Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2021, 10(7), 2428-2441
Published Online July 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2021.107255

Hans汉斯

Hele-Shaw流模型的Darcy-Cahn-Hilliard方程组解的研究

肖翔宇，蒲志林

四川师范大学数学科学学院，四川 成都
Email: puzhilinscnu@136.com

收稿日期：2021年6月19日；录用日期：2021年7月11日；发布日期：2021年7月22日

摘 要

本文对由Darcy方程和Cahn-Hilliard方程耦合而成的两相Hele-Shaw流扩散界面模型进行了研究。在此模型中，Darcy方程中的额外相位诱导力项和Cahn-Hilliard 方程中的流体诱导输运项耦合了两相方程，本文对方程组中的非线性项在满足更一般假设条件下，研究了方程组弱解的存在性和唯一性及解的能量估计。

关键词

耦合，存在性，唯一性，能量估计

Study on Darcy-Cahn-Hilliard Equations of Hele-Shaw Flow

Xiangyu Xiao, Zhilin Pu

School of Mathematical Science, Sichuan Normal University, Chengdu Sichuan
Email: puzhilinscnu@136.com

Received: Jun. 19th, 2021; accepted: Jul. 11th, 2021; published: Jul. 22nd, 2021

文章引用: 肖翔宇, 蒲志林. Hele-Shaw流模型的Darcy-Cahn-Hilliard方程组解的研究[J]. 应用数学进展, 2021, 10(7): 2428-2441. DOI: 10.12677/aam.2021.107255

Abstract

In this paper, we study the two phase Hele-Shaw flow, which consists of the Cahn Hilliard eqution and the Darcy equation. In this model, an extra phase induced force term in the Darcy equation is coupled with a fluid induced transport term in the Cahn-Hilliard equation. As the non-linear term satisfies the more general condition, we show the existence of the weak solution, energy estimate, and the uniqueness.

Keywords

Coupled, Existence, Uniqueness, Energy Estimate

1. 介绍

在被无限小间隙分开的两块平板之间，一种或多种粘性流体在两平行平板之间运动，Hele-Shaw 流动则是流体在两平板间的缓慢流动。在两平板间的流体速度满足抛物线分布，流动有旋，但是垂直于平板方向的涡量分量为零，所以从平板上方观察的时候流动是无旋的，因而可以用来模拟平板平面里的无旋流动。通常把这种装置称为Hele-Shaw 细胞 [1–3]，最初由Hele-Shaw 设计用于研究二维势流。Hele-Shaw流动可以用来近似研究各种流体力学问题，因此对Hele-Shaw流动的研究具有重要的现实意义。

严格的数学理论可以为研究界面动力学 [4]提供帮助。

由于在达西定律中提出了流体的间隙平均速度，因此Hele-Shaw流的控制方程与无粘势流的控制方程和流体通过多孔介质的控制方程是一致的，具体来说，就是两个阶段Hele-Shaw流的形式为

$$\mathbf{u} = -\frac{1}{12\eta}(\nabla p - \rho\mathbf{g}), (x,t) \in \Omega_T\backslash\Gamma_t. \tag{1}$$

$$div\mathbf{u} = 0, (x,t) \in \Omega_T\backslash\Gamma_t. \tag{2}$$

$$[p] = \gamma\kappa, (x,t) \in \Gamma_t. \tag{3}$$

$$[\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}]=0,(x,t)\in\Gamma_t. \tag{4}$$

其中$\Omega\subset R^2$是个有界区域，$\Omega_T=\Omega\times(0,T)$,$\Gamma_t$ 代表t 时刻流体之间的界面。$\mathbf{u}$ 表示流体速度；p 表示流体的压力；$[p]$ 表示p 通过界面Γ_t 的跃变，$\mathbf{n}$代表法向量；η是粘度；它在Γ_t 的两边可能有不同的正值；$\mathbf{g}$ 是单位质量的引力；ρ是流体的质量密度，它同样可以在界面两边取不同的正值。方程(1)为达西定律 [5,6]；方程(2)表示流体不可压缩；方程(3) 和(4)分别代表了表面张力平衡和质量平衡的数学描述，即是表示流体界面的边界条件。(3)式又被称作是拉普拉斯-杨条件，其中γ 是无量纲的表面张力系数，κ 是界面的Γ_t 的平均曲率。

在界面上，表面存在张力，并且在演化过程中，流体界面可能会发生自交，夹断，劈裂和肥育等拓扑变化。为了克服这些困难，我们借助扩散界面理论 [7]，它是被用来解决移动界面问题的另一种方法，扩散界面理论最初是作为建模和近似固-液相相变的方法而发展的。在该理论中，有限厚度的薄层被叫作界面，但不是锐利的界面，这种观点可追溯到Poisson,Gibbs,Rayleigh和Korteweg等人 [8]。该方法使用一个辅助函数，它被称为相场函数 [9,10]，并用来指示“相位”，且在远离界面区域的体相位中取得不同的值。界面本身可以与相位函数的水平集相关联。一般来说，随着界面层宽度趋于零，扩散界面模型将收敛到一些相应的锐界面模型。

在本文中，所研究的Hele-Shaw扩散界面模型如下所示

$$\mathbf{u}=-\nabla p-\gamma\varphi\nabla\mu,(x,t)\in\Omega_T. \tag{5}$$

$$div\,\mathbf{u}=\mathbf{0},(x,t)\in\Omega_T. \tag{6}$$

$$\varphi_t+\mathbf{u}\cdot\nabla\varphi-\varepsilon\Delta\mu=0,(x,t)\in\Omega_T. \tag{7}$$

$$\mu=-\varepsilon\Delta\varphi+\frac{1}{\varepsilon}f(\varphi)(x,t)\in\Omega_T. \tag{8}$$

对方程(5) – (8)加上边界条件和初值条件：

$$\frac{\partial p}{\partial\mathbf{n}}=\frac{\partial\mu}{\partial\mathbf{n}}=\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}}=0,(x,t)\in\partial\Omega_T. \tag{9}$$

$$\varphi(\cdot,0)=\varphi_0(\cdot),x\in\Omega. \tag{10}$$

其中$\Omega_T=\Omega\times(0,T)$；$\partial\Omega_T=\partial\Omega\times(0,T)$,$\partial\Omega$代表$\Omega$的边界

对非线性项$f(s)$,假设满足下列条件：

$$f(0)=0,\dot{f}(s)\geq c_0(c_0\geq 0),$$

$$f(s)s\geq c_1F(s)-c_2(c_1>0,c_2\geq 0),$$

$$F(s)\geq -c_3(c_3\geq 0).$$

其中$F(s)=\int_0^s f(s)ds$. 例如$f(s)=\sum_{i=1}^{2p+1}a_is^i(a_{2p+1}>0)$满足上述性质。显而易见，$f(s)=s^3+s$就

