Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2021, 10(6), 2021-2030
Published Online June 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2021.106212

Hans汉斯

一类Schrödinger-Poisson系统基态变号解的存在性

刘志霞

兰州理工大学理学院，甘肃 兰州
Email: 1931778057@qq.com

收稿日期：2021年5月15日；录用日期：2021年6月1日；发布日期：2021年6月17日

摘 要

运用Ekeland变分原理，约束变分等变分方法，研究有界光滑区域上一类Schrödinger-Poisson系统基态变号解的存在性。所得结果是前述已有工作的补充与推广。

关键词

Schrödinger-Poisson系统，基态变号解，变分法

The Existence of Ground Statesign-Changing Solutions for a Class of Schrödinger-Poisson System

Zhixia Liu

School of Science, Lanzhou University of Technology, Lanzhou Gansu
Email: 1931778057@qq.com

Received: May 15th, 2021; accepted: Jun. 1st, 2021; published: Jun. 17th, 2021

Abstract

The existence of ground state sign-changing solutions for a class of Schrödinger-Poisson system in a bounded smooth region is studied by using the Ekeland variational principle and the constrained variational method. The results obtained are the supplement and extension of the previous work.

文章引用: 刘志霞. 一类 Schrödinger-Poisson 系统基态变号解的存在性[J]. 应用数学进展, 2021, 10(6): 2021-2030.
DOI: 10.12677/aam.2021.106212

Keywords

Schrödinger-Poisson System, Ground State Sign-Changing Solution, Variation Method

1. 前言和主要结果

本文研究如下 Schrödinger-Poisson 系统

$$\begin{cases} -\Delta u-\lambda\phi u=|u|^{p-2}u, & x\in\Omega, \\ -\Delta\phi=u^2, & x\in\Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

极小能量变号解的存在性和渐近性态，其中 $\Omega\in\mathbb{R}^N$ ($N\geq 1$)是一个有界的光滑区域，λ 是一个大于零的参数，$2<p<2^*$。

系统(1.1)也来源于经典的 Schrödinger-Poisson 系统。近年来，一些学者特别关注 Schrödinger-Poisson 系统变号解问题研究，如文献[1]-[10]。然而，这些文献都是在泊松函数前的参数大于零的条件下变号解的相关问题。

最近，在文献[11]中，Qian 研究了如下基尔霍夫方程极小能量变号解

$$\begin{cases} -\left(a-\lambda\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)\Delta u=|u|^{p-2}u, & x\in\Omega, \\ u=0, & x\in\partial\Omega, \end{cases} \tag{1.2}$$

其中 $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ ($N\geq 1$)是一个有界光滑区域，$a>0$，$\lambda>0$，$2<p<2^*$。运用约束变分，作者首先证明了当 λ 充分小时系统(1.2)基态变号解的存在性；其次，证明了基态变号解的能量值严格大于基态解的能量值；最后，作者讨论了基态变号解的渐近行为。

受上述工作，尤其是文献[11]的启发，本文主要讨论系统(1.1)基态变号解的存在性。

设 $H_0^1(\Omega)$ 是标准的 Hilbert 空间，其上的范数为 $\|u\|^2=\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x$。注意到，对任意的 $u\in H_0^1(\Omega)$，记 ϕ_u 是 $-\Delta\phi=u^2$ 在 $D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ 中的唯一解，且

$$\phi_u(x)=\frac{1}{4\pi}\int_{R^3}\frac{u^2(x)}{|x-y|}\mathrm{d}y. \tag{1.3}$$

把(1.3)带入到系统(1.1)的第一个方程，系统(1.1)可转化为关于 u 的微分方程，其相应的能量泛函定义为：

$$J_\lambda(u)=\frac{1}{2}\|u\|^2-\frac{\lambda}{4}\int_\Omega\phi_u u^2\mathrm{d}x-\frac{1}{p}\int_\Omega|u|^p\mathrm{d}x,\quad u\in H_0^1(\Omega)$$

显然 $J_\lambda\in C^1(H_0^1(\Omega),\mathbb{R})$，且系统(1.1)的弱解是能量泛函 J_λ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中临界点。

此外，如果 $u\in H_0^1(\Omega)$ 是系统(1.1)的解并且 $u^\pm\neq 0$，则 u 是系统(1.1)的变号解，此处 $u^+(x)=\max\{u(x),0\}$，$u^-(x)=\min\{u(x),0\}$。

考虑到对于任意的 $u\in\mathcal{M}_\lambda$ 很难找到一个常数 $C>0$ 使得 $\|u^\pm\|>C$，其中

$\mathcal{M}_{\lambda}=\left\{u\in H_0^1(\Omega):u^{\pm}\neq 0,\left\langle J_{\lambda}'(u),u^{\pm}\right\rangle=0\right\}$。为解决这一困难，定义截断函数 $g\in C^{\infty}\left(\left[0,+\infty\right),\mathbb{R}\right)$ 如下：

$$\begin{cases} g(t)=1, & t\in[0,1), \\ g(t)=0, & t\in(2,+\infty), \\ 0\le g(t)\le 1, & t\in[1,2], \\ -2\le g'(t)\le 0, & t\in[0,+\infty). \end{cases}$$

修正能量泛函 J_{λ} 为如下泛函：

$$J_{\lambda,T}(u)=\frac{a}{2}\|u\|^2-\frac{\lambda}{4}G_T(u)\|u\|^4-\frac{1}{p}\int_{\Omega}\left|u^p\right|\mathrm{d}x,$$

其中对于任意的 $T>0$，$G_T(u)=g\left(\frac{\|u\|^2}{T^2}\right)$。显然，$J_{\lambda,T}(u)\in C^1\left(H_0^1(\Omega),\mathbb{R}\right)$。

令

$$\mathcal{M}_{\lambda,T}=\left\{u\in H_0^1(\Omega):u^{\pm}\neq 0,\left\langle J_{\lambda,T}'(u),u^{\pm}\right\rangle=0\right\},\quad m_{\lambda,T}:=\inf\left\{J_{\lambda,T}(u):u\in\mathcal{M}_{\lambda,T}\right\}$$

