Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2021, 10(7), 2348-2352**
Published Online July 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2021.107245

多元齐次多项式插值问题研究

李　雪，聂碧宏，崔利宏

辽宁师范大学数学学院，辽宁　大连
Email: 2491607196@qq.com

收稿日期：2021年6月7日；录用日期：2021年6月28日；发布日期：2021年7月12日

摘　要

本文以代数几何基本理论和方法为基础，研究了多元齐次多项式插值问题。得到了构造多元齐次插值多项式空间及沿多元齐次代数超曲面的插值正则结点组的迭加构造法。基本搞清了多元齐次插值正则结点组的拓扑结构，并给出实验算例对本文所得理论方法进行了验证。

关键词

多元**Lagrange**插值，多元齐次多项式，插值正则结点组

Research on Interpolation of Multivariate Homogeneous Polynomials

Xue Li, Bihong Nie, Lihong Cui

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning
Email: 2491607196@qq.com

Received: Jun. 7th, 2021; accepted: Jun. 28th, 2021; published: Jul. 12th, 2021

Abstract

Based on the basic theory and method of algebraic geometry, this paper studies the problem of multivariate homogeneous polynomial interpolation. In this paper, we obtain the superposition construction method of constructing multivariate homogeneous interpolation polynomial space and interpolation regular node group along multivariate homogeneous algebraic hyper surfaces. The topological structure of the regular node group of multivariate homogeneous interpolation is basically clarified, and an experimental example is given to verify the theoretical method.

文章引用：李雪，聂碧宏，崔利宏．多元齐次多项式插值问题研究[J]．应用数学进展, 2021, 10(7): 2348-2352.
DOI: 10.12677/aam.2021.107245

Keywords

Multivariate Lagrange Interpolation, Multivariate-Homogeneous Polynomials, Interpolation of the Regular Node Group

1. 引言

二元以及多元函数的插值与逼近[1] [2]，是随着电子计算机的广泛应用而活跃起来的一个研究领域，这类问题在有限元问题中，在计算机辅助几何设计中以及在趋势曲面分析等问题中都有着广泛的应用。

2. 基本概念和主要定理

定义1：(多元齐次多项式)若数域 P 上的 s 元多项式的各单项的全次数均为 n，则称该多项式为 s 元 n 次齐次多项式。令 $H_n^{(s)}$ 代表所有定义于数域 P 上的 s 元 n 次多项式构成的集合，即

$$H_n^{(s)}=\left\{\sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_s=n} x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_s^{\alpha_s}\,\middle|\, a_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_s}\in R\right\}$$

则有 $\dim H_n^{(s)}=\binom{n+s-1}{s-1}$

定义2：(多元齐次多项式Lagrange插值问题提法)

令 $d_n^{(s)}=\binom{n+s-1}{s-1}$。$A=\{Q_i\}_{i=1}^{d_n^{(s)}}$ 是 R^s 中的 $d_n^{(s)}$ 个相异点，任意给定一个实数组 $\{f_i\}_{i=1}^{d_n(s)}$，找到一个多项式 $p(x)\in H_n^{(s)}$ 那么这个多项式需要适合以下的插值条件：

$$p(Q_i)=f_i,\ i=1,\cdots,d_n^{(s)} \tag{1}$$

定义3：(多元齐次多项式Lagrange插值定义)假设对于任何一个给定的实数组 $\{f_i\}_{i=1}^{d_n^{(s)}}$，方程组(2.1)总存在唯一一组解，则称该多元齐次插值问题是正则插值问题，而且相对应的插值结点组 $A=\{Q_i\}_{i=1}^{d_n^{(s)}}$ 是对于多元齐次多项式空间 $H_n^{(s)}$ 的一个插值正则结点组。

定义4：(齐次超曲面)若 $h(x)\in H_n^{(s)}$ 是一个 s 元 n 次(非零)齐次多项式，在空间 $R^{(s)}$ 上，形成方程 $h(x)=0$ 的点够成一个全体，记这个全体为与 $h(x)$ 相对应的 n 次齐次代数超曲面，并简称为 n 元齐次代数超曲面[3]。

基本定理：$A=\{Q_i\}_{i=1}^{d_n^{(s)}}$ 是 $H_n^{(s)}$ 的正则插值结点组的充要条件是 A 中任意点不能同时落在 $H_n^{(s)}$ 中任何一个代数超曲面上[4]。

定义5：(沿齐次代数超曲面插值问题)

