Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2021, 10(7), 2442-2456
Published Online July 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2021.107256

非自治Boissonade系统解的长时间性态刻画

崔振琼*，杨成明

上海师范大学，上海
Email: *zhqcuimath@126.com

收稿日期：2021年6月19日；录用日期：2021年7月11日；发布日期：2021年7月22日

摘 要

这篇论文主要包括以下两个方面：首先证明了自治Boissonade 系统弱解的唯一性．因为自治Boissonade系统的二次项是uv而不是u^2，所以在证明弱解的唯一性时与一般方法有所差别，因此，本文给出了证明弱解唯一性的具体方法．最后，根据一致吸引子存在的充分必要条件证明了非自治Boissonade 系统的一致吸引子在E 中的存在性。

关键词

非自治动力系统，一致吸引子，连续过程，全局吸引子，平移有界

Long Time Characterization of Solutions of Nonautonomous Boissonade Systems

Zhenqiong Cui*, Chengming Yang

Shanghai Normal University, Shanghai
Email: *zhqcuimath@126.com

Received: Jun. 19th, 2021; accepted: Jul. 11th, 2021; published: Jul. 22nd, 2021

* 通讯作者。

文章引用: 崔振琼, 杨成明. 非自治Boissonade系统解的长时间性态刻画[J]. 应用数学进展, 2021, 10(7): 2442-2456.
DOI: 10.12677/aam.2021.107256

Abstract

This paper mainly includes the following two aspects: Firstly, we prove the uniqueness of weak solution of autonomous Boissonade system. Because the quadratic term of the autonomous Boissonade system is uv instead of u^2, it is different from the general method when proving the uniqueness of weak solution. Therefore, this paper gives a specific method to prove the uniqueness of weak solution. Finally, according to the sufficient and necessary conditions for the existence of uniform attractor, the existence of uniform attractor in E of non-autonomous Boissonade system is proved.

Keywords

Non-Autonomous Dynamical Systems, Uniform Attractor, Continuous Process, Global Attractor, Translation Bounded

1. 引言

自20世纪60年代以来, 解的全局适定性、渐进性以及与之相关的无穷维动力系统的研究已经成为非线性发展方程领域中最重要的方面. 在无穷维动力系统的研究中, 对于自治系统, 我们主要研究全局吸引子的存在性理论；主要结果可以参看文献 [1]. 对于非自治系统，我们研究一致吸引子和轨迹吸引子的存在性理论.

首先Haraux [2]考虑了非自治动力系统的一些特殊类型, 并给出了与自治系统的全局吸引子相平行的, 也就是一致吸引子的概念.随后, Chepyzhov and Vishik [3]提出了非自治动力系统的一致吸引子存在性的一般方法, 其核心思想是在拓展的相空间上构造斜积流. Ma [4]利用非紧性测度的性质给出了非自治无穷维动力系统一致吸引子存在的充分必要条件, 随后, Zhong [5]利用这个充分必要条件证明了非自治2D Navier-Stokes 方程在V中存在一致吸引子.

受Zhong [5]的启发, 本文主要考虑下列非自治Boissonade 系统

$$\frac{\partial u}{\partial t}=d_1\Delta u+u-\alpha v+\gamma uv-u^3+h_1(t,x), \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}=d_2\Delta v+u-\beta v+h_1(t,x), \tag{1.2}$$

$$u(t,x)=v(t,x)=0,\quad t>\tau,\quad x\in\partial\Omega, \tag{1.3}$$

$$u(\tau,x)=u_\tau(x),\quad v(\tau,x)=v_\tau(x),\quad x\in\Omega. \tag{1.4}$$

的一致吸引子的存在性. 其中$(t,x)\in(\tau,\infty)\times\Omega$, $\Omega\subset\mathbb{R}^n(n\leq 3)$是具有局部Lipschitz光滑边界的有界区域，$\tau\in\mathbb{R}^+$,系数$d_1$, d_2, α , β 都是正常数. 记$f_1(u,v)=-u+\alpha v-\gamma uv+u^3$, $f_2(u,v)=-u+\beta v$，那么存在常数$C_i>0$, $k_i>0$, $i=1\cdots,4$, 使得

$$C_1|u|^4-k_1\leq f_1(u,v)u\leq C_2|u|^4+k_2, \tag{1.5}$$

$$C_3|v|^2-k_3\leq f_2(u,v)v\leq C_4|v|^2+k_4. \tag{1.6}$$

在本文中, 定义乘积空间如下:

$$H=L^2(\Omega)\times L^2(\Omega),\quad E=H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega),\quad \Pi=H_0^1(\Omega)\cap H^2\times H_0^1(\Omega)\cap H^2.$$