主要结果如下：

定理 1.1 存在 $\Lambda^*>0$，使得对于 $\forall\lambda\in\left(0,\Lambda^*\right)$ 系统(1.1)在 $H_0^1(\Omega)$ 中至少有一个基态变号解 u_{λ}，其中 u_{λ} 的能量严格大于基态解的能量值。

2. 几个重要引理

引理 2.1. $\forall u\in H_0^1(\Omega)$ 且 $u^{\pm}\neq 0$，$\exists(t_u,s_u)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+$ 使得 $t_uu^++s_uu^-\in\mathcal{M}_{\lambda,T}$ 并且当 λ 足够小时，$J_{\lambda,T}\left(t_uu^++s_uu^-\right)=\max\limits_{t,s\ge 0}J_{\lambda,T}\left(tu^++su^-\right)$。

证明：固定 $u\in H_0^1(\Omega)$ 且 $u^{\pm}\neq 0$，定义泛函 h：$[0,+\infty)\times[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ 为

$$\begin{aligned} h(t,s)&=J_{\lambda,T}\left(t_uu^++s_uu^-\right) \\ &=\frac{t^2}{2}\left\|u^+\right\|^2-\frac{\lambda}{4}t^4G_T\left(t_uu^++s_uu^-\right)\int_{\Omega}\phi_{u^-}\left|u^+\right|^2\mathrm{d}x-\frac{t^p}{p}\int_{\Omega}\left|u^+\right|^p\mathrm{d}x \\ &\quad+\frac{s^2}{2}\left\|u^-\right\|^2-\frac{\lambda}{4}t^4G_T\left(t_uu^++s_uu^-\right)\int_{\Omega}\phi_{u^-}\left|u^+\right|^2\mathrm{d}x-\frac{s^p}{p}\int_{\Omega}\left|u^-\right|^p\mathrm{d}x \\ &\quad-\frac{\lambda}{2}t^2s^2G_T\left(t_uu^++s_uu^-\right)\int_{\Omega}\phi_{u^+}\left|u^-\right|^2\mathrm{d}x \end{aligned}\tag{2.1}$$

因此泛函 $h\in C^2$。再根据泛函 h 和 G_T 的定义，可得当 $|(t,s)|\to+\infty$ 时，$h(s,t)\to-\infty$。再由泛函 h 的连续性，可得泛函 h 在 $[0,+\infty)\times[0,+\infty)$ 中存在最大值点 (t_u,s_u)。

下面证明泛函 h 的最大值点不能在 $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+$ 的边界处取得。不失一般性，假设 $(\bar{t},0)$ 是泛函 h 的最大值点。我们很容易的得到，当 $t=\bar{t}$，$s=0$ 且 λ 足够小时

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t}&=\bar{t}\|u\|^2-\lambda\bar{t}^3G_T\left(\bar{t}u^+\right)\int_{\Omega}\phi_{u^+}\left|u^+\right|^2-\bar{t}^{p-1}\int_{\Omega}\left|u^+\right|^p\mathrm{d}x \\ &\quad-\frac{\lambda}{2}\bar{t}^4g'\left(\frac{\left\|\bar{t}u^+\right\|^2}{T^2}\right)\frac{1}{T^2}\int_{\Omega}\nabla\left(\bar{t}u^+\right)\nabla u^+\mathrm{d}x\int_{\Omega}\phi_{u^+}\left|u^+\right|^2\mathrm{d}x>0 \end{aligned}\tag{2.2}$$

用相同的方法可得 $\frac{\partial h}{\partial s}>0$。因此，泛函 h 的最大值不能在边界处取得，即存在最大值点

$\left(t_u,s_u\right)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+$ 满足 $\left.\frac{\partial h(t,s)}{\partial t}\right|_{(t_u,s_u)}=\left.\frac{\partial h(t,s)}{\partial s}\right|_{(t_u,s_u)}=0$。

据此可得 $\left\langle J'_{\lambda,T}\left(t_uu^++s_uu^-\right),t_uu^+\right\rangle=\left\langle J'_{\lambda,T}\left(t_uu^++s_uu^-\right),s_uu^-\right\rangle=0$，即 $t_uu^++s_uu^-\in\mathcal{M}_{\lambda,T}$。

根据引理 2.1，下面的推论成立。

推论 2.1. 对于 $\forall u\in H_0^1(\Omega)$，$u^\pm\neq0$，$\exists\left(t_u,s_u\right)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+$ 使得 $t_uu^++s_uu^-\in\mathcal{M}_\lambda$ 并且当 λ 足够小时，$J_\lambda\left(t_uu^++s_uu^-\right)=\max\limits_{t,s\geq0}J_\lambda\left(tu^++su^-\right)$。

引理 2.2. 泛函 $J_{\lambda,T}$ 是下方有界的且在 $\mathcal{M}_{\lambda,T}$ 上是强制的。

证明：设 $u\in\mathcal{M}_{\lambda,T}$，则 $\left\langle J'_{\lambda,T}(u),u\right\rangle=0$，根据 p 的取值范围，下面分两种情况进行讨论。

1) 当 $2<p<4$ 时：

$$\begin{aligned}J_{\lambda,T}(u)&=J_{\lambda,T}(u)-\frac{1}{p}\left\langle J'_{\lambda,T}(u),u\right\rangle\\&=\frac{1}{2}\|u\|^2-\frac{\lambda}{4}G_T(u)\int_\Omega\phi_uu^2\mathrm{d}x-\frac{1}{p}\int_\Omega|u|^p\mathrm{d}x\\&\quad-\frac{1}{p}\left[\|u\|^2-\lambda G_T(u)\int_\Omega\phi_uu^2\,\mathrm{d}x-\frac{\lambda}{2T^2}g'\left(\frac{\|u\|^2}{T^2}\right)\int_\Omega\phi_uu^2\mathrm{d}x\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x-\int_\Omega|u|^p\mathrm{d}x\right]\\&=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)\|u\|^2+\left(\frac{\lambda}{p}-\frac{\lambda}{4}\right)G_T(u)\int_\Omega\phi_uu^2\mathrm{d}x+\frac{\lambda}{2p}g'\left(\frac{\|u\|^2}{T^2}\right)\frac{\|u\|^2}{T^2}\int_\Omega\phi_uu^2\mathrm{d}x\\&\geq\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)\|u\|^2+\frac{\lambda C}{2pT^2}g'\left(\frac{\|u\|^2}{T^2}\right)\|u\|^6\geq\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)\|u\|^2-\frac{8\lambda C}{p}T^4.\end{aligned}\tag{2.3}$$