令

$$d_n^{(s)}(k)=\binom{n+s-1}{s-1}-\binom{n+s-k-1}{s-1} \tag{2}$$

假设 $q(x)=0$ 是一个 k 次齐次元重复分量代数超曲面(其中代数超曲面 $q(x)=0$ 是无重复分量的代数超曲面，假设齐次多项式 $q(x)$ 的分解因式中不存在重数 ≥ 2 的重因子)，代数超曲面 $q(x)=0$ 上的 $d_n^{(s)}(k)$ 个相异点是 $B=\{Q_i\}_{i=1}^{d_n^{(s)}(k)}$，对于一个随意给定的实数组 $\{f_i\}_{i=1}^{d_n^{(s)}(k)}$，找到一个多项式 $h(x)\in H_n^{(s)}$ 使之适应如下的插值条件：

$$h(Q_i)=f_i,\ i=1,2,\cdots,d_n^{(s)}(k) \tag{3}$$

假设对于任意一个给定的实数组 $\{f_i\}_{i=1}^{d_n^{(s)}(k)}$ 方程组(3)总存在一组解，则称结点组 $B=\{Q_i\}_{i=1}^{d_n^{(s)}(k)}$ 为沿 k 次代数超曲面 $h(x)=0$ 的 n 次正则插值结点组，并先简单记为 $B\in I_n^{(s)}(h)$。本文主要结果如下：

定理 1：假设一个齐次正则插值结点组 $A=\{Q_i\}_{i=1}^{d_n^{(s)}}$ 是关于 $H_n^{(s)}$ 的，$B=\{Q_i\}_{i=1}^{d_{n+k}^{(s)}}\in I_{n+k}^{(s)}(h)$，$A\cap B=\varnothing$，则 $C=A\cup B$ 必定构成 $H_{n+k}^{(s)}$ 的齐次正则插值结点组。

定理 2：一个 m 次齐次代数超曲面 $p(x)=0$ 与另一个 k 次齐次代数超曲面 $q(x)=0$ 交于一个流形 $C=S(p,q)$, $A\in I_n^{(s)}(q)$ $B\in I_{n+m}^{(s)}(C)$, $A\cap B=\varnothing$，则 $A\cup B\in I_{n+m}^{(s)}(q)$。

3. 定理的证明

首先给出一个基本引理，

基本引理[5]：$A=\{Q_i\}_{i=1}^{d_n^{(s)}(k)}$ 是一个位于 k 次齐次代数超曲面 $q(x)=0$ 上的点组，沿超曲面 $q(x)=0$ 能够做成 n 次齐次正则插值结点组的充要条件是：对任意一个适合零插值条件 $g(Q_i)=0$，$\forall Q_i\in A$ 的齐次多项式 $g(x)\in H_n^{(s)}$ 来说，至少有一个多项式 $r(x)\in H_{n-k}^{(s)}$ 使得 $g(x)=q(x)r(x)$。

证明：只证必要性

因为 $A=\{Q_i\}_{i=1}^{d_n^{(s)}(k)}\in I_n^{(s)}(q)$，不妨设 $I_1=\langle q\rangle$，$I_2=\langle q\rangle$，而 $g(Q_i)=0$，$\forall Q_i\in A$，由定义 2 知，设曲面 $q(x)=0$ 恒有 $g(x)=0$

则 $V(I_1)\subset V(I_2)$，$I(V(I_1))\supset I(V(I_2))$

由 $I(V(I_1))=\sqrt{I_1}=I_1$，$I(V(I_2))=\sqrt{I_2}\supset I_2$ 有 $I_1\supset I_2$，

所以 $g(x)=q(x)r(x)$。

定理 1 证明：

证明：点组 C 中所包含的点数为 $\binom{n+s-1}{s-1}+\left[\binom{n+k+s-1}{s-1}-\binom{n+k+s-1-k}{s-1}\right]=\binom{n+k+s-1}{s-1}$

这恰好等于 $H_{n+k}^{(s)}$ 的维数。

假设点组 $C=A\cup B$ 不是关于 $H_{n+k}^{(s)}$ 的正则结点组，则由基本定理知，必有不恒为零多 $h_{n+k}(x)\in H_{n+k}(x)$，使得 $h_{n+k(Q_i)}=0$，$\forall Q_i\in C$ 特别地，$h_{n+k}(Q_i)=0,\ \forall Q_i\in B$。

由于 $B\in I_{n+k}^{(s)}(h)$，则由基本引理知，存在 $r(x)\in H_n^{(s)}$，

使得

$$h_{n+k}^{(s)}=q(x)r(x) \tag{4}$$

又因为 $h_{n+k}(Q_i)=0$，$\forall Q_i\in A$。所以 $0=h_{n+k}(Q_i)=q(Q_i)r(Q_i)$，$\forall Q_i\in A$。