用$\|\cdot\|$和$(\cdot,\cdot)$分别表示H 或者$L^2(\Omega)$的范数与内积, 如果$p\neq 2$, 那么就用$\|\cdot\|_{L^p}$来表示$L^p(\Omega)$的范数, Lebesgue 测度或者Euclid空间的向量范数都记为$|\cdot|$, 由Poincar$\acute{e}$ 不等式我们知道存在一个常数$\eta>0$, 使得

$$\|\bigtriangledown\xi\|^2\geq\eta\|\xi\|^2,\quad \forall\xi\in H_0^1(\Omega). \tag{1.7}$$

所以E中元素ξ 的范数$\|\xi\|_E$就用$\|\bigtriangledown\xi\|$来表示.

2. 预备知识

这一节主要介绍非自治动力系统的一些基本概念.

定义 2.1 设Σ 是一个参数集, X是一个$Banach$空间, 如果含有两个参数的映射族$U_\sigma(t,\tau):E\to E$满足

$$U_\sigma(t,s)U_\sigma(s,\tau)=U_\sigma(t,\tau),\quad \forall t\geq s\geq\tau,\quad \tau\in\mathbb{R}^+, \tag{2.1}$$

$$U_\sigma(\tau,\tau)=I_d,\quad \tau\in\mathbb{R}^+. \tag{2.2}$$

那么称$U_{\sigma(t,\tau)}$是一个半过程.

如果对每一个$\sigma\in\Sigma$, $U_\sigma(t,\tau)$都是一个半过程，那么称$U_\sigma(t,\tau),t\geq\tau,\tau\in\mathbb{R}^+,\sigma\in\Sigma$是$Banach$空间$E$上的过程族. 其中$\Sigma$被称为符号空间, σ 被称为符号.

定义 2.2 存在E中的一个集合B_0,如果对于任意的$\tau \in \mathbb{R}^+$, E中任意的有界集B, 都存在$T_0 = T_0(B) \geq \tau$, 使得当$t \geq T_0$ 时, 有

$$\cup_{\sigma\in\Sigma} U_\sigma(t,\tau)B \subset B_0.$$

那么我们称B_0是半过程$\{U_\sigma(t,\tau)\}, \sigma \in \Sigma$在$E$中的一致吸收集.

定义 2.3 若函数$\varphi \in L^2_{Loc}(\mathbb{R})$; H满足

$$\|\varphi\|^2_{L^2_b} = \|\varphi\|^2_{L^2_b(\mathbb{R};H)} = \sup_{t\in\mathbb{R}} \int_t^{t+1} \|\varphi\|^2_H ds \leq \infty,$$

则称φ是平移有界的.

定义 2.4 如果对任意的$\tau \in \mathbb{R}_+$, E中的有界集B, 以及任意的$\varepsilon > 0$, 存在$t_0 = t_0(\tau, B, \varepsilon) \geq \tau$和$E$的一个有限维子空间$E_1$, 使得

(i) $P(\cup_{\sigma\in\Sigma} \cup_{t\geq t_0} U_\sigma(t,\tau)B)$有界,

(ii) $\|(I-p)(\cup_{\sigma\in\Sigma} \cup_{t\geq t_0} U_\sigma(t,\tau)x)\| \leq \varepsilon, \quad \forall x \in B,$

则称过程族$U_\sigma(t,\tau), \sigma \in \Sigma$满足一致(关于$\sigma \in \Sigma$)条件($C$).
其中$p : E \to E_1$是有界算子.