2) 当 $4\leq p<2^*$ 时：

$$\begin{aligned}J_{\lambda,T}(u)&=J_{\lambda,T}(u)-\frac{1}{4}\left\langle J'_{\lambda,T}(u),u\right\rangle\\&=\frac{1}{2}\|u\|^2-\frac{\lambda}{4}G_T(u)\int_\Omega\phi_uu^2\mathrm{d}x-\frac{1}{p}\int_\Omega|u|^p\mathrm{d}x\\&\quad-\frac{1}{4}\left[\|u\|^2-\lambda G_T(u)\int_\Omega\phi_uu^2\mathrm{d}x-\frac{\lambda}{2T^2}g'\left(\frac{\|u\|^2}{T^2}\right)\int_\Omega\phi_uu^2\mathrm{d}x\int_\Omega|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x-\int_\Omega|u|^p\,\mathrm{d}x\right]\\&=\frac{1}{4}\|u\|^2+\frac{\lambda}{8p}g'\left(\frac{\|u\|^2}{T^2}\right)\frac{\|u\|^2}{T^2}\int_\Omega\phi_uu^2\mathrm{d}x+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{p}\right)\int_\Omega|u|^p\,\mathrm{d}x\\&\geq\frac{1}{4}\|u\|^2+\frac{\lambda}{8p}g'\left(\frac{\|u\|^2}{T^2}\right)\frac{\|u\|^2}{T^2}\|u\|^6\geq\frac{1}{4}\|u\|^2-2\lambda CT^4.\end{aligned}\tag{2.4}$$

因此，由(2.3)和(2.4)知 $J_{\lambda,T}$ 是下方有界且强制的。

引理 2.3. 令 $\lambda\in\left(0,\frac{1}{4T^2C_1S_p^{-1}}\right)$，则

1) 对于 $\forall u\in\mathcal{M}_{\lambda,T}$，$\exists$ 常数 $\mu>0$ 使得 $\|u\|\geq\mu>0$；2) 集合 $\mathcal{M}_{\lambda,T}$ 是闭的。

证明：1) 使用反证法，设 $\exists\{u_n\}\subset\mathcal{M}_{\lambda,T}$ 使得 $\left\|u_n^+\right\|\to0$ 或者 $\left\|u_n^-\right\|\to0$。根据 $\{u_n\}\subset\mathcal{M}_{\lambda,T}$，$g'\leq0$，得到

$$\left\|u_n^{\pm}\right\|^2-\lambda G_T\left(u_n\right)\int_\Omega \phi_{u_n}\left(u_n^{\pm}\right)^2\mathrm{d}x-\frac{\lambda}{2T^2}g'\left(\frac{\|u\|^2}{T^2}\right)\int_\Omega \phi_{u_n}u_n^2\mathrm{d}x\int_\Omega\left(\nabla u_n^{\pm}\right)^2\mathrm{d}x=\int_\Omega\left|u_n^{\pm}\right|^p\mathrm{d}x\,.$$

由 Sobolev 不等式和 $\|\phi_u\|_{D^{1,2}}\le C_1\|u\|^2$，可得到 $\int_\Omega\left|u_n^{\pm}\right|^p\mathrm{d}x\le S_p^{-p/2}\left\|u_n^{\pm}\right\|^p$ 和

$$\begin{aligned}&\left\|u_n^{\pm}\right\|^2-\lambda G_T\left(u_n\right)\int_\Omega \phi_{u_n}\left(u_n^{\pm}\right)^2\mathrm{d}x-\frac{\lambda}{2T^2}g'\left(\frac{\|u\|^2}{T^2}\right)\int_\Omega \phi_{u_n}u_n^2\mathrm{d}x\int_\Omega\left(\nabla u_n^{\pm}\right)^2\mathrm{d}x\\&\ge\left\|u_n^{\pm}\right\|^2-\lambda G_T\left(u_n\right)\int_\Omega \phi_{u_n}\left(u_n^{\pm}\right)^2\mathrm{d}x\\&\ge\left\|u_n^{\pm}\right\|^2-\lambda C_1S_p^{-1}G_T\left(u_n\right)\left\|u_n\right\|^2\left\|u_n^{\pm}\right\|^2\end{aligned}$$

即有 $1-\lambda C_1S_p^{-1}G_T\left(u_n\right)\left\|u_n\right\|^2\le S_p^{-p/2}\left\|u_n^{\pm}\right\|^{p-2}$。另一方面，根据 $\left\|u_n^{+}\right\|\to 0$ 或者 $\left\|u_n^{-}\right\|\to 0$，对于任意的 $\lambda\in\left(0,\frac{1}{4T^2C_1S_p^{-1}}\right)$，很容易得到

$$0<\frac{1}{2}\le 1-\lambda C_1S_p^{-1}G_T\left(u_n\right)\left\|u_n\right\|^2\le S_p^{-p/2}\left\|u_n^{\pm}\right\|^{p-2}\to 0\,.$$

