**Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2021, 10(7), 2359-2368**
Published Online July 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2021.107247

Hans汉斯

# 一类具有非线性感染率的随机$SIQS$传染病模型解的渐近行为

**刘向荣**

中原科技学院，河南 郑州
E-mail: 1579854813@qq.com

收稿日期：2021年6月12日；录用日期：2021年7月1日；发布日期：2021年7月14日

## 摘 要

本文研究了一类带有非线性感染率的随机$SIQS$传染病模型。首先证明了该随机$SIQS$传染病模型对正的初始条件存在着唯一的全局正解。然后，通过构造适当的**Lyapunov** 函数并结合伊藤公式的应用，对该随机$SIQS$传染病模型的解在无病平衡点以及地方病平衡点附近的渐进行为进行了分析讨论。

## 关键词

非线性感染率，随机$SIQS$传染病模型，伊藤公式，渐近行为

# Asymptotic Behavior of the Solution of a Random $SIQS$ Epidemic Model with Nonlinear Infection Rate

**Xiangrong Liu**

Zhongyuan Institute of Technology, Zhengzhou Henan
E-mail: 1579854813@qq.com

Received: Jun. 12$^{th}$, 2021; accepted: Jul. 1$^{st}$, 2021; published: Jul. 14$^{th}$, 2021

文章引用: 刘向荣. 一类具有非线性感染率的随机$SIQS$传染病模型解的渐近行为[J]. 应用数学进展, 2021, 10(7): 2359-2368. DOI: 10.12677/aam.2021.107247

## Abstract

**This paper studies a kind of random $SIQS$ infectious disease model with nonlinear infection rate. First, it is proved that the random $SIQS$ infectious disease model has a unique global positive solution to the initial conditions of the positive. Then, by constructing an appropriate Lyapunov Function and combined with the application of Ito's formula, the gradual behavior of the solution of the random $SIQS$ infectious disease model near the disease-free balance point and the endemic disease balance point is analyzed and discussed.**



## Keywords

**Non-Linear Infection Rate, Random $SIQS$ Epidemic Model, $It\hat{o}$ Formula, Asymptotic Behavior**




## 1. 引言

在生物数学的研究领域中, 对传染病动力学模型的研究式其一重要分支, 尤其是2020年新型冠状病毒在全球肆虐, 给全球带来了严重灾难, 也因此传染病模型越来越广泛的引起国内外众多生物数学学者对其关注 [1] [2] [3] [4] [5]. 本文在文献 [6]中的传染病模型的基础上考虑了以下一个带有非线性感染率的传染病模型:

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{dS(t)}}{\mathrm{dt}} = \Lambda - \frac{\beta S(t)I(t)}{1+\alpha I(t)} - \mu S(t) + rI(t) + \varepsilon Q(t), \\ \frac{\mathrm{dI(t)}}{\mathrm{dt}} = \frac{\beta S(t)I(t)}{1+\alpha I(t)} - (r+\delta+\mu)I(t), \\ \frac{\mathrm{dQ(t)}}{\mathrm{dt}} = \delta I(t) - (\mu+\varepsilon)Q(t), \end{cases} \tag{1}$$

其中$S(t)$, $I(t)$, $Q(t)$分别表示在t时刻易感者、染病者和隔离者的数量. $\Lambda$ 表示人口的输入率,且为常数; $\mu$ 为易感者、染病者和隔离者的自然死亡率; $r$、$\varepsilon$、$\delta$ 均表示状态转移率; $\frac{\beta S(t)I(t)}{1+\alpha I(t)}$ 为感染率函

数; $\Lambda$, $\mu$, $r$, $\varepsilon$, $\delta$, 均为正数.

易知系统(1)的基本再生数是$R_0=\frac{\beta\Lambda}{\mu(\gamma+\delta+\mu)}$, 它关系着疾病的发生与否. 当$R_0\leq 1$ 时, 系统(1)存在全局渐近稳定的无病平衡点$E_0=(S^0,0,0)=(\frac{\Lambda}{\mu},0,0)$; 当$R_0>1$ 时, 系统(2) 存在唯一全局渐近稳定的地方病平衡点$E^*=(S^*,I^*,Q^*)$ [6].

