

线性规划在债券组合投资中的应用

张必慧

华北电力大学, 北京
Email: 1415434005@qq.com

收稿日期: 2021年6月7日; 录用日期: 2021年6月28日; 发布日期: 2021年7月12日

摘 要

线性规划是运筹学中的一个重要的分支, 线性规划模型应用广泛, 在经济管理、交通运输、军事指挥、工农业生产等活动中起着重要作用; 求解方法比较成熟, 专门用于求解规划问题的软件LINGO功能强大, 能够求解线性和非线性问题, 且模型语言表述简单、直观方便, 能够快速、方便、有效的构建和求解线性, 非线性最优化模型。运用线性规划模型求解问题可以在一定条件限制下, 合理科学地制定决策, 使达到最优决策。本文主要以用线性规划方法求解一个实际问题, 来展示线性规划方法在债券投资组合方面的应用。

关键词

线性规划, 债券投资组合, LINGO

Application of Linear Programming in Bond Portfolio Investment

Bihui Zhang

North China Electric Power University, Beijing
Email: 1415434005@qq.com

Received: Jun. 7th, 2021; accepted: Jun. 28th, 2021; published: Jul. 12th, 2021

Abstract

Linear programming is an important branch of operations research. Linear programming model is widely used and plays an important role in economic management, transportation, military command, industrial and agricultural production. The solution method is relatively mature. Lingo, a software specially used for solving planning problems, has powerful functions and can solve linear

and nonlinear problems. The model language is simple, intuitive and convenient. It can quickly, conveniently and effectively construct and solve linear and nonlinear optimization models. Using the linear programming model to solve the problem can make the decision reasonably and scientifically under certain conditions, so as to achieve the optimal decision. This paper mainly uses linear programming method to solve a practical problem, to show the application of linear programming method in bond portfolio.

Keywords

Linear Programming, Bond Portfolio, LINGO

Copyright © 2021 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

线性规划[1]是运筹学中的一个重要分支,常结合数学模型[2]进行实践应用,可以在节省人力、物力等各种资源的情况下制定出最优方案,因此广泛应用于工程技术[3]、经济管理[4]、军事作战[5]等方面。在经济管理方面,债券投资[6]组合是一个重要的问题,许多研究人员采用不同的理论和方法对投资组合进行分析,下面将通过一个实际问题来研究线性规划在债券组合投资中的应用。

现计划在 2050 年前(含 2050 年)捐助一笔经费,并希望通过将现有的 8000 万美元资金进行债券投资来增加捐助金额,投资要求为:① 医药健康债券购买金额不得少于债券购买总金额的 20%,其余每个行业的债券购买总金额不得少于债券购买总金额的 10%;② 所购债券的平均风险等级不得低于 2.5,等级数字越大,风险越低;③ 要求所购买的债券的平均到期年限不超过 10 年;④ 要求捐助活动结束后 FFE 继续保留 8000 万美元资金。要求在可以进行重复投资的条件下,拟定一个 2021~2049 年的债券投资方案,使 2050 年末的一次性捐款金额达到最大。已知在 2021~2049 年每年初发行债券,并于每年末兑现,兑现有效截止时间为 2050 年,债券其他相关信息如下表(见表 1):

Table 1. Various bonds and their attributes

表 1. 各类债券及其属性

债券领域	风险等级	地方政府税率(%)	到期年限	到期税前总收益(%)
医药健康	5	0	2	4.45
			9	39.89
			20	232.11
交通运输	2	20	3	8.0
			12	58.27
			25	300.54
科技研发	4	0	4	12.55
			15	180.09
			20	232.11

Continued

			4	12.55
装备制造	3	10	9	39.89
			18	206.12
国民福利	1	30	2	4.45
			5	18.77
			18	206.12

2. 模型的建立与求解

通过将现实生活中我们关心，研究的实际问题进行信息提炼、简化假设，再运用数学工具构造出的原型替代物叫做数学模型。规划问题的数学模型包含决策变量、目标函数、约束条件三个组成要素。如果在规划问题中，决策变量为连续变量，目标函数和约束条件都是线性的，那么这个问题就是线性规划问题。线性规划问题的标准形式为

$$\begin{aligned} \max z &= \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{s.t.} &\begin{cases} \sum_{j=1}^n c_j x_j = b_i, & i=1, \dots, m \\ x_j \geq 0, & j=1, \dots, n \end{cases} \end{aligned}$$

在标准形式的线性规划模型中，目标函数为求极大值，约束条件全是等式， b_i 为非负值， x_j 取值也为非负。在求解线性规划问题时，要先将问题化为标准形式的线性规划问题，再进行求解。