满足上述条件。

注意到：在原有的Hele-Shaw 问题中，Ω 是一个二维域;在本文中，我们考虑$\Omega \subset R^d(d = 2,3)$,且是一个有界区域，因为三维问题具有数学意义，并且在生物上也有应用，向量$\mathbf{u}(x,t) \in R^d$代表速度，标量$p(x,t) \in R$代表在点(x,t) 时液体混合物的压力，变量$\mu(x,t), \varphi(x,t) \in R$代表相场函数和化学势。当方程（5）中的$\gamma$取零的时候，该方程就是达西方程 [11]，当方程（7）和（8）没有了对流项$\mathbf{u} \cdot \nabla\varphi$时，方程就变为Cahn-Hilliard方程 [12]。

方程(5)$-$(10)是由Lee,Lowengrub,and Goodman提出的BHSCH模型的特例。他们证明了BHSCH系统 [13]的解收敛于Hele-Shaw 模型(1) $-$ (4)的解。我们注意到(5) 中的压强p 与BHSCH 模型中的压强p有不同的比例。为了获得类似的比例压力，通过$\tilde{p}$=$p + \gamma\varphi\mu$，可以简单地在模型中引入重新定义的压力。我们将方程组(5) $-$ (10) 称为DCH(Darcy-Cahn-Hilliard)系统。

定义如下Cahn-Hilliard能量方程

$$J_\varepsilon(\varphi) = \int\limits_\Omega \left[\frac{\varepsilon}{2}|\nabla\varphi|^2 + \frac{1}{\varepsilon}F(\varphi)\right]dx. \tag{11}$$

与许多耗散界面模型类似 [14]，DCH系统也是个耗散系统，它满足如下的能量耗散规律：

$$\frac{dJ_\varepsilon(\varphi)}{dt} + \varepsilon\|\nabla\mu\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\gamma}\|\mathbf{u}\|_{L^2}^2 = 0. \tag{12}$$

上述的能量方程在DCH系统的数学分析起到至关重要的作用。

本文是在 [15]基础上作更一般的假设条件。我们将讨论初边值问题(5)-(10)弱解的存在唯一性，弱解的一些性质。

标准空间$L^p(\Omega), H^q(\Omega)$的范数分别用$\|\cdot\|_{L^p}, \|\cdot\|_{H^q}$表示，$Z^*$代表Banach 空间$Z$ 的的对偶空间。符号$(\cdot,\cdot)$代表空间$L^2(\Omega)$ 上的内积，符号$\langle\cdot,\cdot\rangle$ 代表空间$H^1(\Omega)$ 和空间$H^1(\Omega)^*$的对偶积，空间$L_0^2(\Omega)$代表空间$L^2(\Omega)$ 的子空间，并且在边界上取值为零。本文中，c和C代表与$p,\mu,\varphi,\mathbf{u}$和ε无关的正常数；如果常数和ε有关的话，我们用$C = C(\varepsilon)$来表示，其中$0 < \varepsilon < 1$。

2. PDE分析

我们将保留p,μ,φ，将原方程组变形得到：

$$div(\nabla p + \gamma\varphi\nabla\mu) = 0, (x,t) \in \Omega_T. \tag{13}$$

$$\varphi_t - \varepsilon\Delta\mu - div(\varphi[\nabla p + \gamma\varphi\nabla\mu]) = 0, (x,t) \in \Omega_T. \tag{14}$$

所以，本文研究的偏微分方程的形式就是方程(13), (14)和方程(8):$\mu = -\varepsilon\Delta\varphi + \frac{1}{\varepsilon}f(\varphi)$以及初边值条件(9), (10):

$$div(\nabla p + \gamma\varphi\nabla\mu) = 0, (x,t) \in \Omega_T,$$

$$\varphi_t - \varepsilon\Delta\mu - div(\varphi[\nabla p + \gamma\varphi\nabla\mu]) = 0, (x,t) \in \Omega_T,$$

$$\mu = -\varepsilon\Delta\varphi + \frac{1}{\varepsilon}f(\varphi)(x,t) \in \Omega_T,$$
$$\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial \mu}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} = 0, (x,t) \in \partial\Omega_T,$$
$$\varphi(\cdot,0) = \varphi_0(\cdot), x \in \Omega.$$

我们定义如下形式的弱解 [15]：

定义 2.1 假设$\varphi_0 \in H^1(\Omega)$,如果三重数组$(p,\mu,\varphi)$满足下列条件：

$$p \in L^{\frac{2d}{d+1}}((0,T);H^1(\Omega)\cap L_0^2(\Omega). \tag{15}$$

$$\mu \in L^2((0,T);H^1(\Omega)). \tag{16}$$

$$\nabla p + \gamma\varphi\nabla\mu \in L^2((0,T);\mathbf{L}^2(\Omega)). \tag{17}$$

$$\varphi \in L^\infty((0,T);H^1(\Omega)). \tag{18}$$

$$\varphi_t \in L^{\frac{2d}{d+1}}((0,T);(H^1(\Omega))^*). \tag{19}$$

并且对所有的$t \in (0,T)$,以下都成立：

$$(\nabla p + \gamma\varphi\nabla\mu, \nabla q) = 0 \qquad \forall q \in H^1(\Omega). \tag{20}$$

$$\langle \varphi_t, v\rangle + \varepsilon(\nabla\mu,\nabla v) + (\varphi\left[\nabla p + \gamma\varphi\nabla\mu\right], \nabla v) = 0 \quad \forall v \in H^1(\Omega). \tag{21}$$

$$(\mu,\psi) - \varepsilon(\nabla\varphi,\nabla\psi) - \frac{1}{\varepsilon}(f(\varphi),\psi) = 0 \quad \forall\psi \in H^1(\Omega). \tag{22}$$

且满足初值条件$\varphi(0) = \varphi_0$ 则三重数组(p,μ,φ)被称为方程(13), (14)以及方程(8)(9), (10)的一个弱解。

下面讨论解的存在性.