这是不可能的. 因此结论 1) 成立。

2) 令 $u_n\in\mathcal{M}_{\lambda,T}$，$u_n\to u_0$。根据 $u_n\in\mathcal{M}_{\lambda,T}$，则

$$\begin{aligned}\int_\Omega\left|u_0^{\pm}\right|^p\mathrm{d}x&=\lim_{n\to\infty}\int_\Omega\left|u_n^{\pm}\right|^p\mathrm{d}x\\&=\lim_{n\to\infty}\left[\left\|u_n^{\pm}\right\|^2-\lambda G_T\left(u_n\right)\int_\Omega \phi_{u_n}\left(u_n^{\pm}\right)^2\mathrm{d}x-\frac{\lambda}{2T^2}g'\left(\frac{\|u_n\|^2}{T^2}\right)\int_\Omega \phi_{u_n}u_n^2\mathrm{d}x\int_\Omega\left(\nabla u_n^{\pm}\right)^2\mathrm{d}x\right]\\&=\left\|u_0^{\pm}\right\|^2-\lambda G_T\left(u_0\right)\int_\Omega \phi_{u_0}\left(u_0^{\pm}\right)^2\mathrm{d}x-\frac{\lambda}{2T^2}g'\left(\frac{\|u_0\|^2}{T^2}\right)\int_\Omega \phi_{u_0}u_0^2\mathrm{d}x\int_\Omega\left(\nabla u_0^{\pm}\right)^2\mathrm{d}x\end{aligned}$$

因此，$\left\langle J'_{\lambda,T}\left(u_0\right),u_0^{+}\right\rangle=\left\langle J'_{\lambda,T}\left(u_0\right),u_0^{-}\right\rangle$。

根据 1) 中的结论，对于 $\forall\lambda\in\left(0,\frac{1}{4T^2C_1S_p^{-1}}\right)$，可得到 $\lim_{n\to\infty}\left\|u_n^{\pm}\right\|^2=\left\|u_0^{\pm}\right\|^2\ge\mu>0$，即 $u_0^{\pm}\ne 0$。因此，$u_0\in\mathcal{M}_{\lambda,T}$。所以，对于 $\forall\lambda\in\left(0,\frac{1}{4T^2C_1S_p^{-1}}\right)$，集合 $\mathcal{M}_{\lambda,T}$ 是闭的。

引理 2.4. 存在 $\Lambda_1>0$ 和序列 $\{u_n\}\subset M_{\lambda,T}$ 使得对于任意的 $\lambda\in(0,\Lambda_1)$ 有

$$J_{\lambda,T}\left(u_n\right)\to m_{\lambda,T}\text{ 和 }J'_{\lambda,T}\left(u_n\right)\to 0\text{。}$$

证明： 根据引理 2.2 和 2.3，对于 $\forall\lambda\in\left(0,\frac{1}{4T^2C_1S_p^{-1}}\right)$，使用 Ekeland 变分原理得到极小化序列 $\{u_n\}\subset M_{\lambda,T}$ 满足 $m_{\lambda,T}\le J'_{\lambda,T}\left(u_n\right)<m_{\lambda,T}+\frac{1}{n}$，且对任意的 $v\in\mathcal{M}_{\lambda,T}$ 有 $J_{\lambda,T}(v)\ge J_{\lambda,T}\left(u_n\right)-\frac{1}{n}\left\|u_n-n\right\|$。显然，$\{u_n\}$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中 $\{u_n\}$ 有界。

如果我们证明了 $J'_{\lambda,T}\left(u_n\right)\to 0$，则引理 2.4 证明结束. 为了完成证明，对于任意固定的 $\varphi\in C^\infty(\Omega)$ 和任意的 $n\in\mathbb{N}$，我们考察如下 C^1 泛函 $f_n^{\pm}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$，

$$f_n^{\pm}(r,k,l)=\left\langle J'_{\lambda,T}\left(u_n+r\varphi+ku_n^{+}+lu_n^{-}\right),\left(u_n+r\varphi+ku_n^{+}+lu_n^{-}\right)^{\pm}\right\rangle.$$

令 $v_n = u_n + r\varphi + ku_n^+ + lu_n^-$，则

$$f_n^{\pm}(r,k,l) = \int_\Omega \left(\nabla (v_n)^{\pm}\right)^2 \mathrm{d}x - \int_\Omega \left((v_n)^{\pm}\right)^p \mathrm{d}x - \lambda G_T(v_n)\int_\Omega \phi_{v_n}\left((v_n)^{\pm}\right)^2 \mathrm{d}x$$
$$-\frac{\lambda\left\|(v_n)^{\pm}\right\|^2}{2T^2} g'\left(\frac{\|v_n\|^2}{T^2}\right)\int_\Omega \phi_{v_n}(v_n)^2 \mathrm{d}x.$$

由于 $\left\langle J'_{\lambda,T}(u_n),(u_n)^{\pm}\right\rangle = 0$，我们可得到 $f_n^{\pm}(0,0,0)=0$。此外，有

