_1)\frac{\phi_1(x) - x + x_0}{2(x_1 - x_0)} \\ &\quad + \sum_{j=2}^{n-2} f(x_j)\left(\frac{\phi_{j+1}(x) - \phi_j(x)}{2(x_{j+1} - x_j)} - \frac{\phi_j(x) - \phi_{j-1}(x)}{2(x_j - x_{j-1})}\right) \\ &\quad + f(x_{n-1})\left(\frac{x_n - x - \phi_{n-1}(x)}{2(x_n - x_{n-1})} - \frac{\phi_{n-1}(x) - \phi_{n-2}(x)}{2(x_{n-1} - x_{n-2})}\right) \\ &\quad + f(x_n)\left(\frac{1}{2} + \frac{\phi_{n-1}(x) + x - x_n}{2(x_n - x_{n-1})}\right) + f'(x_0)\frac{x - x_0 - \phi_0(x)}{2} \end{aligned}$$

如果 $f(x) = x$, 那么

$$\begin{aligned} L_1f(x) &= L_Df(x) + f'(x_0)\lambda_0(x) + f'(x_n)\lambda_n(x) \\ &= x_0\left(\frac{1}{2} + \frac{\phi_1(x) - x + x_0}{2(x_1 - x_0)}\right) + x_1\frac{\phi_2(x) - \phi_1(x)}{2(x_2 - x_1)} - x_1\frac{\phi_1(x) - x + x_0}{2(x_1 - x_0)} \\ &\quad + \sum_{j=2}^{n-2} x_j\left(\frac{\phi_{j+1}(x) - \phi_j(x)}{2(x_{j+1} - x_j)} - \frac{\phi_j(x) - \phi_{j-1}(x)}{2(x_j - x_{j-1})}\right) \\ &\quad + x_{n-1}\left(\frac{x_n - x - \phi_{n-1}(x)}{2(x_n - x_{n-1})} - \frac{\phi_{n-1}(x) - \phi_{n-2}(x)}{2(x_{n-1} - x_{n-2})}\right) \\ &\quad + x_n\left(\frac{1}{2} + \frac{\phi_{n-1}(x) + x - x_n}{2(x_n - x_{n-1})}\right) \\ &= x \end{aligned}$$

对于算子 $L_2f(x)$, 同理也可证明。

定理 3.2 如果数据序列 $\{f(x_j)\}_{j=0}^n$ 中的数据是从单调函数 $f(x)$ ($x \in C[x_0, x_n]$) 中取得, 则拟插值算子 $L_1f(x)$ 和 $L_2f(x)$ 也是单调函数。

证明: $L_1 f(x)$ 的一阶导数为

$$\begin{aligned} L_1 f'(x) &= \left(\frac{\phi'_1(x)-1}{2(x_1-x_0)} \right) f(x_0) - \left(-\frac{\phi'_1(x)-1}{2(x_1-x_0)} \right) f(x_1) + \left(\frac{\phi'_2(x)-\phi'_1(x)}{2(x_2-x_1)} \right) f(x_1) \\ &\quad + \sum_{j=2}^{n-2} f(x_j) \left(\frac{\phi'_{j+1}(x)-\phi'_j(x)}{2(x_{j+1}-x_j)} - \frac{\phi'_j(x)-\phi'_{j-1}(x)}{2(x_j-x_{j-1})} \right) \\ &\quad - f(x_{n-1}) \left(\frac{\phi'_{n-1}(x)-1}{2(x_n-x_{n-1})} + \frac{\phi'_{n-1}(x)-\phi'_{n-2}(x)}{2(x_{n-1}-x_{n-2})} \right) \\ &\quad + f(x_n) \frac{\phi'_{n-1}(x)+1}{2(x_n-x_{n-1})} + f'(x_0) \frac{1-\phi'_0(x)}{2} + f'(x_n) \frac{\phi'_n(x)+1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-2} f'(x_j) (\phi'_j(x) - \phi'_{j+1}(x)) + \frac{1}{2} f'(x_0) (1 - \phi'_1(x)) + f'(x_0) \frac{1 - \phi'_0(x)}{2} \\ &\quad + \frac{1}{2} f'(x_{n-1}) (\phi'_{n-1}(x) + 1) + \frac{1}{2} f'_n(x_n) \frac{\phi'_n(x) + 1}{2} \end{aligned}$$