定理 2.1 设$E(t) = J_\varepsilon(\varphi)$,若初值条件满足$E(0) \le C_0$时，则方程存在定义*2.1*中的弱解。

证明.利用伽辽金近似方法，即用有限维逼近无限维，我们对φ, p, μ构造出近似解，我们将使用$H^1(\Omega)$的一组有限维的正交基向量$\{\omega_i\}_{i=1...m}$，这些基向量所张成的空间我们记为W_m,其中我们找到$p_m, \varphi_m, \mu_m : [0,T] \to W_m$,

$$p_m = \sum_{i=1}^m p_{i,m}\omega_i$$
$$\varphi_m = \sum_{i=1}^m \varphi_{i,m}\omega_i$$

,

$$\mu_m = \sum_{i=1}^m \mu_{i,m}\omega_i.$$

所以我们得到：

$$(\nabla p_m + \gamma\varphi_m\nabla\mu_m, \nabla q) = 0 \qquad \forall q \in H^1(\Omega). \tag{23}$$

$$\left\langle \frac{d}{dt}\varphi_m, v \right\rangle + \varepsilon(\nabla\mu_m, \nabla v) + (\varphi_m\left[\nabla p_m + \gamma\varphi_m\nabla\mu_m\right], \nabla v) = 0 \qquad \forall v \in H^1(\Omega). \tag{24}$$

$$(\mu_m, \psi) - \varepsilon(\nabla\varphi_m, \nabla\psi) - \frac{1}{\varepsilon}(f(\varphi_m), \psi) = 0 \qquad \forall\psi \in H^1(\Omega). \tag{25}$$

在方程(23)中令$q = \omega_i, i = 1, 2...m$并同时乘以$\frac{p_{i,m}}{\gamma}$,然后求和；在方程(24) 中令$v = \omega_i, i = 1, 2...m$,并同时乘以$\mu_{i,m}$,再求和；在方程(25)中令$\psi = \omega_i, i = 1, 2....m$，同时乘以$\frac{d}{dt}\varphi_{i,m}$，再求和，最后将三个式子合并得到：

$$\frac{d}{dt}\left[\varepsilon\left\|\nabla\varphi_m\right\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\varepsilon}((F(\varphi_m), 1)\right] + \varepsilon\left\|\nabla\mu_m\right\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\gamma}\left\|\nabla p_m + \gamma\varphi_m\nabla\mu_m\right\|_{L^2}^2 = 0. \tag{26}$$

我们在上面方程两边同时积分，则得到：

$$E_1(t) + \int_0^t \varepsilon\left\|\nabla\mu_m\right\|_{L^2}^2 + \int_0^t \frac{1}{\gamma}\left\|\nabla p_m + \gamma\varphi_m\nabla\mu_m\right\|_{L^2}^2 = E_1(0). \tag{27}$$

其中$E_1(t) = \int_\Omega \left[\frac{\varepsilon}{2}|\nabla\varphi_m|^2 + \frac{1}{\varepsilon}F(\varphi_m)\right]dx$。

引理 2.1 假设$E(t) = J_\varepsilon(\varphi), E_1(t) = J_\varepsilon(\varphi_m)$,, 其中$m$是有限数，且$W_m$是$H^1(\Omega)$中一组有限维的正交基向量所张成的空间，当$E(0) \le C_0$ 时,则$E_1(0) \le C_0$。

结合引理2.1，利用方程(27)可得到$\|\nabla\varphi_m\|_{L^2}^2 \le C_0, \int_0^t \|\nabla\mu_m\|_{L^2}^2 \le C_0 \int_0^t \|\mathbf{u}_m\|_{L^2}^2 \le C_0$，再通过关系$\nabla p_m = -\mathbf{u}_m - \gamma\varphi_m\nabla\mu_m$，首先对于$d = 2, 3$ 根据Sobolev 嵌入定理：$H^1(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega)$,再由Young不等式和上述估计可得到$\int_0^t \|\nabla p_m\|_{L^{\frac{3}{2}}}^2 \le C_1$,其次在方程(25),令$\psi = \Delta\varphi_m$, 我们可得到

$$\varepsilon\left\|\Delta\varphi_m\right\|_{L^2}^2 \le \frac{1}{2}\left\|\nabla\mu_m\right\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\left\|\nabla\varphi_m\right\|_{L^2}^2 - \frac{c_0}{\varepsilon}\left\|\nabla\varphi_m\right\|_{L^2}^2,$$

进一步得到：

$$\varepsilon\left\|\Delta\varphi_m\right\|_{L^2}^2 \le \frac{1}{2}\left\|\nabla\mu_m\right\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\left\|\nabla\varphi_m\right\|_{L^2}^2 \le C_0. \tag{28}$$

由Gagliardo-Nirenberg不等式，我们有$\|\varphi_m\|_{L^\infty} \le C\left\|\Delta\varphi_m\right\|_{L^2}^{\frac{1}{2d}}\left\|\varphi_m\right\|_{L^6}^{\frac{2d-1}{2d}}$ $(d = 2, 3)$ 由

$$\left\|\nabla p_m\right\|_{L^2}^{\frac{2d}{d+1}} \le C\left\|\mathbf{u}_m\right\|_{L^2}^{\frac{2d}{d+1}} + C\left\|\varphi_m\right\|_{L^\infty}^{\frac{2d}{d+1}}\left\|\nabla\mu_m\right\|_{L^2}^{\frac{2d}{d+1}} \le C\left\|\mathbf{u}_m\right\|_{L^2}^2 + C\left\|\varphi_m\right\|_{L^\infty}^{2d} + C\left\|\nabla\mu_m\right\|_{L^2}^2,$$

由于

$$\left\|\varphi_m\right\|_{L^\infty}^{2d} \le C\|\Delta\varphi_m\|_{L^2}\left\|\varphi_m\right\|_{L^6}^{2d-1} \le C\left\|\Delta\varphi_m\right\|_{L^2}^2 + C_4\left\|\varphi_m\right\|_{H^1}^{4d-1}.$$

再通过$\sup\limits_{t\in(0,T)}\|\nabla\varphi_m\|_{L^2}^2 \le C_0$,得到：$\int_0^t \|\varphi_m\|_{L^2}^2 \le C_T$,其中$C_T$是一个与$T$有关的常数。

我们再对上述式子同时对t求积分，并由上述估计得到：$\int_0^t \|\nabla p_m\|_{L^2}^{\frac{4d}{2d+1}} \le C_2$,$C_2$与$C_0, C_1 d, T$ 有关。再通过方程(24),对任意的$v \in H^1(\Omega)$可得：

$$\langle d_t\varphi_m, v\rangle = -\varepsilon(\nabla\mu_m, \nabla v) + (\varphi_m\mathbf{u}_m, \nabla v) \le \left[\varepsilon\|\nabla\mu_m\|_{L^2} + \|\varphi_m\|_{L^\infty}\|\mathbf{u}_m\|_{L^2}\right]\|\nabla v\|_{L^2}.$$

根据对偶空间范数的定义，知$\|d_t\varphi_m\|_{(H^1(\Omega))^*} \le C_3$,求积分得到$\int_0^t \|d_t\varphi_m\|^2_{(H^1(\Omega))^*} \le C_3$,$C_3$是一个常数。