此外, 由于了解到传染病的发展会受到环境因素的影响. 其中环境噪声如白噪声对传染病的发展会引起不可忽略的影响. 因此, 研究环境噪声(如白噪声)究竟是怎样来影响传染病动力学系统可以使我们的研究结果更具有现实意义. 针对传染病模型的动力学行为的研究, 引入随机波动是许多生物数学学者常用的方法之一 [7] [8] [9]. 在本文中, 我们采用的随机扰动方法类似于蒋 [10], 引入的随机扰动正比于$S(t), I(t), Q(t)$. 因此, 由相应的确定模型(1)可以得到下面的随机扰动模型:

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{dS(t)}}{\mathrm{dt}}=\Lambda-\dfrac{\beta S(t)I(t)}{1+\alpha I(t)}-\mu S(t)+rI(t)+\varepsilon Q(t)+\sigma_1 S(t)\mathrm{d}B_1(t),\\ \dfrac{\mathrm{dI(t)}}{\mathrm{dt}}=\dfrac{\beta S(t)I(t)}{1+\alpha I(t)}-(r+\delta+\mu)I(t)+\sigma_2 I(t)\mathrm{d}B_1(t),\\ \dfrac{\mathrm{dQ(t)}}{\mathrm{dt}}=\delta I(t)-(\mu+\varepsilon)Q(t)+\sigma_3 Q(t)\mathrm{d}B_1(t),\end{cases}\tag{2}$$

其中$(B_1(t),B_2(t),B_3(t)$ 是定义在完备概率空间$(\Omega,\mathcal{F},\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0},P)$ 上的三维标准的$Brownian$ 运动, $\sigma_i^2, i=1,2,3$ 表示白噪声的强度.

为了方便研究模型, 除特殊说明外, 我们假设$(\Omega,\mathcal{F},\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0},P)$ 是一个具有滤子$\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$ 的全概率空间, 其中滤子$\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$ 满足通常条件( 在一个完备的概率空间里, 如果一个滤子$\mathcal{F}_t$ 满足$\mathcal{F}_t=\bigcap\limits_{s>t}\mathcal{F}_s(t\geq 0)$ 且$\mathcal{F}_0$ 包含所有的$P$ 零集).$R_+^3=\{(S(t),I(t),Q(t))|S(t)>0,I(t)>0,Q(t)>0\}$.

且从生物学的角度看, 传染病模型只有非负解时才具有实际意义. 因此本文在第2部分证明在给定的初始条件下, 系统存在唯一的全局正解; 在第3部分, 证明了系统(3)在无病平衡点的渐近行为; 第4部分证明了系统(3)在地方病平衡点的渐近行为; 最后给出本文的结论.

## 2. 全局正解的存在唯一性

在分析传染病模型的动力学行为时,我们首先需要研究该系统是否存在全局正解.因此,在本小节,我们给出系统(2)存在全局正解的证明.

**定理 1** 对任意给定的初值$(S(0),I(0),Q(0))\in\mathbb{R}_+^3$, 在$t\geq 0$ 上, 系统(2)存在唯一的正解$(S(t),I(t), Q(t))$, 且此解依概率1停留在$\mathbb{R}_+^3$ 中, 也即$(S(t),I(t),Q(t))\in\mathbb{R}_+^3$ 对所有的$t\geq 0$ 几乎必然成立.