对任意的 $x \in R$, $-1 \leq \phi'_{j+1}(x) \leq \phi'_j(x) \leq 1$ 因此, 当 $f'(x) > 0$, $L_1 f'(x) > 0$; $f'(x) < 0$; $L_1 f'(x) < 0$ 。

另外, 根据算子 $L_2 f(x)$, $L_2 f(x)$ 的一阶导数可计算为

$$\begin{aligned} L_2 f'(x) &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-2} f'(x_j) (\phi'_j(x) - \phi'_{j+1}(x)) + \frac{1}{2} D_1(x_0) (1 - \phi'_1(x)) + \frac{1}{2} f'(x_{n-1}) (1 + \phi'_{n-1}(x)) \\ &\quad + \frac{1}{2} D_1(x_0) (1 - \phi'_0(x)) + \frac{1}{2} D_2(x_n) (1 + \phi'_n(x)) \end{aligned}$$

从上面的公式可以看出, 当 $f'(x) > 0$, $L_2 f'(x) > 0$, $f'(x) < 0$, $L_2 f'(x) < 0$ 。完成证明。

定理 3.3 若 $[f'(x_n)\phi''_n(x) - f'(x_0)\phi''(x)] \geq 0$, 则拟插值算子 $L_1 f(x)$ 为严格二阶保形; 若 $[D_2(x_n)\phi''_n(x) - D_1(x_0)\phi''(x)] \geq 0$, 则拟插值算子 $L_2 f(x)$ 是严格二阶保形。

证明: $L_1 f(x)$ 的二阶导数

$$\begin{aligned} L_1'' f(x) &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} \phi_j''(x) (f'(x_j) - f'(x_{j-1})) - \frac{1}{2} (f'(x_0)\phi'_0(x) + f'(x_n)\phi'_n(x)) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} \phi_j''(x) (x_j - x_{j-1}) f''(x) - \frac{1}{2} f'(x_0)\phi''_0(x) + \frac{1}{2} f'(x_n)\phi''_n(x) \end{aligned}$$

此时,

$$\phi_j''(x) = \frac{c^2}{[c^2 + (x - x_j)^2]^{\frac{3}{2}}} \geq 0$$

因此, 当 $[f'(x_n)\phi''_n(x) - f'(x_0)\phi''(x)] \geq 0$, 我们可以得到 $L_1 f''(x) \geq 0$ 。最后, 我们证明了拟插值算子 $L_1 f(x)$ 具有二阶保形性。

根据算子 $L_2 f(x)$ 的二阶导数

$$\begin{aligned} L_2'' f(x) &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} \phi_j''(x) (f'(x_j) - f'(x_{j-1})) - \frac{1}{2} (D_1(x_0)\phi'_0(x) + D_2(x_n)\phi'_n(x)) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} \phi_j''(x) (x_j - x_{j-1}) f''(x) - \frac{1}{2} (f'(x_0)\phi''_0(x) + f'(x_n)\phi''_n(x)) \end{aligned}$$

此时,

$$\phi_j''(x) = \frac{c^2}{\left[c^2 + (x - x_j)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \geq 0 \quad -1 \leq \phi_{j+1}'(x) \leq \phi_j'(x) \leq 1$$

因此, 如果 $[D_2(x_n)\phi_n''(x) - D_1(x_0)\phi_0''(x)] \geq 0$, 则有 $L_2 f''(x) \geq 0$ 。从而证明拟插值算子 $L_2 f(x)$ 具有二阶的保形性, 完成证明。