根据自反空间性质，因此我们得到结果存在$\varphi, p, \mu, \mathbf{u}$，使得$\varphi \in L^\infty((0,T);H^1(\Omega))$，使得$p \in L^{\frac{2d}{d+1}}((0,T);H^1(\Omega)) \cap L^2_0(\Omega)$，使得$\mu \in L^2((0,T);H^1(\Omega))$,根据线性性有$\mathbf{u} = \nabla p + \gamma\varphi\nabla\mu$，接着有$\mathbf{u} \in L^2((0,T);\mathbf{L}^2(\Omega))$ 有:

$$\varphi_m \to \varphi$$

$$p_m \to p$$

$$\mu_m \to \mu$$

$$\mathbf{u}_m \to \mathbf{u}.$$

根据线性性，我们有：

$$(\nabla p + \gamma\varphi\nabla\mu, \nabla q) = 0,$$

可由勒贝格控制收敛定理我们有：

$$\langle \varphi_t, v\rangle + \varepsilon(\nabla\mu, \nabla v) + (\varphi\left[\nabla p + \gamma\varphi\nabla\mu\right], \nabla v) = 0$$

$$(\mu, \psi) - \varepsilon(\nabla\varphi, \nabla\psi) - \frac{1}{\varepsilon}(f(\varphi), \psi) = 0.$$

下面进行能量估计:

定理 2.2 假设$\varphi_0 \in H^1(\Omega)$,$f(\varphi) \in L^2((0,T);H^1(\Omega))$,$\Omega \subset R^d(d = 2,3)$是一个*Lipschitz*区域，以及$J_\varepsilon(\varphi_0) \le C_0$,若$(p,\mu,\varphi)$是方程(20) − (22)的一组弱解，对于$\mathbf{u} = -(\nabla p + \gamma\varphi\nabla\mu)$ 对所有的$t \in (0,T)$,存在一个不依赖于ε的常数$C = C(E(0)) > 0$ 有

$$\int_\Omega \varphi(x,t)dx = \int_\Omega \varphi_0(x)dx. \tag{29}$$

$$E(t) + \int_0^t \left[\varepsilon\left\|\nabla\mu(s)\right\|^2_{L^2} + \frac{1}{\gamma}\left\|\mathbf{u}(s)\right\|^2_{L^2}\right]ds = E(0) < \infty. \tag{30}$$

$$\max_{0\le s\le t}\|\varphi(s)\|^2_{H^1} \le \frac{2C_0}{\varepsilon} + \frac{2c_3}{\varepsilon^2}\left|\Omega\right|. \tag{31}$$

$$\int_0^t \|\mu(s)\|^2_{H^1}ds \le \frac{C_0}{\varepsilon} + \frac{c_3}{\varepsilon^2}\left|\Omega\right|. \tag{32}$$

$$\int_0^t \left\|\mu(s) - \varepsilon^{-1}f(\varphi(s))\right\|^2_{L^2}ds \le \frac{3}{2}C_0 + \frac{3c_3}{2\varepsilon}\left|\Omega\right|. \tag{33}$$

$$\int_0^t \|\varphi_t(s) + \mathbf{u}(s)\cdot\nabla\varphi(s)\|_{(H^1)^*}ds \le \sqrt{C\varepsilon}. \tag{34}$$

$$\int_0^t \|\varphi_t(s)\|^2_{(W^{1,3})^*}ds \le C(\sqrt{C_0\varepsilon + c_3\left|\Omega\right|} + \frac{\sqrt{2}(C_0\varepsilon + c_3\left|\Omega\right|}{\varepsilon^{\frac{3}{2}}}). \tag{35}$$

这里$E(t)=J_\varepsilon(\varphi(t))$,其中$J_\varepsilon(\cdot)$是按照方程(11)来定义的。

证明.方程(29)是在方程(21)中令$v=1$即可得。为了得到方程(30),我们分为两种情况来做：第一种特殊情况，当$\varphi_t\in L^2((0,T);H^1(\Omega))$ 时，我们在方程(20)中设定$q=\frac{p}{\gamma}$,在方程(21)中设定$v=\mu$，在方程(22)中设定$\psi=-\varphi_t$,并把三者相加我们得到：

$$\frac{d}{dt}\left[\varepsilon\left\|\nabla\varphi\right\|_{L^2}^2+\frac{1}{\varepsilon}(F(\varphi),1)\right]+\varepsilon\left\|\nabla\mu\right\|_{L^2}^2+\frac{1}{\gamma}\left\|\nabla p+\gamma\varphi\nabla\mu\right\|_{L^2}^2=0.$$

在方程两边同时取区间$(0,t)$上的积分就可得到方程(30)。

对于一般情况$\varphi_t\in L^{\frac{2d}{d+1}}((0,T);(H^1(\Omega))^*)$,如果此时我们再令$\psi=-\varphi_t$的话，在方程(22)中就没有意义了，因而我们在这里将用到Steklov 平均法技术 [16]。对于$t\in(0,T)$,设$\delta>0$是任意小的数，定义φ的Steklov平均φ^δ：

$$\varphi(\cdot,t)=S_+^\delta(\varphi)(\cdot,t)=\frac{1}{\delta}\int_t^{t+\delta}\varphi(\cdot,s)ds\quad\forall t\in(0,T).$$

对于足够小的δ,

$$\varphi_t^\delta(\cdot,t):=(\varphi^\delta(\cdot,t))_t=\frac{\varphi(\cdot,t+\delta)-\varphi(\cdot,t)}{\delta}.$$

因此，对于每一个$t\in(0,T-\delta)$,有$\varphi_t^\delta(\cdot,t)\in H^1(\Omega)$，按照平均法的结论就有：

$$S_+^\delta(\varphi_t)=(S_+^\delta(\varphi))_t=\varphi_t^\delta. \tag{36}$$

那么我们现在将S_+^δ应用到方程(20) − (22)中去，并用s去换t,我们有：

$$(\nabla p^\delta+\gamma(\varphi\nabla\mu)^\delta,\nabla q)=0\qquad\forall q\in H^1(\Omega). \tag{37}$$

$$(\varphi_t^\delta,v)+\varepsilon(\nabla\mu^\delta,\nabla v)+((\varphi\left[\nabla p+\gamma\varphi\nabla\mu\right])^\delta,\nabla v)=0\quad\forall v\in H^1(\Omega). \tag{38}$$

$$(\mu^\delta,\psi)-\varepsilon(\nabla\varphi^\delta,\nabla\psi)-\frac{1}{\varepsilon}((f(\varphi))^\delta,\psi)=0\ \ \forall\psi\in H^1(\Omega). \tag{39}$$

在方程(39)中令$\psi=-\varphi_t$,在方程(38)中令$v=\mu^\delta$,在方程(37)中令$q=\frac{p^\delta}{\gamma}$,并将三个方程相加，得到

$$\frac{d}{dt}J_\varepsilon(\varphi^\delta)+\varepsilon\left\|\nabla\mu^\delta\right\|_{L^2}^2+\frac{1}{\gamma}\left\|\nabla p^\delta+\gamma(\varphi\nabla\mu)^\delta\right\|_{L^2}^2=R^\delta(t). \tag{40}$$