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_n^+(0,0,0)}{\partial k} &= -4\lambda g'\left(\frac{\|u_n\|^2}{T^2}\right)\frac{\|u_n^+\|^2}{T^2}\int_\Omega \phi_{u_n}(u_n^+)^2 \mathrm{d}x - 2\lambda G_T(u_n)\int_\Omega \phi_{u_n^+}(u_n^+)^2 \mathrm{d}x \\ &\quad -\lambda g''\left(\frac{\|u_n\|^2}{T^2}\right)\left(\frac{\|u_n^+\|^2}{T^2}\right)^2 \int_\Omega \phi_{u_n} u_n^2 \mathrm{d}x - (p-2)\int_\Omega |u_n^+|^p \mathrm{d}x,\end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_n^-(0,0,0)}{\partial l} &= -4\lambda g'\left(\frac{\|u_n\|^2}{T^2}\right)\frac{\|u_n^-\|^2}{T^2}\int_\Omega \phi_{u_n}(u_n^-)^2 \mathrm{d}x - 2\lambda G_T(u_n)\int_\Omega \phi_{u_n^-}(u_n^-)^2 \mathrm{d}x \\ &\quad -\lambda g''\left(\frac{\|u_n\|^2}{T^2}\right)\left(\frac{\|u_n^-\|^2}{T^2}\right)^2 \int_\Omega \phi_{u_n} u_n^2 \mathrm{d}x - (p-2)\int_\Omega |u_n^-|^p \mathrm{d}x,\end{aligned} \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_n^-(0,0,0)}{\partial k} &= -2\lambda g'\left(\frac{\|u_n\|^2}{T^2}\right)\frac{\|u_n^-\|^2}{T^2}\int_\Omega \phi_{u_n}(u_n^+)^2 \mathrm{d}x - 2\lambda g'\left(\frac{\|u_n\|^2}{T^2}\right)\frac{\|u_n^+\|^2}{T^2}\int_\Omega \phi_{u_n}(u_n^-)^2 \mathrm{d}x \\ &\quad -2\lambda G_T(u_n)\int_\Omega \phi_{u_n^+}(u_n^-)^2 \mathrm{d}x - \lambda g''\left(\frac{\|u_n\|^2}{T^2}\right)\frac{\|u_n^+\|^2}{T^2}\frac{\|u_n^-\|^2}{T^2}\int_\Omega \phi_{u_n} u_n^2 \mathrm{d}x,\end{aligned} \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_n^+(0,0,0)}{\partial l} &= -2\lambda g'\left(\frac{\|u_n\|^2}{T^2}\right)\frac{\|u_n^+\|^2}{T^2}\int_\Omega \phi_{u_n}(u_n^-)^2 \mathrm{d}x - 2\lambda g'\left(\frac{\|u_n\|^2}{T^2}\right)\frac{\|u_n^-\|^2}{T^2}\int_\Omega \phi_{u_n}(u_n^+)^2 \mathrm{d}x \\ &\quad -2\lambda G_T(u_n)\int_\Omega \phi_{u_n^-}(u_n^+)^2 \mathrm{d}x - \lambda g''\left(\frac{\|u_n\|^2}{T^2}\right)\frac{\|u_n^+\|^2}{T^2}\frac{\|u_n^-\|^2}{T^2}\int_\Omega \phi_{u_n} u_n^2 \mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{2.8}$$

根据引理 2.3 的 1)，对于任意的 $\lambda < \min\left\{\frac{1}{4T^2C_1S_p^{-1}}, \frac{\mu^2}{8T^2C_1S_p^{-1}}\right\}$，可得到

$$\begin{aligned}\int_\Omega |u_n^{\pm}|^p \mathrm{d}x &= \|u_n^{\pm}\|^2 - \lambda G_T(u_n)\int_\Omega \phi_{u_n}(u_n^{\pm})^2 \mathrm{d}x - \frac{\lambda}{2T^2} g'\left(\frac{\|u_n\|^2}{T^2}\right)\int_\Omega \phi_{u_n} u_n^2 \mathrm{d}x \int_\Omega (\nabla u_n^{\pm})^2 \mathrm{d}x \\ &\geq \int_\Omega |u_n^{\pm}|^p \mathrm{d}x = \|u_n^{\pm}\|^2 - \lambda G_T(u_n)\int_\Omega \phi_{u_n}(u_n^{\pm})^2 \mathrm{d}x \\ &\geq \mu^2 - \lambda C_1 S_p^{-1} G_T(u_n)\|u_n\|^2 \|u_n^{\pm}\|^2 \geq \mu^2 - 4\lambda C_1 S_p^{-1} T^4 \geq \frac{\mu^2}{2}\end{aligned} \tag{2.9}$$

结合(2.5)~(2.9)和 $\{u_n\}$ 的有界性，取充分小的 $\Lambda_1 > 0$，使得对于任意的 $\lambda \in (0,\Lambda_1)\left(\Lambda_1 < \min\left\{\frac{1}{4T^2C_1S_P^{-1}}, \frac{\mu^2}{8T^2C_1S_P^{-1}}\right\}\right)$ 有

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_n^+(0,0,0)}{\partial k} & \frac{\partial f_n^+(0,0,0)}{\partial l} \\ \frac{\partial f_n^-(0,0,0)}{\partial k} & \frac{\partial f_n^-(0,0,0)}{\partial l} \end{vmatrix} \geq \frac{(p-2)^2}{2}\int_\Omega |u_n^+|^p \mathrm{d}x \int_\Omega |u_n^-|^p \mathrm{d}x \geq \frac{(p-2)^2 \mu^4}{8} > 0.$$

因此，根据隐函数定理得到 $r_n > 0$ 且两个一阶可导泛函 $k_n, l_n : (-r_n, r_n) \to \mathbb{R}$，使得 $k_n(0) = l_n(0) = 0$ 和

$$f_n^{\pm}(r, k_n(r), l_n(r)) = 0, \quad \forall r \in (-r_n, r_n). \tag{2.10}$$

即 $u_n + r\varphi + k_n(r)u_n^+ + l_n(r)u_n^- \in \mathcal{M}_{\lambda,T}$， $\forall r \in (-r_n, r_n)$。

令 $w_n = u_n + r\varphi + k_n(r)u_n^+ + l_n(r)u_n^-$，则

$$J_{\lambda,T}(u_n + w_n) - J_{\lambda,T}(u_n) \geq -\frac{1}{n}\|w_n\|, \quad \forall r \in (-r_n, r_n). \tag{2.11}$$

根据泰勒展开式，$\langle J'_{\lambda,T}(u_n), (u_n)^{\pm} \rangle = 0$，从而有

$$J_{\lambda,T}(u_n + w_n) - J_{\lambda,T}(u_n) = \langle J'_{\lambda,T}(u_n), w_n \rangle + o(\|w_n\|) = r\langle J'_{\lambda,T}(u_n), \varphi \rangle + o(\|w_n\|).$$

根据(2.11)，则

$$\langle J'_{\lambda,T}(u_n), \varphi \rangle + \frac{o(\|w_n\|)}{r} \geq -\frac{1}{n}\|\varphi\| - \frac{1}{n}\left\| \frac{k_n(r)}{r}u_n^+ + \frac{l_n(r)}{r}u_n^- \right\|. \tag{2.12}$$