但是 $q(Q_i)\neq 0$，$\forall Q_i\in A$。

所以 $r(Q_i)=0$， $\forall Q_i \in A$

而 A 是 $H_n^{(s)}$ 的正则插值结点组， $r(x)\in H_n^{(s)}$ 这显然与 A 是 $H_n^{(s)}$ 的正则插值结点组矛盾。

所以 $C=A\cup B$ 必定构成 $H_{n+k}^{(s)}$ 的正则插值结点组。

定理 2 证明：

证明：不妨设存在 $g(x)\in H_{n+m}^{(s)}$ 满足 $g(Q_i)=0$， $\forall Q_i \in A\cup B$ 有基本引理知只须证存在 $r(x)\in H^{(s)}$ 使得 $g(x)=q(x)r(x)$

由于 $g(x)\in H_{n+m}^{(s)}$ 且 $g(Q_i)=0$， $\forall Q_i \in B$ 而 $B\in I_{n+m}^{(3)}(C)$，

则有

$$g(x)=\alpha(x)p(x)+\beta(x)q(x) \tag{5}$$

又因为

$$g(Q_i)=0,\ \forall Q_i \in A \tag{6}$$

将(6)代入(5)中有 $\alpha(Q_i)p(Q_i)=0$， $\forall Q_i \in A$

但是 $p(Q_I)\neq 0$， $\forall Q_i \in A$，只有 $\alpha(Q_i)=0$， $\forall Q_i \in A$

又由于 $\alpha(x)\in H_n^{(s)}$， $A\in I_n^{(s)}(q)$。

由基本引理知

$$\alpha(x)=q(x)\tilde{r}(x) \tag{7}$$

将(7)代入(5)中有 $g(x)=q(x)\left(\tilde{r}(x)p(x)+\beta(x)\right)=q(x)r(x)$

证毕。

4. 具体构造方法及实验算例

取 $(0,1)$ 为 $H_0^{(2)}$ 的一个齐次正则插值结点组，不经过 $(0,1)$ 在 $y^2=x^2$ 上任取两个点 $(-1,1)$ 和 $(1,1)$，则由定理 1 知这三点构成 $H_2^{(2)}$ 的齐次正则插值结点组。取被插值函数 $f(x,y)=2^{x+y}$，则所确定的唯一一条插值函数 $h_2(x,y)=\frac{1}{2}x^2+2y^2+\frac{3}{2}xy$，由 MATLAB [6]做出被插值函数与所求二元齐次插值多项式的图像如图 1 所示。

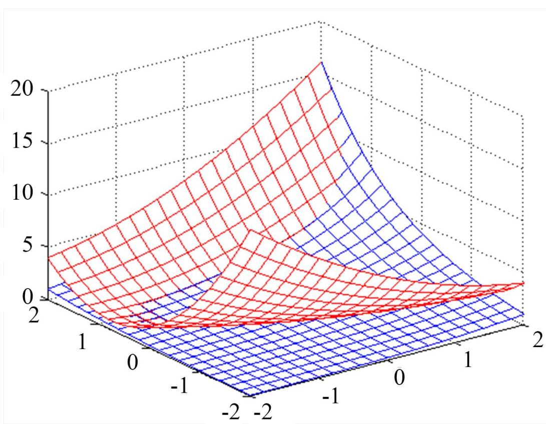

Figure 1. Effect diagram of bivariate homogeneous interpolation
图 1. 二元齐次插值效果图

参考文献

[1] 梁学章. 二元插值的适定结点组与迭加插值法[J]. 吉林大学学报(自然科学版), 1979(1): 27-32.

[2] 梁学章, 李强. 多元逼近[M]. 北京: 国防工业出版社, 2005: 22-28.

[3] 崔利宏, 杨一浓, 王晓婉. 平面代数曲线上的二元多项式插值问题研究[J]. 辽宁师范大学学报(自然科学版), 2013(36): 318-321.

[4] 崔利宏, 范晓倩, 刘莹. 多元分次插值适定性问题研究[J]. 辽宁师范大学学报(自然科学版), 2016(12): 433-437.

[5] 崔利宏. 多元 Lagrange 插值与多元 Kergin 插值[M]. 大连: 辽宁师范大学出版社, 2018: 36-42.

[6] 周蕴时, 苏志勋, 奚涌江, 等. CAGD 中的曲线与曲面[M]. 长春: 吉林大学出版社, 1993.