**证明** 易知系统(2)的系数满足局部Lipschitz 条件, 那么对任意给定的初值$(S(0),I(0),Q(0))\in\mathbb{R}_+^3$, 在$t\in[0,\tau_e)$ 上, 系统(2) 都存在唯一的局部解$(S(t),I(t),Q(t))$, 其中$\tau_e$ 是爆破时间 [11]. 为了证明这个局部解是全局的, 我们只需证明$\tau_e=\infty$ 几乎必然成立即可. 为此, 设$m_0>0$ 充分大, 使得$S(0)$, $E(0)$ 和$Q(0)$ 落在区间$\left[\frac{1}{m_0},m_0\right]$. 进一步, 对每个整数$m\geq m_0$, 定义停时

$$\tau_m=\inf\left\{t\in[0,\tau_e):S(t)\notin\left(\frac{1}{m},m\right)\ \text{或}\ I(t)\notin\left(\frac{1}{m},m\right)\ \text{或}\ Q(t)\notin\left(\frac{1}{m},m\right)\right\},$$

显然, 当$m \to \infty$时, $\tau_m$ 单调递增. 令$\tau_\infty = \lim_{m\to\infty} \tau_m$, 易知, $\tau_\infty \le \tau_e$. 若能证明$\tau_\infty = \infty$, 则有$\tau_e = \infty$成立,这样问题即可得以证明.
下证$\tau_\infty = \infty$ $a.s.$, 采用反证法. 如若不然, 即假设$\tau_\infty \ne \infty$, 则存在常数$T > 0$ 和$\varepsilon \in (0,1)$, 有

$$P(\tau_\infty \le t) > \varepsilon,$$

因此, 存在整数$m_1 \ge m_0$, 使得对任意$m_1 \ge m_0$, 都有

$$P(\tau_m \le t) \ge \varepsilon.$$

定义一个三元函数$V : \mathbb{R}^3_+ \to \mathbb{R}_+$, 如下:

$$V(S,I,Q) = \left(S - a - a\ln\frac{S}{a}\right) + (I - 1 - \ln I) + (Q - 1 - \ln Q),$$

其中$a$ 为正常数,而当$u \ge 0$时,显然满足 $u - 1 - \ln u \ge 0$, 由此可得该函数是非负的.
对任意的$m \ge m_0$ 和$T > 0$. 应用伊藤公式 [12], 有

$$\mathrm{d}V(S,I,Q) = LV(S,I,Q)\mathrm{dt} + \sigma_1(S-a)\mathrm{dB}_1(t) + \sigma_2(I-1)\mathrm{dB}_2(t) + \sigma_3(Q-1)\mathrm{dB}_3(t).$$

其中

$$\begin{aligned}
LV(S,I,Q) =&(1-\frac{a}{S})(\Lambda - \frac{\beta SI}{1+\alpha I} - \mu S + rI + \varepsilon Q) + (1-\frac{1}{I})(\frac{\beta SI}{1+\alpha I} - (r+\delta+\mu)I)\\
&+ (1-\frac{1}{Q})(\delta I - (\mu+\varepsilon)Q) + \frac{1}{2}a\sigma_1^2 + \frac{1}{2}\sigma_2^2 + \frac{1}{2}\sigma_3^2\\
\le&(\Lambda + a\mu + r + \delta + 2\mu + \varepsilon + \frac{1}{2}a\sigma_1^2 + \frac{1}{2}\sigma_2^2 + \frac{1}{2}\sigma_3^2) + a\beta I - \mu I\\
\le&\Lambda + a\mu + r + \delta + 2\mu + \varepsilon + \frac{1}{2}a\sigma_1^2 + \frac{1}{2}\sigma_2^2 + \frac{1}{2}\sigma_3^2\\
=&K.
\end{aligned}$$

其中$a = \frac{\mu}{\beta}$,则有$a\beta I - \mu I = 0$.
因此

$$\mathrm{d}V(S,I,Q) \le K\mathrm{dt} + \sigma_1(S-a)\mathrm{dB}_1(t) + \sigma_2(I-1)\mathrm{dB}_2 + b\sigma_3(Q-1)\mathrm{dB}_3(t), \tag{2.1}$$