结合(2.5)，(2.9)和 $\{u_n\}$ 的有界性，我们容易得到存在 $C_2 > 0$ 使得对于任意的 $\lambda \in (0, \Lambda_1)$，有 $|k_n'(0)| = \left| \frac{(\partial f_n^+)/(\partial r)(0,0,0)}{(\partial f_n^+)/(\partial k)(0,0,0)} \right| \leq C\|\varphi\| \leq C_1$。类似地，我们可得到对于任意的 $C_3 > 0$ 有 $|l_n'(0)| \leq C_3$。

下面固定 n，令(2.12)中的 $r \to 0$，可得到 $\langle J'_{\lambda,T}(u_n), \varphi \rangle \geq -\frac{1}{n}\|\varphi\| - \frac{C_3}{n}$。

因此，$\|J'_{\lambda,T}(u_n)\| \leq \frac{C_4}{n}$。所以 $J'_{\lambda,T} \to 0$。这样我们完成了引理 2.4 的证明。

根据引理 2.2 和引理 2.3，我们得到 $m_{\lambda,T} > 0$。

引理 2.5. 如果 $\lambda \in \left(0, \frac{1}{4T^2 C_1 S_p^{-1}}\right)$，则 $J_{\lambda,T}$ 满足 $(PS)_{m_{\lambda,T}}$ 条件。

证明： 令 $\{u_n\} \subset H_0^1(\Omega)$ 且是 $J_{\lambda,T}$ 的 $(PS)_c$ 序列，即

$$\lim_{n\to\infty} J_{\lambda,T}(u_n) = m_{\lambda,T}, \quad \lim_{n\to\infty} J'_{\lambda,T}(u_n) = 0. \tag{2.13}$$

根据引理 2.2 可得到 $\{u_n\}$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中是有界的，因此，存在 $u \in H_0^1(\Omega)$ 满足

$$\begin{cases} u_n \rightharpoonup u, & \text{in } H_0^1(\Omega) \\ u_n \to u, & \text{in } L^r(\Omega) \ , \ 2 \leq r < 2^*. \\ u_n \to u, & a.e. \text{ in } \Omega \end{cases} \tag{2.14}$$

根据(2.13)和(2.14)，对于足够大的 n，我们有

$$\begin{aligned} o(1) &= \langle J'_{\lambda,T}(u_n), u_n - u \rangle \\ &= \int_\Omega \nabla u_n \nabla(u_n - u)\mathrm{d}x - \lambda G_T(u_n)\int_\Omega \phi_{u_n} u_n (u_n - u)\mathrm{d}x \\ &\quad - \frac{\lambda}{2T^2} g'\left(\frac{\|u_n\|^2}{T^2}\right)\int_\Omega \phi_{u_n} u_n^2 \mathrm{d}x \int_\Omega \nabla u_n \nabla(u_n - u)\mathrm{d}x + o(1). \end{aligned} \tag{2.15}$$

对于任意的$\lambda\in\left(0,\dfrac{1}{4T^2C_1S_p^{-1}}\right)$，也可得到

$$\begin{aligned}&\int_\Omega\nabla u_n\nabla(u_n-u)\mathrm{d}x-\lambda G_T(u_n)\int_\Omega\phi_{u_n}u_n(u_n-u)\mathrm{d}x-\frac{\lambda}{2T^2}g'\left(\frac{\|u_n\|^2}{T^2}\right)\int_\Omega\phi_{u_n}u_n^2\mathrm{d}x\int_\Omega\nabla u_n\nabla(u_n-u)\mathrm{d}x\\&\geq\int_\Omega\nabla u_n\nabla(u_n-u)\mathrm{d}x-\lambda C_1G_T(u_n)\|u_n\|^2\int_\Omega u_n(u_n-u)\mathrm{d}x\\&=\int_\Omega\nabla u_n\nabla(u_n-u)\mathrm{d}x+o(1).\end{aligned}$$

因此，根据(2.15)可得$\int_\Omega\nabla u_n\nabla(u_n-u)\mathrm{d}x\to 0$，即$\|u_n\|\to\|u\|$。又$\{u_n\}$在$H_0^1(\Omega)$中弱收敛，便可得$u_n\to u$。

引理2.6. 取引理2.4中的Λ_1，则对于任意的$\lambda\in(0,\Lambda_1)$，存在$u_*\in H_0^1(\Omega)$使得$m_{\lambda,T}$在u_*处可达，且u_*是泛函$J_{\lambda,T}$的变号临界点。

证明：根据引理2.4，存在极小化序列$\{u_n\}\subset\mathcal{M}_{\lambda,T}$使得对于$\lambda\in(0,\Lambda_1)$，有

$$J_{\lambda,T}(u_n)\to m_{\lambda,T}\text{ 和 }J'_{\lambda,T}(u_n)\to 0\text{。}$$

根据引理 2.5，存在$u_*\in H_0^1(\Omega)$使得在$H_0^1(\Omega)$中，$u_n\to u_*$。结合引理 2.3，可得到$u_*\in\mathcal{M}_{\lambda,T}$，$J_{\lambda,T}(u_*)=m_{\lambda,T}$，$J'_{\lambda,T}(u_n)=0$，即$u_*$是$J_{\lambda,T}$的变号临界点且$J_{\lambda,T}(u_*)=m_{\lambda,T}$。

引理2.7. 令u_*是引理2.6中泛函$J_{\lambda,T}$的变号临界点，则当T足够大时，存在$\tilde{\Lambda}_1=\tilde{\Lambda}_1(T)$使得对于任意的$\lambda\in(0,\tilde{\Lambda}_1)$有$\|u_*\|<T$。