最后, 我们将证明算子 $L_2 f(x)$ 的收敛性及收敛阶。首先, 我们给出两个重要的引理:

引理 3.1 [3] 如果 $f(x) \in C^2[a, b]$, 拟插值算子 $L_D f(x)$ 在 $h \rightarrow 0$ 时, 满足误差估计

$$\|f - L_D f\|_\infty \leq K_1 h^2 + K_2 c h + K_3 c^2 \ln h \quad (3.3)$$

这里, K_1, K_2 和 K_3 为正常数, 与 h 和 c 无关。

证明:

拟插值算子 $L_D f(x)$ 可以重新被定义为

$$2L_D f(x) = \sum_{j=1}^{n-1} \phi_j(t) (x_{j+1} - x_{j-1}) \Delta^2(x_{j-1}, x_j, x_{j+1}) f + f_0 + f_n + (x - x_0)(x_n - x) \Delta^1(x_0, x_1) f$$

在一阶和二阶差分 Δ^1 和 Δ^2 的情况下, Lf 和 f 之间的分段线性插值的差值为

$$2(L_D f(x) - Lf(x)) = \sum_{j=1}^{n-1} (\phi_j(x) - |x - x_j|) (x_{j+1} - x_{j-1}) \Delta^2(x_{j-1}, x_j, x_{j+1}) f \quad (3.4)$$

我们可以得到该函数的界

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \sum_{j=1}^{n-1} (\phi_j(x) - |x - x_j|) (x_{j+1} - x_{j-1}) \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} \left(\left(c^2 + |x - x_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} - |x - x_j| \right) (x_{j+1} - x_{j-1}) \geq 0. \end{aligned}$$

分裂一部分带有 $|x - x_j| \leq h$ 以及其余的一部分, 这两个部分的估计

$$\left(c^2 + y^2 \right)^{\frac{1}{2}} - |y| \leq c, \quad c \geq 0, y \geq 0$$

$$\left(c^2 + y^2 \right)^{\frac{1}{2}} - |y| \leq \frac{c^2}{2|y|}, \quad c \geq 0, y \geq 0$$

从而得到

$$\varphi(x) \leq c \sum_{j=1, |x-x_j| \leq h}^{n-1} (x_{j+1} - x_{j-1}) + \frac{c^2}{2} \sum_{j=1, |x-x_j| > h}^{n-1} \frac{x_{j+1} - x_{j-1}}{|x - x_j|} \leq 8ch + c^2 \left(\int_{|x-t| \geq h} \frac{1}{|x-t|} dt + O(h) \right)$$

因此我们有

$$\varphi(x) \leq 8ch + O(c^2 \ln h) + O(c^2 h)$$

根据(3.4)和 Lf 的 $O(h^2)$ 收敛阶, 当 $h \rightarrow 0$ 时, c 趋于零时, 它满足下面的约束 $\varphi(x)$ 。对于 $|y| \leq y^0$, $y^0 > 0$ 时, 我们得到

$$(1 + y)^{\frac{1}{2}} - 1 \geq \frac{y}{2} - \frac{y^2}{4}$$

保持 $\varphi(x)$ 以及 $|x-x_j| \geq cy_0^{-1}$ 不变, 则有

$$\begin{aligned}\varphi(x) &\geq \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} (x_{j+1} - x_{j-1}) \left(\frac{c^2}{|x-x_j|} - \frac{1}{2} \frac{c^4}{|x-x_j|^3} \right) \\ &= (1+O(h))c^2 \int_{|x-t| \geq cy_0^{-1}} \frac{1}{|x-t|} dt - (1+O(h)) \frac{c^4}{2} \int_{|x-t| \geq cy_0^{-1}} \frac{1}{|x-t|^3} dt\end{aligned}$$