对(2.1)式两端从0 到$\tau_m \wedge T$ 积分并取期望

$$EV(S(\tau_m\wedge T), I(\tau_m\wedge T), Q(\tau_m\wedge T)) \le V(S(0), I(0), Q(0)) + KE(\tau_m\wedge T),$$

故

$$EV(S(\tau_m\wedge T), I(\tau_m\wedge T), Q(\tau_m\wedge T)) \le V(S(0), I(0), Q(0)) + KT, \tag{2.2}$$

当$m > m_1$ 时, 令$\Omega_m = \{\tau_m \le T\}$, 则有$P(\Omega_m) \ge \varepsilon$. 对每个 $w \in \Omega_m$, 由停时的定义可知$S(\tau_m, w), I(\tau_m, w), Q(\tau_m, w)$ 中至少有一个等于$m$ 或$\frac{1}{m}$, 所以

$$V(S(\tau_m,w),E(\tau_m,w),I(\tau_m,w)) \geq (m-1-\ln m) \text{ 或} (\tfrac{1}{m}-1-\ln\tfrac{1}{m}),$$

由(2.2)得

$$\begin{aligned} V(S(0),E(0),I(0))+KT &\geq E[1_{\Omega_k}V((S(\tau_m,w),I(\tau_m,w),Q(\tau_m,w))] \\ &\geq \varepsilon(m-1-\ln m)\wedge\left(\frac{1}{m}-1-\ln\frac{1}{m}\right), \end{aligned}$$

其中, $1_{\Omega_k}$ 为$\Omega_k$ 的示性函数, 令$m\to\infty$, 有

$$\infty > V(S(0),E(0),I(0))+KT=\infty.$$

矛盾. 于是有$\tau_e=\infty$.

结论得证.

## 3. 沿无病平衡点的渐近行为

**定理 2** 假设$R_0=\frac{\beta\Lambda}{\mu(\gamma+\delta+\mu)}\leq 1$,且满足条件$\sigma_1^2<\mu,\sigma_2^2<2\mu,\sigma_3^2<\mu$,则对任意给定的初始值$(S(0),I(0),Q(0))\in\mathbb{R}_+^3$,模型(2)的解$(S(t),I(t),Q(t))\in\mathbb{R}_+^3$有如下性质:

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}E\int_0^t\{(S-\frac{\Lambda}{\mu})^2+I^2+Q^2\}\mathrm{d}r\leq\frac{K_1}{M_1},$$

其中

$$c_1=\frac{2\mu\varepsilon+2\mu(\delta+2\mu)}{\beta\varepsilon},\quad c_2=\frac{2\mu}{\varepsilon}$$

$$A_1=(1+c_3)(\mu-\sigma_1^2),\quad A_2=(1+c_2)(\mu-\frac{\sigma_2^2}{2})+\delta c_2,\quad A_3=\mu-\sigma_3^2$$

,

$$M_1=\min\{B_1,B_2,B_3\},\quad K_1=(1+c_2)\sigma_1^2\frac{\Lambda^2}{\mu^2}$$

.

**证明** 首先作变量替换$u=S-\frac{\Lambda}{\mu},v=I,w=Q$,则系统(2)可变换为:

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{du}}{\mathrm{dt}}=-\mu u-\dfrac{\beta(u+\frac{\Lambda}{\mu})v}{1+\alpha v}+rv+\varepsilon w+\sigma_1(u+\dfrac{\Lambda}{\mu})\mathrm{d}B_1(t),\\ \dfrac{\mathrm{dv}}{\mathrm{dt}}=\dfrac{\beta(u+\frac{\Lambda}{\mu})v}{1+\alpha v}-(r+\delta+\varepsilon)v+\sigma_2v\mathrm{d}B_2(t),\\ \dfrac{\mathrm{dw}}{\mathrm{dt}}=\delta v-(\mu+\varepsilon)w+\sigma_3w\mathrm{d}B_1(t),\end{cases}\tag{3}$$