证明：定义泛函$\varphi_0\in C_0^\infty(\Omega)$，$\varphi_0^\pm\neq 0$. 根据引理2.1，存在$\Lambda_{\varphi_0}>0$且$\left(t_{\varphi_0}(\lambda),s_{\varphi_0}(\lambda)\right)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+$使得$\bar{\varphi}_0=t_{\varphi_0}(\lambda)\varphi_0^++s_{\varphi_0}(\lambda)\varphi_0^-\in\mathcal{M}_{\lambda,T}$成立，此处的$\lambda\in(0,\Lambda_{\varphi_0})$。则可得到

$$\begin{aligned}m_{\lambda,T}\leq J_{\lambda,T}(\bar{\varphi}_0)&=\frac{1}{2}\|\bar{\varphi}_0\|^2-\frac{\lambda}{4}G_T(\bar{\varphi}_0)\int_\Omega\phi_{\bar{\varphi}_0}(\bar{\varphi}_0)^2\mathrm{d}x-\frac{1}{p}\int_\Omega|\bar{\varphi}_0|^p\mathrm{d}x\\&\leq\frac{t_{\varphi_0}^2(\lambda)}{2}\|\varphi_0^+\|^2+\frac{s_{\varphi_0}^2(\lambda)}{2}\|\varphi_0^-\|^2-\frac{t_{\varphi 0}^p(\lambda)}{p}\int_\Omega|\varphi_0^+|^p\mathrm{d}x-\frac{s_{\varphi 0}^p(\lambda)}{p}\int_\Omega|\varphi_0^-|^p\mathrm{d}x\\&\leq\max_{t\geq 0}\left\{\frac{t^2}{2}\|\varphi_0^+\|^2-\frac{t^p}{p}\int_\Omega|\varphi_0^+|^p\mathrm{d}x\right\}+\max_{s\geq 0}\left\{\frac{s^2}{2}\|\varphi_0^-\|^2-\frac{s^p}{p}\int_\Omega|\varphi_0^-|^p\mathrm{d}x\right\}=\theta.\end{aligned}\tag{2.16}$$

此处θ是一个常数，独立于λ，T。下面将对p分两种情况进行讨论：

情况一：$2<p<4$时，在此情况下，与引理2.2的证明类似，由$J'_{\lambda,T}(u_*)=0$得

$$J_{\lambda,T}(u_*)\geq\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)\|u_*\|^2-\frac{8\lambda c}{p}T^4.\tag{2.17}$$

假设$\|u_*\|\geq T$，则根据(2.16)，(2.17)得

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)T^2\leq\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)\|u_*\|^2\leq J_{\lambda,T}(u_*)+\frac{8\lambda c}{p}T^4=m_{\lambda,T}+\frac{8\lambda c}{p}T^4\leq\theta+\frac{8\lambda c}{p}T^4.$$

当T足够大和$\lambda<\dfrac{\mu^2}{8T^4C_1S_p^{-1}}$时，得出矛盾。

情况二：$4\leq p<2^*$时，与引理2.2证明相同，根据$J'_{\lambda,T}(u_*)=0$，可得$J_{\lambda,T}(u_*)\geq\dfrac{1}{4}\|u_*\|^2-2\lambda CT^4$。因此，对于足够大的$T$，当$\lambda<\dfrac{\mu^2}{8T^4C_1S_p^{-1}}$时，得到与情况一相同的结论。这与假设是矛盾的。所以，令

$\tilde{\Lambda}_1 = \min\left\{\Lambda_1, \Lambda_{\varphi_0}\right\}$，当 $\Lambda_1 < \dfrac{\mu^2}{8T^4 C_1 S_p^{-1}}$ 时结论成立。

3. 主要结果的证明

定理 1.1 将分三步来进行证明：

第一步：存在 $\Lambda_* > 0$ 使得对于任意的 $\lambda \in (0, \Lambda_*)$，系统(1.1)有基态变号解。

取引理 2.7 中的 T，$\tilde{\Lambda}_1$，根据引理 2.6 和 2.7 我们可得到 u_* 是 $J_{\lambda,T}$ 的变号临界点且满足 $J_{\lambda,T}(u_*) = m_{\lambda,T}$ 和 $\|u_*\| < T$。再结合 $J_{\lambda,T}(u_*) = J_\lambda(u_*)$ 得 u_* 是 J_λ 的变号临界点且满足 $J_\lambda(u_*) = m_{\lambda,T}$。为了证明我们的结论，需要研究下面的极小化问题。令

$$\bar{m}_\lambda = \inf\left\{J_\lambda(u) : u \in \bar{M}_\lambda\right\}，此处\ \bar{M}_\lambda = \left\{u \in H_0^1(\Omega) : u^\pm \neq 0, J'_\lambda(u) = 0\right\}。$$

显然，$\bar{M}_\lambda$ 中包含系统(1.1)的所有变号解。因此，J_λ 在 $\bar{M}_\lambda$ 中的极小元就是系统(1.1)的基态变号解。

由于 $u_* \in \bar{M}_\lambda$，所以 $\bar{M}_\lambda \neq \varnothing$。因此，存在极小化序列 $u_n \subset \bar{M}_\lambda$ 满足 $J_\lambda(u_n) \to \bar{m}_\lambda$，$J'_\lambda(u_n) \to 0$。通过与引理 2.2 类似的讨论，易得 J_λ 在 $\bar{M}_\lambda$ 中是强制的和下方有界的。由强制性可得 $\{u_n\}$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中是有界的。因此，存在常数 $C_* > 0$ 使得对于任意的 $n \in \mathbb{N}$ 有 $\|u_n\|^2 \le C_*$ 成立。应用于引理 2.5 类似的讨论，可得到对于 $\lambda \in \left(0, \dfrac{1}{2C_* C_1 S_p^{-1}}\right)$，$\{u_n\}$ 有收敛子列，此处收敛的子序列仍然用 $\{u_n\}$ 来表示。因此，我们不妨假设在 $H_0^1(\Omega)$ 中，存在 $u_\lambda \in H_0^1(\Omega)$ 使得 $u_n \to u_\lambda$，从而得到 $J_\lambda(u_\lambda) = \bar{m}_\lambda$，$J'_\lambda(u_\lambda) = 0$。根据 $\left\langle J'_\lambda(u_n), u_n^\pm\right\rangle = 0$，则

$$\|u_n^\pm\|^2 - \lambda\int_\Omega \phi_{u_n}\left(u_n^\pm\right)^2 \mathrm{d}x = \int_\Omega |u_n^\pm|^p \mathrm{d}x \le S_p^{-\frac{p}{2}} \|u_n^\pm\|^p。$$