这是由 $c^2 |\ln c|$ 作为 c 函数。如果 $c \geq c_0 \geq 0$, 函数 $\varphi(x)$ 将渐近下界

$$2 \int_a^b \left((c_0^2 + (x-t)^2)^{\frac{1}{2}} - |x-t| \right) dt > 0$$

现在我们完成证明拟插值算子 $L_D f(x)$ 满足误差估计

$$\|f - L_D f\|_{\infty} \leq K_1 h^2 + K_2 c h + K_3 c^2 \ln h \quad (3.5)$$

引理 3.2 基于 Largange 插值的原理, 给出近似一阶导数的三点插值型数值微分公式及其误差

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h} [-3f(x_0) + 4f(x_1) - f(x_2)] + \frac{h^2}{3} f^{(3)}(\xi_0) \quad (3.6)$$

$$f'(x_n) = \frac{1}{2h} [f(x_{n-2}) - 4f(x_{n-1}) + 3f(x_n)] + \frac{h^2}{3} f^{(3)}(\xi_n) \quad (3.7)$$

证明:

设 $f(x) \in C^{n+1}[a, b]$, x_0, x_1, \dots, x_n 为 $[a, b]$ 上的点, $L_n(x)$ 为 $f(x)$ 以 $\{x_i\}_{i=0}^n$ 为节点的 n 次插值多项式。作为 $f(x)$ 的逼近函数, 可用 $L_n(x)$ 的各阶导数近似 $f(x)$ 的相应阶导数, 即

$$f^{(k)}(x) \approx L_n^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^n l_i^{(k)}(x) f(x_i) \quad k=1, 2, \dots, n \quad (3.8)$$

其误差为

$$f^{(k)}(x) - L_n^{(k)}(x) = \frac{d^k}{dx^k} \left(\frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} \omega_n(x) \right) \quad (3.9)$$

当 $x = x_j$, $k=1$ 时, 有

$$f'(x_j) \approx L_n'(x_j) = \sum_{i=0}^n l_i'(x_j) f(x_i) \quad (3.10)$$

且其误差为

$$f'(x_j) - L_n'(x_j) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0, i \neq j}^n (x_j - x_i) \quad (3.11)$$

一般称(3.10)式为近似 $f'(x_j)$ 的 $n+1$ 点插值型数值微分公式。

接下来, 给出近似一阶导数($k=1$)三点插值型数值微分公式及其误差估计。设 x_0, x_1, x_2 为区间上互异的三个点, 则以其节点的 2 次插值多项式为

$$L_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} f(x_1) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} f(x_2)$$

其导数

$$L_2'(x) = \frac{2x-x_1-x_2}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}f(x_0) + \frac{2x-x_0-x_2}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}f(x_1) + \frac{2x-x_0-x_1}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}f(x_2)$$

由式(3.11)可得

$$f'(x_j) = \frac{2x_j-x_1-x_2}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}f(x_0) + \frac{2x_j-x_0-x_2}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}f(x_1) + \frac{2x_j-x_0-x_1}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + \frac{f^{(3)}(\xi_j)}{3!} \prod_{i=0, i \neq j}^2 (x_j - x_i)$$

令 $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_0 + 2h$, 即

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}[-3f(x_0) + 4f(x_1) - f(x_2)] + \frac{h^2}{3}f^{(3)}(\xi_0)$$

$$f'(x_1) = \frac{1}{2h}[-f(x_0) + f(x_2)] - \frac{h^2}{6}f^{(3)}(\xi_1)$$

$$f'(x_2) = \frac{1}{2h}[f(x_0) - 4f(x_1) + 3f(x_2)] + \frac{h^2}{3}f^{(3)}(\xi_2)$$

根据上述三式, 即得出三点-端点数值微分公式及其误差估计

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}[-3f(x_0) + 4f(x_1) - f(x_2)] + \frac{h^2}{3}f^{(3)}(\xi_0)$$

$$f'(x_n) = \frac{1}{2h}[f(x_{n-2}) - 4f(x_{n-1}) + 3f(x_n)] + \frac{h^2}{3}f^{(3)}(\xi_n)$$