由题目我们知道在 2021~2049 年间可以进行重复投资，但是要保证在 2050 年末将所有的投资项目的本金与利息都收回，且所有投资应满足 FFE 的投资标准。要使得 2050 年末的一次性捐款金额达到最大，这是一个单目标规划问题。

基本假设与符号说明：

基本假设：

- 1) 假设单张债券金额无限小；
- 2) 假设地方政府税率，债券收益率，风险等级[7]未来 30 年内保持不变；
- 3) 假设 2020~2050 年之间 FFE 进行的每笔债券投资都不中途转让或终止，都将持有至债券到期；
- 4) 假设投资时五种债券之间不存在相互影响，且可以重复投资的前提下，任何一种债券到期后获得的收益都可用于以后的投资。

符号说明：

将题目中表 1 给出的 15 种债券类型从上至下按顺序记为债券 1 到债券 15。

$$i = 1, 2, \dots, 30; j = 1, 2, \dots, 15$$

Table 2. 符号说明

表 2. Symbol description

$x(i, j)$ 第 i 年年初投资债券 j 的资金	$m(j)$ 投资给债券 j 的总投资额
$p(d, j)$ 第 d 年投资给债券 j ，第 $i-1$ 年年末到期收到的本息	$\text{rest}(i)$ 第 i 年年初未支出的资金(即未投资也未捐助)
$\text{start}(i)$ 第 i 年年初可支配的资金	$n30$ 年来的总投资额
y 捐助资金	$\text{risk}(j)$ 投资债券 j 的风险
$\text{nian}(j)$ 债券 j 的到期年限	$\text{shui}(j)$ 债券 j 的地方政府税率

其他符号说明见表 2。

模型的建立

目标函数: $\max y$

约束条件:

因为医药健康债券购买金额不得少于债券购买总金额的 20%，其余每个行业债券购买金额不得少于总金额的 10%，故

$$\begin{cases} m(1) + m(2) + m(3) \geq 0.2n \\ m(4) + m(5) + m(6) \geq 0.1n \\ m(7) + m(8) + m(9) \geq 0.1n \\ m(10) + m(11) + m(12) \geq 0.1n \\ m(13) + m(14) + m(15) \geq 0.1n \end{cases}$$

因为所购债券的平均风险等级不得低于 2.5，故 $\sum_{j=1}^{15} m(j) * risk(j) \geq 2.5n$ ；因为要求所购买的债券的平均到期年限不超过 10 年，故 $\sum_{j=1}^{15} m(j) * nian(j) \leq 10n$ ；因为要求捐助活动结束后 FFE 继续保留 8000 万美元资金，故 $start(30) + \sum_{j=1}^{15} p(d, j) - y \geq 8000$ ；综上所述，得问题的单目标线性规划模型如下：

$$\begin{aligned} & \max y \\ & s.t. \begin{cases} m(1) + m(2) + m(3) \geq 0.2n \\ m(4) + m(5) + m(6) \geq 0.1n \\ m(7) + m(8) + m(9) \geq 0.1n \\ m(10) + m(11) + m(12) \geq 0.1n \\ m(13) + m(14) + m(15) \geq 0.1n \\ \sum_{j=1}^{15} m(j) * risk(j) \geq 2.5n \\ \sum_{j=1}^{15} m(j) * nian(j) \leq 10n \\ start(30) + \sum_{j=1}^{15} p(d, j) - y \geq 8000 \end{cases} \end{aligned}$$

求解结果:

Table 3. Investment project, investment fund and year

表 3. 投资项目、投资资金及年份

债券领域	到期年限(年)	购买年份	购买金额(万美元)
医药健康	2	第 20 年(2040)	2918.551
		第 22 年(2042)	3010.494
		第 24 年(2044)	4660.855
	9	无	0
		20	无
交通运输	3	第 20 年(2040)	95.56955
		第 22 年(2042)	37.93306
		第 23 年(2043)	101.686
		第 25 年(2045)	40.36077
		第 26 年(2046)	4976.457
	第 28 年(2048)	42.94386	
	12	无	0
25	无	0	

Continued

	4	无	0
科技研发	15	第 1 年(2021)	8000
		第 16 年(2036)	18474.75
	20	无	0
装备制造		第 16 年(2036)	3932.45
	4	第 20 年(2040)	1362.5
	9	无	0
	18	无	0
国民福利	2	第 29 年(2049)	5294.95
	5	无	0
	18	无	0