其中

$$\begin{aligned}R^\delta(t)=&\tfrac{1}{\varepsilon}(f(\varphi^\delta)-(f(\varphi))^\delta-(\nabla p^\delta+\gamma(\varphi\nabla\mu)^\delta,\varphi\nabla\mu^\delta-(\varphi\nabla\mu)^\delta)\\&+(\varphi\left[\nabla p^\delta+\gamma(\varphi\nabla\mu)^\delta\right]-(\varphi\left[\nabla p+\gamma\varphi\nabla\mu\right])^\delta,\nabla\mu^\delta).\end{aligned}$$

在方程(40)两边同时对t积分，我们有：

$$J_\varepsilon(\varphi^\delta(s))+\int_0^s(\varepsilon\left\|\nabla\mu^\delta(t)\right\|_{L^2}^2+\tfrac{1}{\gamma}\left\|\nabla p^\delta(t)+\gamma(\varphi\nabla\mu)^\delta(t)\right\|_{L^2}^2)dt$$
$$=J_\varepsilon(\varphi^\delta(0))+\int_0^s R^\delta(t)dt\,\forall s\in(0,T).$$

注意到，对每一个固定的$\varepsilon>0$,由于$f(\varphi)\in L^2((0,T);H^1(\Omega))$并且$f(\cdot)$ 是个连续函数，所以有$f(\varphi)\in L^2((0,T);H^1(\Omega))$, 令$\delta\to 0^+$,并结合Steklov平均的性质，我们有：

$$\lim_{\delta\to 0^+}\int_0^s R^\delta(t)dt=0,$$

$$J_\varepsilon(\varphi(s))+\int_0^s(\varepsilon\left\|\nabla\mu(t)\right\|_{L^2}^2+\frac{1}{\gamma}\left\|\nabla p(t)+\gamma(\varphi(t)\nabla\mu(t)\right\|_{L^2}^2)dt=J_\varepsilon(\varphi(0).$$

因此，得到(30),从(30)中知$E(t)$是关于时间完全连续的函数。

利用(30)，和我们的假设:

$$F(s)\geq -c_3, c_3\geq 0. \tag{41}$$

我们有$\int_\Omega F(s)dx\geq -c_3|\Omega|(c_3\geq 0)$，则可得到方程(31)。方程(32)可由方程(30)直接得到。方程(33)可由方程(22),方程(31),(32)以及Holder不等式和假设条件$f(s)\geq c_0$得到。由空间关系：$H^1(\Omega)\subset L^2(\Omega)\cong L^2(\Omega)\subset(H^1(\Omega))^*$和方程(21)可得

$$\langle\varphi_t+\mathbf{u}(s)\cdot\nabla\varphi(s),v\rangle=-\varepsilon(\nabla\mu,\nabla v),$$

根据Holder不等式：

$$|\langle\varphi_t+\mathbf{u}(s)\cdot\nabla\varphi(s),v\rangle|=\varepsilon\left|(\nabla\mu,\nabla v)\right|\leq\varepsilon\|\nabla\mu\|_{L^2}\|\nabla v\|_{L^2}.$$

最后再根据对偶范数以及等价范数得到方程(34)。为了得到方程(35)，利用方程(21)和Sobolev嵌入定理：$d=2,3$,有$H^1(\Omega)\hookrightarrow L^6(\Omega)$,对于$v\in W^{1,3}(\Omega)$,

$$\begin{aligned}\langle\varphi_t,v\rangle&=-\varepsilon(\nabla\mu,\nabla v)+(\varphi\mathbf{u},\nabla v)\\&\leq\varepsilon\|\nabla\mu\|_{L^2}\|\nabla v\|_{L^2}+\|\varphi\|_{L^6}\|\mathbf{u}\|_{L^2}\|\nabla v\|_{L^3}\\&\leq C\left[\varepsilon\|\nabla\mu\|_{L^2}+\|\varphi\|_{H^1}\|\mathbf{u}\|_{L^2}\right]\|\nabla v\|_{L^3}\\&\leq C\left[\varepsilon\|\nabla\mu\|_{L^2}+\frac{\sqrt{2C_0\varepsilon+2c_3|\Omega|}}{\varepsilon}\right].\end{aligned}$$

最后利用等价范数和对偶范数我们得到结果 [17]。

接下来介绍弱解还有其他额外的正则性。

引理 2.2 假设$\varphi_0 \in H^1(\Omega)$,$f(\varphi) \in L^2((0,T);H^1(\Omega))$ 以及区域$\Omega \subset R^d(d=2,3)$是一个*Lipschitz*区域,若三重组$(p,\varphi,\mu)$是定义*2.1*的一组弱解,则$\varphi \in L^2((0,T);H^2(\Omega))$。

证明.我们将方程(22)重新写成如下

$$\varepsilon(\nabla\varphi,\nabla\psi) = (\mu - \frac{1}{\varepsilon}f(\varphi),\psi) \qquad \forall\psi \in H^1(\Omega). \tag{42}$$

这里φ是个类似于Poisson方程,并具有齐次Neumann边界条件的一个弱解，其右端项函数为$g = \mu - \frac{1}{\varepsilon}f(\varphi)$，由于$f(\varphi) \in L^2((0,T);H^1(\Omega))$,所以右端函数$g \in L^2((0,T);H^1(\Omega))$,$\varphi \in L^2((0,T);H^2(\Omega)$。

下面我们讨论弱解的唯一性：

定理 2.3 假设$\varphi_0 \in H^1(\Omega)$和$J_\varepsilon(\varphi_0) \le C_0$，其中$C_0$不依赖于$\varepsilon$,并且$\Omega \subset R^d(d=2,3)$是一个*Lipschitz*区域，以及$f(\varphi) \in L^2((0,T);H^1(\Omega))$,当一组弱解$(p,\mu,\varphi)$ 满足正则条件$\nabla p + \gamma\varphi\nabla\mu \in L^{\frac{12}{6-d}}((0,T);L^2(\Omega))$, $\mu \in L^{\frac{12}{6-d}}((0,T);H^1(\Omega))$, $\varphi_t \in L^2((0,T);(H^1(\Omega)^*))$时，其中$p$是一个有限数，则这组弱解是唯一的。

证明.假设$(p_i,\mu_i,\varphi_i), i=1,2$是两组弱解，定义$\mathbf{u}_i = -\nabla p_i - \gamma\varphi_i\nabla\mu_i, i=1,2$, 令$p = p_1 - p_2, \mathbf{u} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2, \mu = \mu_1 - \mu_2, \varphi = \varphi_1 - \varphi_2$, (p_1,μ_1,φ_1),(p_2,μ_2,φ_2)满足对应方程$(20)-(22)$，将二者结合起来，我们得到方程：

$$(\mathbf{u},\nabla q) = 0 \qquad \forall q \in H^1(\Omega). \tag{43}$$

$$\langle\varphi_t, v\rangle + \varepsilon(\nabla\mu,\nabla v) - (\varphi_1\mathbf{u} + \varphi\mathbf{u}_2,\nabla v) = 0 \qquad \forall v \in H^1(\Omega). \tag{44}$$

$$(\mu,\psi) - \varepsilon(\nabla\varphi,\nabla\psi) - \frac{1}{\varepsilon}(f(\varphi_1) - f(\varphi_2),\psi) = 0 \qquad \forall\psi \in H^1(\Omega). \tag{45}$$