定理 3.4 对于 $f \in C^2[a, b]$, 拟插值算子 $L_2f(x)$ 满足误差估计

$$\|f - L_2f(x)\|_\infty \leq (K_1 + K_4)h^2 + K_2ch + K_3c^2 \ln h \quad (3.12)$$

这里, K_1 , K_2 , K_3 和 K_4 为正常数, 与 h 和 c 无关。

证明: 令 $L_2f(x) = L_Df(x) + W_Df(x)$, 若 $f(x)$ 是一个连续的函数, 则有

$$\|f - L_2f(x)\|_\infty = \|f(x) - (L_Df(x) + W_Df(x))\|_\infty \leq \|f(x) - L_Df(x)\|_\infty + \|f(x) - W_Df(x)\|_\infty \quad (3.13)$$

根据引理 3.1, 我们得到

$$\|f - L_Df\|_\infty \leq K_1h^2 + K_2ch + K_3c^2 \ln h$$

且根据引理 3.2, 则有

$$\|f - W_Df(x)\|_\infty \leq \frac{h^2}{3}, h \rightarrow 0$$

最后, 结合引理 3.1 和引理 3.2, 我们证明了拟插值算子 $L_2f(x)$ 满足误差估计

$\|f - L_2f(x)\|_\infty \leq (K_1 + K_4)h^2 + K_2ch + K_3c^2 \ln h$ **注 3.1** 由拟插值算子 $L_2f(x)$ 的收敛性分析可以看出, 当 $c = O(h^2)$ 时, 则 $\|f - L_2f(x)\|_\infty = O(h^3)$ 。因此, 拟插值算子 $L_2f(x)$ 的收敛阶数与形状参数 c 的值有关。

4. 数值实验

在本节中, 以 $f(x) = x^3$ 为待逼近函数, 设 $c = 0.01$, $h = 0.1$, 观察 $f(x)$ 与拟插值算子 $L_2f(x)$ 的比较结果, 如图 1 所示。接着, 选择不同的 h 和形状参数 c , 比较拟插值算子 $L_2f(x)$ 与 $L_Df(x)$ [3] 及 $L_s f(x)$ [6] 的逼近效果。结果见表 1~3 所示。最后, 在表 4 中, 我们设 $c = h^2$, $h = 0.1, 0.2, 0.01, 0.001, 0.0001$, 观察算子 $L_2f(x)$ 随 h 的变化率。