运用 lingo [8]求模型的最优解，得到投资方案如表 3。

由上表投资方案知：2050 年末的一次性捐款金额最大为 49,251.51 万美元。30 年内的总投资金额为 52,949.5 万美元，具体投资方案为：在第一年年初投资到期年限为 15 年的科技研发债券 8000 万美元；第 16 年年初投资到期年限为 15 年的科技研发债券 18,474.75 万美元到期年限为 4 年的装备制造债券 3932.45 万美元；第 20 年年初投资到期年限为 4 年的装备制造债券 1362.5 万美元，到期年限为 3 年的交通运输债券 95.56955 万美元，到期年限为 2 年的医药健康债券 2918.551 万美元；第 22 年年初投资到期年限为 2 年的医药健康债券 3010.494 万美元，到期年限为 3 年的交通运输债券 37.93306 万美元；第 23 年投资到期年限为 3 年的交通运输债券 101.686 万美元；第 24 年投资到期年限为 2 年的医药健康债券 4660.855 万美元；第 25 年投资到期年限为 3 年的交通运输债券 40.36077 万美元；第 26 年投资到期年限为 3 年的交通运输债券 4976.457 万美元；第 28 年投资到期年限为 3 年的交通运输债券 42.94386 万美元；第 29 年投资到期年限为 2 年的国民福利债券 5294.95 万美元。之后不再进行投资，到 2050 年末能够收回全部本金和利息。

上述投资方案中，在医药健康领域的总投资额为 10,589.9 万美元，约占总投资额的 20%；在交通运输领域的投资金额为 5294.95024 万美元，约占总投资额的 10%；在科技研发领域的投资金额为 26,474.75 万美元，约占总投资额的 50%；在装备制造领域的投资金额为 5294.95 万美元，约占总投资额的 10%；在国民领域的投资金额为 5294.95 万美元，约占总投资额的 10%。且在该投资方案下的平均风险等级为 3.6，平均到期年限约为 8.8 年，少于 10 年，该方案符合所有投资要求。只从各种领域债券的属性表格来看，科技研发领域和医药健康领域的到期后税率为 0，且风险指数大，到期后收益率相对较高，故多购买这两种债券能够取得较多收益，与结果相符。

3. 结论

经济的繁荣和快速发展，使得规划问题在经济领域的应用十分广泛，不只是在债券的组合投资问题中需要运用规划模型对资金、风险、税率等进行统筹安排和控制，在许多其他问题中，如：企业的营销策划[9]、产品的生产计划、采购与库存管理、物流管理、人事管理[10]、城市规划、股市投资[11]等诸多问题中，线性规划及其他规划模型都发挥着重要的作用，为决策提供科学的依据。

本文所讨论的债券组合问题，首先运用线性规划方法设置目标函数和约束条件，可以建立合理的数学模型，且能够方便地求解问题，并比较精确地得到满足约束条件的最优解。但是也有一些问题是线性规划模型所不能求解的，此时我们可以尝试采用运筹学中的其他方法，如动态规划、多目标规划等。其次运用 LINGO 对线性规划问题进行求解，代码简单，操作方便，是非常有效的求解工具。

参考文献

- [1] 胡运权, 等. 运筹学基础及其应用[M]. 第六版. 北京: 高等教育出版社, 2014: 11-49.
- [2] 宗容, 施继红, 尉洪, 李海燕. 数学实验与数学建模[M]. 昆明: 云南大学出版社, 2009.
- [3] 郑文魁, 巫昌斌, 刘德辉. 基于 LINGO 线性规划的土方调配设计[J]. 人民黄河, 2020, 42(S2): 141-143.
- [4] 代大为. 线性规划模型在经济管理中的应用[J]. 牡丹江师范学院学报(自然科学版), 2014(1): 3-4.
- [5] 孟冲, 宋华文, 陈柏松. 基于 0-1 整数线性规划的军事空运装载优化算法[J]. 西南交通大学学报, 2011, 46(3): 500-505.
- [6] 杨友, 谢宇鹏, 李晗, 刘亚利. 基于 LINGO 的债券组合投资方案优化[J]. 河北北方学院学报(自然科学版), 2020, 36(11): 45-49.
- [7] 陈志明, 陈丹彤. 考虑信用风险的债券投资组合优化模型[J]. 征信, 2019, 37(6): 20-26.
- [8] 金晶晶. Lingo 软件在数学建模竞赛中的应用[J]. 十堰职业技术学院学报, 2010, 23(4): 85-88.
- [9] 唐加冕, 周京徽. 线性规划问题在经济生活中的应用[J]. 商业时代, 2011(19): 10-11.
- [10] 潘香林. 运筹学在经济管理中的应用探讨[J]. 营销界, 2020(9): 145-146.
- [11] 李丽丽. 线性规划模型在股市投资中的应用[J]. 黑龙江工程学院学报, 2015, 29(2): 55-58.