定义函数:

$$V_1=\frac{1}{2}(u+v+w)^2,\quad V_2=c_1v,\quad V_3=\frac{c_2}{2}(u+v)^2,$$

其中$c_1, c_2$为任意正常数,应用伊藤公式 [12], 我们可得如下结论:

$$\begin{aligned} LV_1 =&(u+v+w)[-\mu(u+v+w)]+\frac{1}{2}\sigma_1^2(u+\frac{\Lambda}{\mu})^2+\frac{1}{2}\sigma_2^2v^2+\frac{1}{2}\sigma_3^2w^2 \\ =&-\mu u^2-\mu v^2-\mu w^2-2\mu uv-2\mu uw-2\mu vw+\frac{1}{2}\sigma_1^2(u+\frac{\Lambda}{\mu})^2 \\ &+\frac{1}{2}\sigma_2^2v^2+\frac{1}{2}\sigma_3^2w^2, \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned} LV_2 =&c_1[\frac{\beta(u+\frac{\Lambda}{\mu})v}{1+\alpha v}-(r+\delta+\mu)v] \\ \leq& c_1\beta uv+c_1[\beta\frac{\Lambda}{\mu}-(r+\delta+\mu)]v, \end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned} LV_3 =&c_2(u+v)[-\mu u-(\delta+\mu)v+\varepsilon w]+\frac{1}{2}c_2\sigma_1^2(u+\frac{\Lambda}{\mu})^2+\frac{1}{2}c_2\sigma_2^2v^2 \\ =&-c_2\mu u^2-c_2(\delta+\mu)v^2-c_2(\delta+2\mu)uv+c_2\varepsilon uw+c_2\varepsilon vw \\ &+\frac{1}{2}c_2\sigma_1^2(u+\frac{\Lambda}{\mu})^2+\frac{1}{2}c_2\sigma_2^2v^2. \end{aligned} \tag{3.3}$$

取函数$V=V_1+V_2+V_3$,即将(3.1), (3.2), (3.3)式相加,得

$$\begin{aligned} LV =&-(\mu+c_2\mu)u^2-[\mu+c_2(\delta+\mu)v^2]-\mu w^2+[c_1\beta-2\mu-c_2(2\mu+\delta)uv] \\ &+(c_2\varepsilon-2\mu)uw+(c_2\varepsilon-2\mu)vw+c_1(r+\delta+\mu)(R_0-1)v \\ &+\frac{1}{2}\sigma_1^2(u+\frac{\Lambda}{\mu})^2+\frac{1}{2}\sigma_2^2v^2+\frac{1}{2}\sigma_3^2w^2+\frac{1}{2}c_2\sigma_1^2(u+\frac{\Lambda}{\mu})^2+\frac{1}{2}c_2\sigma_2^2v^2 \\ \leq&-(1+c_2)(\mu-\sigma_1^2)u^2-[(1+c_2)(\mu-\frac{\sigma_2^2}{2})+\delta c_2]v^2-(\mu-\sigma_3^2)w^2 \\ &(1+c_2)\sigma_1^2\frac{\Lambda^2}{\mu^2}, \end{aligned} \tag{3.4}$$

其中$c_1=\frac{2\mu\varepsilon+2\mu(\delta+2\mu)}{\beta\varepsilon}$, $\quad c_2=\frac{2\mu}{\varepsilon}$,

则有$c_2\varepsilon-2\mu=0$, $\quad c_1\beta-2\mu-c_2(2\mu+\delta)$,且满足$R_0\leq 1$.