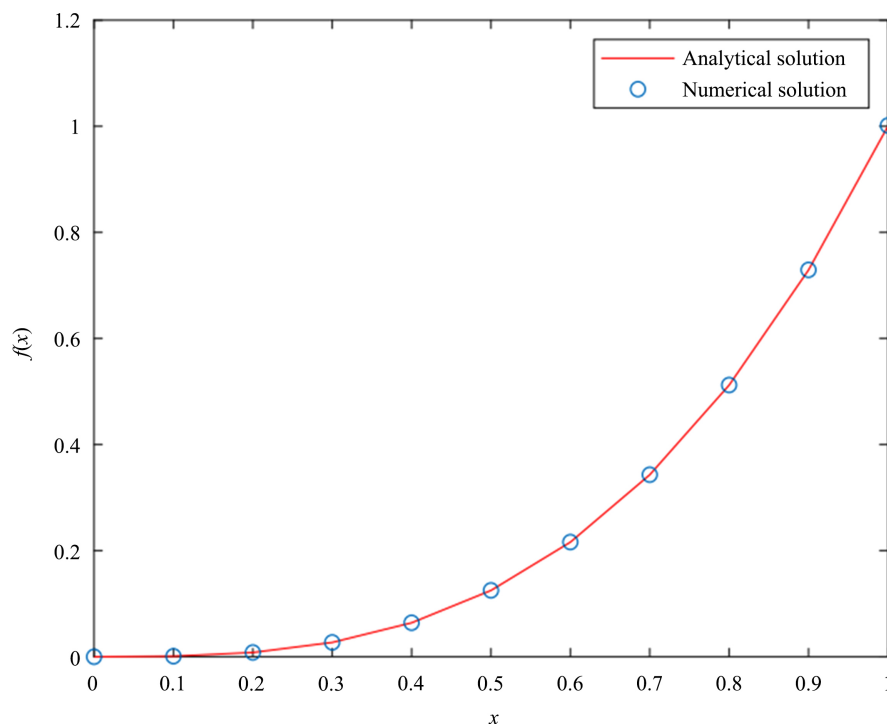


Figure 1. When $c = 0.01$, $h = 0.1$, the comparison result of the quasi-interpolation operator $L_2f(x)$ and the original function $f(x)$

图 1. 当 $c = 0.01$, $h = 0.1$ 时, 拟插值算子 $L_2f(x)$ 与原函数 $f(x)$ 的比较结果

Table 1. When $h = 0.1$, c take different values, the quasi-interpolation operator $L_2f(x)$, $L_Df(x)$ and $L_Sf(x)$ the error comparison results

表 1. 当 $h = 0.1$, c 取如下不同值时, 拟插值算子 $L_2f(x)$, $L_Df(x)$ 及 $L_Sf(x)$ 的误差比较结果

| c | 0.01 | 0.02 | 0.05 | 0.1 | 0.2 |
|-----------------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| $\ L_Df(x) - f(x)\ _\infty$ | 2.90×10^{-3} | 6.40×10^{-3} | 2.02×10^{-2} | 5.36×10^{-2} | 1.44×10^{-1} |
| $\ L_Sf(x) - f(x)\ _\infty$ | 2.01×10^{-3} | 2.20×10^{-3} | 3.40×10^{-3} | 7.40×10^{-3} | 2.32×10^{-2} |
| $\ L_2f(x) - f(x)\ _\infty$ | 2.15×10^{-3} | 2.98×10^{-3} | 5.43×10^{-3} | 1.71×10^{-2} | 9.87×10^{-2} |

Table 2. When $h = 0.01$, c take different values, the quasi-interpolation operator $L_2f(x)$, $L_Df(x)$ and $L_Sf(x)$ the error comparison results

表 2. 当 $h = 0.01$, c 取如下不同值时, 拟插值算子 $L_2f(x)$, $L_Df(x)$ 及 $L_Sf(x)$ 的误差比较结果

| c | 0.001 | 0.002 | 0.005 | 0.01 | 0.02 |
|-----------------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| $\ L_Df(x) - f(x)\ _\infty$ | 8.74×10^{-5} | 1.43×10^{-4} | 4.17×10^{-4} | 1.20×10^{-3} | 3.80×10^{-3} |
| $\ L_Sf(x) - f(x)\ _\infty$ | 4.97×10^{-5} | 5.19×10^{-5} | 6.74×10^{-5} | 1.22×10^{-4} | 3.14×10^{-4} |
| $\ L_2f(x) - f(x)\ _\infty$ | 2.67×10^{-5} | 9.05×10^{-5} | 5.77×10^{-5} | 1.43×10^{-4} | 9.87×10^{-4} |

Table 3. When $h=0.001$, c take different values, the quasi-interpolation operator $L_2f(x)$, $L_Df(x)$ and $L_s f(x)$ the error comparison results