由于 $\lambda \in \left(0, \dfrac{1}{2C_* C_1 S_p^{-1}}\right)$，可得到

$$0 < \frac{1}{2} \le 1 - \lambda C_* C_1 S_p^{-1} \le 1 - \lambda\int_\Omega \phi_{u_n}\left(u_n^\pm\right)^2 \mathrm{d}x \le S_p^{-\frac{p}{2}} \|u_n^\pm\|^{p-2},$$

即 $u_\lambda^\pm \neq 0$。因此，我们得到 $u_\lambda \in \bar{M}_\lambda$ 且 $J_\lambda(u_\lambda) = \bar{m}_\lambda$，即 u_λ 是系统(1.1)的基态变号解。综上，取 $\Lambda_* = \min\left\{\dfrac{1}{2C_* C_1 S_p^{-1}}, \tilde{\Lambda}_1\right\}$，当 $\lambda \in (0, \Lambda_*)$ 时系统(1.1)存在基态变号解。

第二步：系统(1.1)存在基态解。考虑下面的极小化问题

$$c_\lambda = \inf\left\{J_\lambda(u) : u \in \mathcal{N}_\lambda\right\}，此处\ \mathcal{N}_\lambda = \left\{u \in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\} : \left\langle J'_\lambda(u), u\right\rangle = 0\right\}。$$

对于任意的 $u \in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}$，容易得到存在唯一的 $t(u)$ 使得 $t(u)u \in \mathcal{N}_\lambda$。另外，很容易得到 $J_\lambda(u)$ 在 $\mathcal{N}_\lambda$ 是强制下方有界的且对于任意的 $u \in \mathcal{N}_\lambda$ 有 $\|u\|^2 \ge C_4 > 0$。

与第一步的讨论类似，我们可证明存在 $v_\lambda \in \mathcal{N}_\lambda$ 使得 $J_\lambda(v_\lambda) = c_\lambda$，$J'_\lambda(v_\lambda) = 0$，即 v_λ 是系统(1.1)的基态解。

第三步：$c_\lambda < \bar{m}_\lambda$。根据第一步，可得到系统(1.1)存在基态变号解 u_λ。而且存在唯一的 $t(u_\lambda^+)$ 使得 $t(u_\lambda^+)u_\lambda^+ \in \mathcal{N}_\lambda$。从而根据推论 2.1 可得到

$$c_\lambda = J_\lambda(v_\lambda) \le J_\lambda\left(t(u_\lambda^+)u_\lambda^+\right) = J_\lambda\left(t(u_\lambda^+)u_\lambda^+ + 0\right) < J_\lambda\left(u_\lambda^+ + u_\lambda^-\right) = \bar{m}_\lambda。$$

参考文献

[1] Alves, C.O. and Souto, M.A.S. (2014) Existence of Least Energy Nodal Solution for a Schrödinger-Poisson System in Bounded Domains. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*, **65**, 1153-1166. https://doi.org/10.1007/s00033-013-0376-3

[2] Alves, C.O., Souto, M.A.S. and Soares, S.H.M. (2017) A Sign-Changing Solution for the Schrödinger-Poisson Equation in $\mathbb{R}^3$. *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, **47**, 1-25. https://doi.org/10.1216/RMJ-2017-47-1-1

[3] Chen, S. and Tang, X. (2016) Ground State Sign-Changing Solutions for a Class of Schrödinger-Poisson Type Problems in $\mathbb{R}^3$. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*, **67**, Article No. 102, 18 p. https://doi.org/10.1007/s00033-016-0695-2

[4] Huang, L., Rocha, E.M. and Chen, J. (2013) Positive and Sign-Changing Solutions of a Schrödinger-Poisson System Involving a Critical Nonlinearity. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **408**, 55-69. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2013.05.071

[5] Liu, Z., Wang, Z. and Zhang, J. (2016) Infinitely Many Sign-Changing Solutions for the Nonlinear Schrödinger-Poisson System. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, **195**, 775-794. https://doi.org/10.1007/s10231-015-0489-8

[6] Shuai, W. and Wang, Q. (2015) Existence and Asymptotic Behavior of Sign-Changing Solutions for the Nonlinear Schrödinger-Poisson System in $\mathbb{R}^3$. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*, **66**, 3267-3282. https://doi.org/10.1007/s00033-015-0571-5

[7] Wang, D.B., Zhang, H. and Guan, W. (2019) Existence of Least-Energy Sign-Changing Solutions for Schrödinger-Poisson System with Critical Growth. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **479**, 2284-2301. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2019.07.052

[8] Wang, D.B., Zhang. H., Ma, Y., *et al*. (2019) Ground State Sign-Changing Solutions for a Class of Nonlinear Fractional Schrödinger-Poisson System with Potential Vanishing at Infinity. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, **61**, 611-634. https://doi.org/10.1007/s12190-019-01265-y

[9] Wang, Z. and Zhou, H. (2015) Sign-Changing Solutions for the Nonlinear Schrödinger-Poisson System in $\mathbb{R}^3$. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, **52**, 927-943. https://doi.org/10.1007/s00526-014-0738-5

[10] Zhong, X.J. and Tang, C.L. (2018) Ground State Sign-Changing Solutions for a Schrödinger-Poisson System with a Critical Nonlinearity in $\mathbb{R}^3$. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, **39**, 166-184. https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2017.06.014

[11] Qian, X.T. (2021) Ground State Sign-Changing Solutions for a Class of Nonlocal Problem. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **495**, Article ID: 124753. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2020.124753