令$A_1=(1+c_3)(\mu-\sigma_1^2)$, $A_2=(1+c_2)(\mu-\frac{\sigma_2^2}{2})+\delta c_2$, $A_3=\mu-\sigma_1^2$, $K_1=(1+c_2)\sigma_1^2\frac{\Lambda^2}{\mu^2}$,

又由定理2的条件可得:

$$\begin{aligned} dV =\leq&(-A_1u^2-A_2v^2-A_3w^2+K_1)\mathrm{dt}+\sigma_1(u+\frac{\Lambda}{\mu})[u+v+w+c_2(u+v)]\mathrm{dB}_1(t) \\ &+\sigma_2v[c_1+u+v+w+c_2(u+v)]\mathrm{dB}_2(t)+\sigma_3w(u+v+w)\mathrm{dB}_3(t) \end{aligned} \tag{3.5}$$

对(3.5)式两端从0到$t$积分后再求期望,有

$$0 \le E[V(S(t),I(t),Q(t))] \le E[V(S(0),I(0),Q(0))] + E\int_0^t (-A_1u^2 - A_2v^2 - A_3w^2 + K_1)\mathrm{d}r,$$

从而推出

$$E\int_0^t (-A_1u^2 - A_2v^2 - A_3w^2)\mathrm{d}r \le E[V(S(0),I(0),Q(0))] + K_1) + K_1t,$$

上式两端同时除以$t$,再令$t\to\infty$,可得

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}E\int_0^t (-A_1u^2 - A_2v^2 - A_3w^2)\mathrm{d}r \le K_1,$$

取$M_1 = \min\{A_1, A_2, A_3\}$,易得:

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}E\int_0^t \{(S-\frac{\Lambda}{\mu})^2 + I^2 + Q^2\}\mathrm{d}r \le \frac{K_1}{M_1}.$$

结论得证.

## 4. 沿地方病平衡点的渐近行为

**定理 3** 假设$R_0 = \frac{\beta\Lambda}{\mu(\gamma+\delta+\mu)} > 1$,且满足条件$\sigma_1^2 < \mu, \sigma_2^2 < \mu, \sigma_3^2 < \mu$,则对任意给定的初始值$(S(0),I(0),Q(0)) \in \mathbb{R}_+^3$,模型(2)的解$(S(t),I(t),Q(t)) \in \mathbb{R}_+^3$有如下性质:

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}E\int_0^t \{(S-S^*)^2 + (I-I^*)^2 + (Q-Q^*)^2\}\mathrm{d}r \le \frac{K_2}{M_2},$$

其中

$$c_1 = \frac{2\mu\varepsilon + 2\mu(\delta+2\mu)}{\beta\varepsilon}, \quad c_2 = \frac{2\mu}{\varepsilon}$$

$$B_1 = (1+c_3)(\mu-\sigma_1^2), \quad B_2 = (1+c_2)(\mu-\sigma_1^2) + \delta c_2, \quad B_3 = \mu - \sigma_3^2,$$

$$M_2 = \min\{A_1, A_2, A_3\}, \quad K_2 = 2\sigma_1^2(S^*)^2 + 2\sigma_2^2(I^*)^2 + \sigma_3^2(Q^*)^2 + \frac{c_2}{2}I^*\sigma_2^2.$$

**证明** 定义函数:

$$V_1 = \frac{1}{2}(S - S^* + I - I^* + Q - Q^*)^2, \quad V_2 = c_1(I - I^* - I^*\ln\frac{I}{I^*}),$$

$$V_3 = \frac{c_2}{2}(S - S^* + I - I^*)^2, \quad V = V_1 + V_2 + V_3,$$

其中$c_1, c_2$为任意正常数,应用伊藤公式 [12], 我们可得如下结论:

$$\begin{aligned} LV_1 =& (S - S^* + I - I^* + Q - Q^*)[-\mu(S - S^*) - \mu(I - I^*) - \mu(Q - Q^*)] \\ & + \frac{1}{2}\sigma_1^2 S^2 + \frac{1}{2}\sigma_2^2 I^2 + \frac{1}{2}\sigma_3^2 Q^2 \\ & \le -(\mu - \sigma_1^2)(S - S^*)^2 - (\mu - \sigma_2^2)(I - I^*)^2 - (\mu - \sigma_3^2)(Q - Q^*)^2 \\ & - 2\mu(S - S^*)(I - I^*) - 2\mu(S - S^*)(Q - Q^*) - 2\mu(I - I^*)(Q - Q^*) \\ & + \sigma_1^2(S^*)^2 + \sigma_2^2(I^*)^2 + \sigma_3^2(Q^*)^2, \end{aligned} \tag{4.1}$$