由于方程(29),我们可利用$\int_\Omega \varphi(x,t)dx = 0, \forall t \in (0,T)$, 也可通过空间平移得到此结果。

在方程(44)中，令$v = \varphi$,在方程(45)中，令$\psi = \mu$,将二者合并，再通过方程$(\mathbf{u}_2,\nabla(\varphi^2)) = 0 = (\mathbf{u},\nabla(\varphi_1\varphi))$,我们得到：

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\varphi\|_{L^2}^2 + \|\mu\|_{L^2}^2 = -(\mathbf{u}\cdot\nabla\varphi_1,\varphi) + \frac{1}{\varepsilon}(g(\varphi_1,\varphi_2)\varphi,\mu). \tag{46}$$

其中$g(\varphi_1,\varphi_2)$是通过$f(\varphi_1)-f(\varphi_2)$两个多项式通过$n$次方差公式后得来的，即$g(\varphi_1,\varphi_2) = \frac{f(\varphi_1)-f(\varphi_2)}{\varphi_1-\varphi_2}$

利用Schwarz不等式和Gagliardo-Nirenberg不等式 [18]，有

$$\|\varphi\|_{L^\infty} \le C\|\Delta\varphi\|_{L^2}^{\frac{d}{4}}\|\varphi\|_{L^2}^{\frac{4-d}{4}} \;\; (d=2,3).$$

在方程(46)中有

$$\begin{aligned}
\tfrac{d}{dt}\|\varphi\|_{L^2}^2 + 2\|\mu\|_{L^2}^2 &\le 2\|\mathbf{u}\|_{L^2}\|\nabla\varphi_1\|_{L^2}\|\varphi\|_{L^\infty} + \tfrac{2}{\varepsilon}\|g(\varphi_1,\varphi_2)\|_{L^\infty}\|\varphi\|_{L^2}\|\mu\|_{L^2}^2 \\
&\le \tfrac{\varepsilon}{4\gamma}\|\mathbf{u}\|_{L^2}^2 + \tfrac{C}{\varepsilon}\|\nabla\varphi_1\|_{L^2}^2\|\Delta\varphi\|_{L^2}^{\frac{d}{2}}\|\varphi\|_{L^2}^{\frac{4-d}{2}} + \tfrac{2}{\varepsilon}\|g(\varphi_1,\varphi_2)\|_{L^\infty}\|\varphi\|_{L^2}\|\mu\|_{L^2} \\
&\le \tfrac{\varepsilon}{4\gamma}\|\mathbf{u}\|_{L^2}^2 + \tfrac{\varepsilon^2}{16}\|\Delta\varphi\|_{L^2}^2 + C(\varepsilon)\|\nabla\varphi_1\|_{L^2}^{\frac{8}{4-d}}\|\varphi\|_{L^2}^2 + \|\mu\|_{L^2}^2 \\
&\quad + \tfrac{1}{\varepsilon^2}\|g(\varphi_1,\varphi_2)\|_{L^\infty}^2\|\varphi\|_{L^2}^2.
\end{aligned}$$

其中对于右端的某一项$\|g(\varphi_1,\varphi_2)\|_{L^\infty}$,首先对于

$$g(\varphi_1,\varphi_2)=\sum_{k=1}^{2p+1}(\varphi_1^{k-1}+\varphi_1^{k-2}\varphi_2+....+\varphi_1\varphi_2^{k-1}+\varphi_2^{k}).$$

我们有：

$$\|g(\varphi_1,\varphi_2)\|_{L^\infty}\leq\sum_{k=1}^{2p+1}\|\varphi_1\|_{L^\infty}^{k-1}+\|\varphi_1\|_{L^\infty}^{k-2}\|\varphi_2\|_{L^\infty}^{1}+......+\|\varphi_2\|_{L^\infty}^{k-1}.$$

由于$\varphi\in L^\infty(0,T;H^1(\Omega))$,因此$\varphi\in L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega))$,则$\|\varphi\|_{L^\infty}\leq\sup\limits_{t\in(0,T)}\|\varphi\|_{L^\infty}\leq C$, 其中$C$是一个常数，因而$\|g(\varphi_1,\varphi_2)\|_{L^\infty}\leq C_p$,这里$C_p$是一个与$p$有关的常数。

通过(30)得到

$$\frac{d}{dt}\|\varphi\|_{L^2}^2+\|\mu\|_{L^2}^2\leq\frac{\varepsilon}{4\gamma}\|\mathbf{u}\|_{L^2}^2+\frac{\varepsilon}{16}\|\Delta\varphi\|_{L^2}^2+C(\varepsilon,p)\|\varphi\|_{L^2}^2. \tag{47}$$

其中$C(\varepsilon,p)=\frac{{C_p}^2}{\varepsilon^2}>0$

在方程(39)中令$\psi=\Delta\varphi$,得到

$$\begin{aligned}\varepsilon\|\Delta\varphi\|_{L^2}^2&=-(\mu,\Delta\varphi)+\tfrac{1}{\varepsilon}(g(\varphi_1,\varphi_2)\varphi,\Delta\varphi)\\&\leq\tfrac{\varepsilon}{2}\|\Delta\varphi\|_{L^2}^2+\tfrac{1}{\varepsilon}\|\mu\|_{L^2}^2+\tfrac{{C_p}^2}{\varepsilon^2}\|\varphi\|_{L^2}^2.\end{aligned}$$

然后得

$$\frac{\varepsilon^2}{4}\|\Delta\varphi\|_{L^2}^2\leq\frac{1}{2}\|\mu\|_{L^2}^2+C(\varepsilon,p)\|\varphi\|_{L^2}^2. \tag{48}$$

其中$C(\varepsilon,p)>0$

注意到

$$\mathbf{u}=\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2=-\nabla p-\gamma(\varphi_1\nabla\mu_1-\varphi_2\nabla\mu_2)=-\nabla p-\gamma\varphi_1\nabla\mu-\gamma\varphi\nabla\mu_2.$$

在方程(37)中令$q=p$

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{\gamma}\|\mathbf{u}\|_{L^2}^2&=-\tfrac{1}{\gamma}(\mathbf{u},\nabla p)-(\mathbf{u},\varphi_1\nabla\mu)-(\mathbf{u},\varphi\nabla\mu_2)\\&=-(\varphi_1\mathbf{u},\nabla\mu)-(\varphi\mathbf{u},\nabla\mu_2).\end{aligned} \tag{49}$$