表 3. 当 $h=0.001$ c 取如下不同值时, 拟插值算子 $L_2f(x)$, $L_Df(x)$ 及 $L_s f(x)$ 的误差比较结果

| c | 0.0001 | 0.0002 | 0.0005 | 0.001 | 0.002 |
|----------------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| $\ L_Df(x)-f(x)\ _\infty$ | 5.15×10^{-7} | 7.75×10^{-7} | 4.86×10^{-6} | 1.75×10^{-5} | 6.23×10^{-5} |
| $\ L_s f(x)-f(x)\ _\infty$ | 5.07×10^{-7} | 5.29×10^{-7} | 6.87×10^{-7} | 1.25×10^{-6} | 3.49×10^{-6} |
| $\ L_2f(x)-f(x)\ _\infty$ | 2.67×10^{-7} | 9.05×10^{-8} | 5.46×10^{-7} | 1.43×10^{-6} | 9.87×10^{-6} |

Table 4. When $c=h^2$, the error comparison result of the quasi-interpolation operator $L_2f(x)$ and the original function $f(x)$

表 4. 当 $c=h^2$ 时, 拟插值算子 $L_2f(x)$ 与原函数 $f(x)$ 的误差比较结果

| (c, h) | $(10^{-2}, 10^{-1})$ | $(10^{-4}, 10^{-2})$ | $(10^{-6}, 10^{-3})$ | $(10^{-8}, 10^{-4})$ |
|---------------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|------------------------|
| $\ L_2f(x)-f(x)\ _\infty$ | 2.15×10^{-3} | 2.26×10^{-6} | 2.26×10^{-9} | 2.23×10^{-12} |

首先, 我们得到了原函数 $f(x)$ 与拟插值算子 $L_2f(x)$ 的图像。由图 1 看出拟插值算子 $L_2f(x)$ 曲线与原函数的图像曲线拟合的很好, 即拟插值 $L_2f(x)$ 方法与解析解基本一致。拟插值 $L_2f(x)$ 与解析解的误差比较结果如表 1 所示。

在算例中, 我们给出了拟插值 $L_2f(x)$ 在 $h=0.1, c=0.01, 0.02, 0.05, 0.1, 0.2$ 时的误差精度比较。由表 1 可以很容易地发现, 随着形状参数 c 的减小, 拟插值 $L_2f(x)$ 的误差也减小。根据表 1~3 的数值算例, 设 h 分别为 $0.1, 0.01, 0.001$, $c=0.1h, 0.2h, 0.5h, h, 2h$ 时, 分别计算 $\|L_Df(x)-f(x)\|_\infty$ 和 $\|L_s f(x)-f(x)\|_\infty$ 和 $\|L_2f(x)-f(x)\|_\infty$ 。为了简化, 我们假设采样点 $\{x_i\}_{i=0}^n$ 是均匀分布的。通过分析表 1~3 中的数据, 我们发现拟插值算子的逼近能力取决于形状参数 c 和 h , 当我们降低参数 c 和 h 的值时, 我们可以得到更好的逼近效果。从表 4, 取 $c=h^2, h=0.1, 0.2, 0.01, 0.001, 0.0001$, 观测算子 $L_2f(x)$ 的收敛速度。很明显, 当 $c=O(h^2)$ 时, 拟插值算子 $L_2f(x)$ 的收敛速率可以达到 $O(h^3)$ 。此外, 我们可以得到在 c 和 h 相同的条件下, 拟插值算子 $L_2f(x)$ 的收敛能力优于其他两种。总之, 这些数值实验可以说明拟插值 $L_2f(x)$ 是一个性能优良的拟插值算子。

5. 结论

本文通过对 Wu-Schaback 拟插值格式的改进, 构造了一个拟插值算子 $L_2f(x)$, 该算子不需要 $f(x)$ 在端点处的导数, 具有很强的实用性。本文详细证明了算子 $L_2f(x)$ 具有良好的保形性、线性多项式的再生性和良好的收敛能力, 便于人们在各种应用中使用。在未来, 我们计划构造一个拟插值方案, 它可以满足更高次多项式的再生性质。另一方面, 我们希望将这种构造方法应用到多元空间中, 构造一些性质较好的拟插值算子。