$$\begin{aligned} LV_2 =& c_1(I - I^*)\left(\frac{\beta SI}{1 + \alpha I} - \frac{\beta S^*}{1 + \alpha I^*}\right) + \frac{1}{2}c_1\sigma_2^2 I^* \\ =& c_1(I - I^*)[\beta S(\frac{1}{1 + \alpha I}) - \frac{1}{1 + \alpha I^*} + \frac{\beta}{1 + \alpha I^*}(S - S^*)] + \frac{1}{2}c_1\sigma_2^2 I^* \\ \le& c_1\beta(S - S^*)(I - I^*) + \frac{1}{2}c_1\sigma_2^2 I^*, \end{aligned} \tag{4.2}$$

$$\begin{aligned} LV_3 =& c_2(S - S^* + I - I^*)[-\mu(S - S^*) - (\mu + \delta)(I - I^*) + \varepsilon(Q - Q^*)] \\ & + \frac{1}{2}c_2\sigma_1^2 S^2 + \frac{1}{2}c_2\sigma_2^2 I^2 \\ =& - c_2\mu(S - S^*)^2 - c_2(\mu + \delta)(I - I^*)^2 - c_2(\delta + 2\mu)(S - S^*)(I - I^*) \\ & + c_2\varepsilon(S - S^*)(Q - Q^*) + c_2\varepsilon(I - I^*)(Q - Q^*) + \frac{1}{2}c_2\sigma_1^2 S^2 + \frac{1}{2}c_2\sigma_2^2 I^2 \\ & \le -c_2(\mu - \sigma_1^2)(S - S^*)^2 - c_2(\mu + \delta - \sigma_2^2)(I - I^*)^2 \\ & - c_2(\delta + 2\mu)(S - S^*)(I - I^*) + c_2\varepsilon(I - I^*)(Q - Q^*) + \sigma_1^2(S^*)^2 + \sigma_2^2(I^*)^2, \end{aligned} \tag{4.3}$$

又由$V = V_1 + V_2 + V_3$,可得:

$$\begin{aligned} LV \le& -(1 + c_2)(\mu - \sigma_1^2)(S - S^*)^2 - [(1 + c_2)(\mu - \sigma_2^2) + c_2\delta](I - I^*)^2 \\ & - (\mu - \sigma_3^2)(Q - Q^*)^2 - [c_1\beta - 2\mu - c_2(\delta + 2\mu)](S - S^*)(I - I^*) \\ & + (c_2\varepsilon - 2\mu)(S - S^*)(Q - Q^*) + (c_2\varepsilon - 2\mu)(I - I^*)(Q - Q^*) \\ & + 2\sigma_1^2(S^*)^2 + 2\sigma_2^2(I^*)^2 + \sigma_3^2(Q^*)^2 + \frac{c_1}{2}I^*\sigma_2^2, \end{aligned} \tag{4.4}$$

由定理3的条件整理可得:

$$LV \le - B_1(S - S^*)^2 - B_2(I - I^*)^2 - B_3(Q - Q^*)^2 + K_2, \tag{4.5}$$

其中$B_1 = (1 + c_3)(\mu - \sigma_1^2), \quad B_2 = (1 + c_2)(\mu - \sigma_1^2) + \delta c_2, \quad B_3 = \mu - \sigma_3^2,$

$K_2 = 2\sigma_1^2(S^*)^2 + 2\sigma_2^2(I^*)^2 + \sigma_3^2(Q^*)^2 + \frac{c_2}{2}I^*\sigma_2^2.$

因此有

$$\begin{aligned} dV =& LV\mathrm{d}t + (S - S^* + I - I^* + Q - Q^*)[\sigma_1 S\mathrm{dB}_1(t) + \sigma_2 I\mathrm{dB}_2(t) + \sigma_3 Q\mathrm{dB}_3(t)] \\ &+ c_1\sigma_2(I - I^*)\mathrm{dB}_2(t) + c_2(S - S^* + I - I^*)[\sigma_1 S\mathrm{dB}_1(t) + \sigma_2 I\mathrm{dB}_2(t)], \end{aligned} \tag{4.6}$$

接下来,我们的证明方法与定理2的证明过程相似, 故省略.