在方程(38)中令$v=\mu$,可得

$$\langle\varphi_t,\mu\rangle+\varepsilon\|\nabla\mu\|_{L^2}^2=(\varphi_1\mathbf{u}+\varphi\mathbf{u}_2,\nabla\mu). \tag{50}$$

接下来对方程(39)应用斯特科洛夫平均算法S_+^δ，则有：

$$\langle\mu^\delta,\psi\rangle-\varepsilon(\nabla\varphi^\delta,\nabla\psi)-\frac{1}{\varepsilon}(f(\varphi_1)-f(\varphi_2)^\delta,\psi)=0\qquad\forall\psi\in H^1(\Omega).$$

令$\psi=-\varphi_t^\delta$,上面方程可得

$$-(\mu^\delta,\varphi_t^\delta)+\frac{\varepsilon}{2}\frac{d}{dt}\left\|\nabla\varphi^\delta\right\|_{L^2}^2+\frac{1}{\varepsilon}(f(\varphi_1)-f(\varphi_2))^\delta,\varphi_t^\delta)=0.$$

对δ取极限$\delta\to 0^+$,利用斯特科洛夫平均算子的性质，有

$$-\langle\varphi_t,\mu\rangle+\frac{\varepsilon}{2}\frac{d}{dt}\left\|\nabla\varphi\right\|_{L^2}^2+\frac{1}{\varepsilon}\langle\varphi_t,f(\varphi_1)-f(\varphi_2)\rangle=0. \tag{51}$$

最后把方程(49), (50), (51)加起来，并利用$(\mathbf{u}_2,\nabla(\varphi\mu))=(\mathbf{u},\nabla(\varphi\mu_2))=0$和Young不等式以及Gagliardo-Nirenberg不等式得到

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{\gamma}\left\|\mathbf{u}\right\|_{L^2}^2+\varepsilon\left\|\nabla\mu\right\|_{L^2}^2+\tfrac{\varepsilon}{2}\tfrac{d}{dt}\left\|\nabla\varphi\right\|_{L^2}^2+\tfrac{1}{\varepsilon}\langle\varphi_t,f(\varphi_1)-f(\varphi_2)\rangle\\
&\quad=-(\mathbf{u}_2\cdot\nabla\varphi,\mu)+(\mathbf{u}\cdot\nabla\varphi,\mu_2)\\
&\quad\le C(\|\mathbf{u}_2\|_{L^2}\|\mu\|_{H^1}+\|\mathbf{u}\|_{L^2}\|\mu_2\|_{H^1})(\|\Delta\varphi\|_{L^2}^{\frac{d}{6}}\left\|\nabla\varphi\right\|_{L^2}^{\frac{6-d}{6}}\\
&\quad\le\tfrac{1}{4\gamma}\left\|\mathbf{u}\right\|_{L^2}^2+\tfrac{\varepsilon}{2}\left\|\mu\right\|_{H^1}^2+\tfrac{\varepsilon}{16}\left\|\Delta\varphi\right\|_{L^2}^2\\
&\qquad+C(\varepsilon)(\|\mathbf{u}_2\|_{L^2}^{\frac{12}{6-d}}+\|\mu_2\|_{H^1}^{\frac{12}{6-d}})\left\|\nabla\varphi\right\|_{L^2}^2.
\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}
&\tfrac{3}{4\gamma}\left\|\mathbf{u}\right\|_{L^2}^2+\tfrac{\varepsilon}{2}\left\|\nabla\mu\right\|_{L^2}^2+\tfrac{\varepsilon}{2}\tfrac{d}{dt}\left\|\nabla\varphi\right\|_{L^2}^2+\tfrac{1}{\varepsilon}\langle f(\varphi_1)-f(\varphi_2),\varphi_t\rangle\\
&\qquad\le\tfrac{\varepsilon}{16}\left\|\Delta\varphi\right\|_{L^2}^2+\tfrac{\varepsilon}{2}\left\|\mu\right\|_{L^2}^2+C(\varepsilon)(\|\mathbf{u}_2\|_{L^2}^{\frac{6-d}{12}}+\|\mu_2\|_{H^1}^{\frac{12}{6-d}})\left\|\nabla\varphi\right\|_{L^2}^2.
\end{aligned}$$

接下来对$f(\varphi_1)-f(\varphi_2)$应用拉格朗日中值定理，并由非线性项的假设条件有$f(\varphi_1)-f(\varphi_2)=\dot{f}(\eta)\varphi\ge c_0\varphi$,上式可得：

$$\begin{aligned}
&\tfrac{3}{4\gamma}\left\|\mathbf{u}\right\|_{L^2}^2+\tfrac{\varepsilon}{2}\left\|\nabla\mu\right\|_{L^2}^2+\tfrac{\varepsilon}{2}\tfrac{d}{dt}\left\|\nabla\varphi\right\|_{L^2}^2+\tfrac{c_0}{2\varepsilon}\tfrac{d}{dt}\left\|\varphi\right\|_{L^2}^2\\
&\qquad\le\tfrac{\varepsilon^2}{16}\left\|\Delta\varphi\right\|_{L^2}^2+\tfrac{\varepsilon}{2}\left\|\mu\right\|_{L^2}^2+C(\varepsilon)(\|\mathbf{u}_2\|_{L^2}^{\frac{12}{6-d}}+\|\mu_2\|_{H^1}^{\frac{12}{6-d}})\left\|\nabla\varphi\right\|_{L^2}^2.
\end{aligned}\tag{52}$$

将方程(47), (48)以及方程(53)的ε倍相加起来，有：

$$\begin{aligned}
&\tfrac{d}{dt}\left((\tfrac{c_0}{2}+1)\left\|\varphi\right\|_{L^2}^2+\tfrac{\varepsilon^2}{2}\left\|\nabla\varphi\right\|_{L^2}^2\right)+\tfrac{\varepsilon^2}{8}\left\|\Delta\varphi\right\|_{L^2}^2+\tfrac{\varepsilon}{2\gamma}\left\|\mathbf{u}\right\|_{L^2}^2\\
&\quad+\tfrac{1-\varepsilon^2}{2}\left\|\mu\right\|_{L^2}^2+\tfrac{\varepsilon^2}{2}\left\|\nabla\mu\right\|_{L^2}^2\le C(\varepsilon)(\|\mathbf{u}_2\|_{L^2}^{\frac{12}{6-d}}+\|\mu_2\|_{H^1}^{\frac{12}{6-d}})\left\|\nabla\varphi\right\|_{L^2}^2+C(\varepsilon,p)\left\|\varphi\right\|_{L^2}^2.
\end{aligned}\tag{53}$$