基金项目

江西省教育厅科学技术研究项目(GJJ200757), 东华理工大学研究生创新基金(DHYC-202028)。

参考文献

- [1] Powell, M.J.D. (1990) Univariate Multiquadric Approximation: Reproduction of Linear Polynomials. In: Haussman,

- W. and Jetter, K., Eds., *Multivariate Approximation and Interpolation*, Birkhauser Verlag, Basel, 227-240. https://doi.org/10.1007/978-3-0348-5685-0_17
- [2] Beatson, R.K. and Powell, M.J.D. (1992) Univariate Multiquadric Approximation: Quasi-Interpolation to Scattered Data. *Constructive Approximation*, **8**, 275-288. <https://doi.org/10.1007/BF01279020>
- [3] Wu, Z.M. and Schaback, R. (1994) Shape Preserving Properties and Convergence of Univariate Multiquadric Quasi-Interpolation. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, **10**, 441-446. <https://doi.org/10.1007/BF02016334>
- [4] Ling, L. (2004) A Univariate Quasi-Multiquadric Interpolation with Better Smoothness. *Computers & Mathematics with Applications*, **48**, 897-912. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2003.05.014>
- [5] Zhang, W.X. and Wu, Z.M. (2004) Some Shape-Preserving Quasi-Interpolation to Non-Uniformly Distributed Data by MQ-B-Splines. *Applied Mathematics—A Journal of Chinese Universities B*, **19**, 191-202. <https://doi.org/10.1007/s11766-004-0054-5>
- [6] Feng, R.Z. and Li, F. (2009) Interpolation Satisfying Quadratic Polynomial Reproduction Property and Shape-Preserving Property to Scattered Data. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **225**, 594-601. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2008.08.024>
- [7] Waldron, S. (2009) Increasing the Polynomial Reproduction of a Quasi-Interpolation Operator. *Journal of Approximation Theory*, **161**, 114-126. <https://doi.org/10.1016/j.jat.2008.08.011>
- [8] Chen, R.H., Han, X.L. and Wu, Z.M. (2009) A Multiquadric Quasi-Interpolation with Linear Reproducing and Preserving Monotonicity. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **231**, 517-525. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2009.03.014>
- [9] Wang, R.H., Xu, M. and Fan, Q. (2010) A Kind of Improved Univariate Multiquadric Quasi-Interpolation Operators. *Computers & Mathematics with Applications*, **59**, 451-456. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2009.06.023>
- [10] Wu, Z.M. (1999) Solving Differential Equation with Radial Basis Function. In: *Advances in Computational Mathematics*, Lecture Note in Pure and Applied Mathematics, Vol. 202, Marcel Dekker, Inc., New York, 537-544.
- [11] Wu, Z.M. (2004) Dynamically Knots Setting in Meshless Method for Solving Time Dependent Propagations Equation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **193**, 1221-1229. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2003.12.015>
- [12] Hon, Y.C. and Wu, Z.M. (2000) A Quasi-Interpolation Method or Solving Ordinary Differential Equations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **48**, 1187-1197. [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-0207\(20000720\)48:8<1187::AID-NME942>3.0.CO;2-K](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0207(20000720)48:8<1187::AID-NME942>3.0.CO;2-K)
- [13] Chen, R.H. and Wu, Z.M. (2006) Solving Hyperbolic Conservation Laws Using Multiquadric Quasi-Interpolation. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, **22**, 776-796. <https://doi.org/10.1002/num.20115>
- [14] Chen, H. and Wu, Z.M. (2007) Solving Partial Differential Equation by Using Multiquadric Quasi-Interpolation. *Applied Mathematics and Computation*, **186**, 1502-1510. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2006.07.160>
- [15] 杜珊, 李风军. 新变参 MQ 拟插值函数的性质及其逼近性能研究[J]. 应用数学学报, 2019, 42(5): 655-669.