结论得证.

## 5. 结论

本文所讨论的随机传染病模型是在已给出的非线性感染率的传染病模型的基础上, 考虑了随机波动而建立的. 基于该随机传染病模型, 我们对其动力学行为进行了研究: 首先分析了该系统在给定的初值条件下, 存在唯一的全局正解, 其次通过构造适当的Lapunov 函数, 证明了该系统的解在无病平衡点与地方病平衡点的渐近行为, 这些结论对带有非线性感染率的传染病模型的研究更具有现实意义.

## 参考文献


[1] 周瑶, 吕贵臣. 具有人传人的登革热传染病模型的动力学分析[J]. 重庆理工大学学报: 自然科学版, 2021, 35(2): 258-267.

[2] Liu, Q. and Jiang, D. (2016) The Threshold of a Stochastic Delayed SIR Epidemic Model with Vaccination. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, **461**, 140-147. https://doi.org/10.1016/j.physa.2016.05.036

[3] Liu, Q., Jiang, D., Hayat, T., *et al.* (2018) Analysis of a Delayed Vaccinated SIR Epidemic Model with Temporary Immunity and Lévy Jumps. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, **27**, 29-43. https://doi.org/10.1016/j.nahs.2017.08.002

[4] Wen, B.Y., Teng, Z.D., Li, Z.M., *et al.* (2018) The Threshold of a Periodic Stochastic SIVS Epidemic Model with Nonlinear Incidence. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, **508**, 532-549. https://doi.org/10.1016/j.physa.2018.05.056

[5] Wang, L., Zhang, X. and Liu, Z. (2018) An SEIR Epidemic Model with Relapse and General Nonlinear Incidence Rate with Application to Media Impact. *Qualitative Theory of Dynamical Systems*, 17, 1309-329.

[6] 杨俊仙, 徐丽. 一类具有非线性发生率和时滞的SIQS传染病模型的全局稳定性[J]. 山东大学学报理学版, 2014, 49(5): 67-74.

[7] Xiang, H., Tang, Y.L. and Huo, H.F. (2016) A Viral Model with Intracellular Delay and Humoral Immunity. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, **40**, 1011-1023. https://doi.org/10.1007/s40840-016-0326-2

[8] Jiang, D., Yu, J., Ji, C., *et al.* (2011) Asymptotic Behavior of Global Positive Solution to a Stochastic SIR Model. *Mathematical and Computer Modelling*, **54**, 221-232. https://doi.org/10.1016/j.mcm.2011.02.004

[9] Carletti, M. (2002) On the Stability Properties of a Stochastic Model for Phage-Bacteria Interaction in Open Marine Environment. *Mathematical Biosciences*, **175**, 117-131. https://doi.org/10.1016/S0025-5564(01)00089-X

[10] Jiang, D., Yu, J., Ji, C., *et al.* (2011) Asymptotic Behavior of Global Positive Solution to a Stochastic SIR Model. *Mathematical and Computer Modelling*, **54**, 221-232. https://doi.org/10.1016/j.mcm.2011.02.004

[11] 赵彦军, 李辉来, 李文轩. 一类具有饱和发生率和心理作用的随机SIR传染病模型[J]. 吉林大学学报理学版, 2021, 59(1): 20-26.

[12] Amir, K., Ghulam, H., Mostafa, Z., *et al.* (2020) A Stochastic SACR Epidemic Model for HBV Transmission. *Journal of Biological Dynamics*, **14**, 788-801. https://doi.org/10.1080/17513758.2020.1833993