结合定理假设条件，方程(53)可写成：

$$\begin{aligned}
&\tfrac{d}{dt}((\tfrac{c_0}{2}+1)\left\|\varphi\right\|_{L^2}^2+\tfrac{\varepsilon^2}{2}\left\|\nabla\varphi\right\|_{L^2}^2)+\tfrac{\varepsilon^2}{8}\left\|\Delta\varphi\right\|_{L^2}^2+\tfrac{\varepsilon}{2\gamma}\left\|\mathbf{u}\right\|_{L^2}^2\\
&\quad+\tfrac{1-\varepsilon^2}{2}\left\|\mu\right\|_{L^2}^2+\tfrac{\varepsilon^2}{2}\left\|\nabla\mu\right\|_{L^2}^2\le a(t)(\left\|\varphi\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla\varphi\right\|_{L^2}^2).
\end{aligned}\tag{54}$$

其中$a(t)=C(\varepsilon)(\|\mathbf{u}_2\|_{L^2}^{\frac{12}{6-d}}+\|\mu_2\|_{H^1}^{\frac{12}{6-d}})+C(\varepsilon,p)$

对方程(54)两边同时对t取积分$(0,t)$,得：

$$(\frac{c_0}{2}+1)\|\varphi\|_{L^2}^2+\frac{\varepsilon^2}{2}\|\nabla\varphi\|_{L^2}^2\leq\int_0^t a(s)(\|\varphi(s)\|_{L^2}^2+\|\nabla\varphi(s)\|_{L^2}^2)dt. \tag{55}$$

通过Gronwall不等式，我们得到：

$$(\frac{c_0}{2}+1)\|\varphi\|_{L^2}^2+\frac{\varepsilon^2}{2}\|\nabla\varphi\|_{L^2}^2\leq\left[(\frac{c_0}{2}+1)\|\varphi(0)\|_{L^2}^2+\frac{\varepsilon^2}{2}\|\nabla\varphi(0)\|_{L^2}^2\right]\exp\left\{\int_0^T a(s)ds\right\}. \tag{56}$$

由定理假设条件可知，$\int_0^T a(s)ds<\infty$,因此有$\varphi(t)=0$,对任意的$t\in(0,T)$,所以定理证明完成。

参考文献

[1] Li, J., Li, X.C. and Liao, S.J. (2019) Stability and Hysteresis of Faraday Waves in Hele-Shaw Cells. *Journal of Fluid Mechanics*, **871**, 694-716. https://doi.org/10.1017/jfm.2019.335

[2] Singare, A.A., Kale, B.S. and Bhole, K.S. (2018) Experimental Characterization of Meso-Micro Fractals from Nanoparticle Seeded Resin in Lifting Plate Hele-Shaw Cell. *Materials Today: Proceedings*, **5**, 24213-24220. https://doi.org/10.1016/j.matpr.2018.10.216

[3] Klaasen, B., Verhaeghe, F., Blanpain, B. and Fransaer, J. (2015) Observing Nitrogen Bubbles in Liquid Zinc in a Vertical Hele-Shaw Cell. *Metallurgical and Materials Transactions B*, **46**, 621-634. https://doi.org/10.1007/s11663-014-0281-y

[4] Valentine, M.L., Waterland, M.K., Fathizadeh, A., Elber, R. and Baiz, C.R. (2021) Interfacial Dynamics in Lipid Membranes: The Effects of Headgroup Structures. *The Journal of Physical Chemistry B*, **125**, 1343-1350. https://doi.org/10.1021/acs.jpcb.0c08755

[5] Song, Y.-Q., Khan, S.A., Imran, M., Waqas, H., Khan, S.U., Khan, M.I., Qayyum, S. and Chu, Y.-M. (2021) Applications of Modified Darcy Law and Nonlinear Thermal Radiation in Bioconvection Flow of Micropolar Nanofluid over an Off Centered Rotating Disk. *Alexandria Engineering Journal*, **60**, 4607-4618. https://doi.org/10.1016/j.aej.2021.03.053

[6] Jacobs, M., Kim, I. and Tong, J. (2021) Darcy's Law with a Source Term. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **239**, 1349-1393. https://doi.org/10.1007/s00205-020-01595-3

[7] Saylor, D.M., Forrey, C., Kim, C.S. and Warren, J.A. (2016) Diffuse Interface Methods for Modeling Drug-Eluting Stent Coatings. *Annals of Biomedical Engineering*, **44**, 548-559. https://doi.org/10.1007/s10439-015-1375-7

[8] McFadden, G.B. (2002) Phase-Field Models of Solidification. *Contemporary Mathematics*, **295**, 107-145.

[9] Cahn, J.W. and Hilliard, J.E. (1958) Free Energy of a Nonuniform System I. Interfacial Free Energy. *The Journal of Chemical Physics*, **28**, 258-267. https://doi.org/10.1063/1.1744102

[10] Lowengrub, J. and Truskinovsky, I. (1998) Cahn-Hilliard Fluids and Topolpgical Transitions. *Proceedings of the Royal Society A*, **454**, 2617-2654. https://doi.org/10.1098/rspa.1998.0273

[11] 石金诚, 李远飞. 多孔介质中的Darcy方程组解的结构稳定性[J]. 浙江大学学报, 2021, 48(3): 298-303.

[12] Zhao, X.P., Liu, F.N. and Meng, H.C. (2021) Global Well-Posedness of Solutions for the Sixth Order Convective Cahn-Hilliard Equation. *Journal of Mathematical Research with Applications*, **41**, 150-160.

[13] Lee, H.-G., Lowengrub, J. and Goodman, J. (2002) Modeling Pinch-Off and Reconstruction in a Hele-Shaw Cell. I. The Models and Their Calibration. *Physics of Fluids*, **14**, 492-513. https://doi.org/10.1063/1.1425843

[14] Anderson, D.M., McFadden, G.B. and Wheeler, A.A. (1998) Diffuse-Interface Methods in Fluid Mechanics. *Annual Review of Fluid Mechanics*, **30**, 139-165. https://doi.org/10.1146/annurev.fluid.30.1.139

[15] Feng, X.B. and Wise, S. (2012) Analysis of a Darcy-Cahn-Hilliard Diffuse Interface Model for the Hele-Shaw Flow and Its Fully Discrete Finite Element Approximation. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **50**, 1320-1343. https://doi.org/10.1137/110827119

[16] Novikov, R.G. and Taimanov, I.A. (2018) Darboux Moutard Transformations and Poincaré—Steklov Operators. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, **302**, 315-324. https://doi.org/10.1134/S0081543818060160

[17] 张世清. 泛函分析及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2018.

[18] Agueh, M. (2006) Sharp Gagliardo-Nirenberg Inequalities and Mass Transport Theory. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, **18**, 1069-1093. https://doi.org/10.1007/s10884-006-9039-9