假设 2.1 设$\{T(h)|h \geq 0\}$是作用在Σ上的算子族且满足

(i) $T(h)\Sigma = \Sigma, \quad \forall h \in \mathbb{R}^+,$

(ii) (平移不变形)$U_\sigma(t+h, \tau+h) = U_{T(h)\sigma}(t,\tau), \quad \forall \sigma \in \Sigma, \quad t \geq \tau, \quad \tau \in \mathbb{R}^+, \quad h \geq 0.$

定理 2.1 在假设2.1成立的条件下, $U_\sigma(t,\tau)$,$\sigma \in \Sigma$是定义在$Banach$空间E上的一个半过程，如果它满足

(i) 有一个一致(关于$\sigma \in \Sigma$)吸收集,

(ii) 满足一致(关于$\sigma \in \Sigma$)条件(C).

那么就称半过程$U_\sigma(t,\tau)$,$\sigma \in \Sigma$在E中存在一个紧的一致吸引子.

3. 吸收集的存在性

为了方便，我们通常把$u(x,t), v(x,t)$ 写成$u(t), v(t)$ 或者直接写成u, v.
由解析半群的生成定理文献 [6], 初边值问题(1.1) – (1.4) 可以写成下面的初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} = Ag + f(g) + h(t), \quad t > 0. \\ g(0) = g_0 = (u_0, v_0) \in H. \end{cases} \tag{3.1}$$

其中

$$g=\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}d_1\Delta & 0\\ 0 & d_1\Delta\end{pmatrix},\quad f(g)=\begin{pmatrix}u-\alpha v+\gamma uv-u^3\\ u-\beta v\end{pmatrix},\quad h(t)=\begin{pmatrix}h_1(x,t)\\h_2(x,t)\end{pmatrix}.$$

具体细节可以参考文献 [7].

注 3.1 *对于问题(3.1), 对于给定的符号$h(t)$, 我们就记符号空间$\Sigma=\mathcal{H}(g)$, 其中$\mathcal{H}(g)$表示g在$L^2_{Loc}(\mathbb{R};H)$中的闭包. 更多细节可参考文献 [8].*

引理 3.1 *对任意的$\tau,T\in\mathbb{R},T>\tau$, 如果$u_\tau\in H$, 则初值问题(3.1) 存在唯一的局部弱解解$g(t)=(u(t),v(t)),t\in(\tau,T)$ 满足*

$$g\in C([\tau,T];H)\cap L^2(\tau,T;E)).$$

证明. 初值问题(3.1)解的存在性通过Galerkin逼近的方法可以得到, 具体细节见文献.下面我们证明弱解的唯一性. 设(u_1,v_1)和(u_2,v_2) 都是初边值问题(1.1) – (1.4) 以(u_τ,v_τ) 为初值的两个解, 由弱解的定义，我们有

$$\begin{aligned}&<\frac{\partial(u_1-u_2)}{\partial t},u_1-u_2>-(d_1\bigtriangledown(u_1-u_2),\bigtriangledown(u_1-u_2))\\&\qquad=(u_1-u_2-\alpha v_1-\alpha v_2+\gamma u_1v_1-\gamma u_2v_2-u_1^3+u_2^3,u_1-u_2),\end{aligned}\tag{3.2}$$

$$\begin{aligned}&<\frac{\partial(v_1-v_2)}{v_1-v_2},v_1-v_2>-(d_2\bigtriangledown(v_1-v_2),\bigtriangledown(v_1-v_2))\\&\qquad=(u_1-u_2-\beta v_1+\beta v_2,v_1-v_2),\end{aligned}\tag{3.3}$$

其中$<\cdot,\cdot>$表示H^1 与H^{-1}的对偶积. 我们先计算下面这个不等式

$$\begin{aligned}&\int_\Omega\gamma(u_1v_1-u_2v_2)(u_1-u_2)dx=\int_\Omega\gamma[v_1(u_1-u_2)^2+u_2(v_1-v_2)(u_1-u_2)]dx\\
&\le\gamma\left(\int_\Omega v_1^4dx\right)^{\frac14}\left(\int_\Omega(u_1-u_2)^2dx\right)^{\frac12}\left(\int_\Omega(u_1-u_2)^4dx\right)^{\frac14}\\
&+\gamma\left(\int_\Omega u_2^2dx\right)^{\frac12}\left(\int_\Omega(v_1-v_2)^4dx\right)^{\frac14}(\int_\Omega(u_1-u_2)^4dx)^{\frac14}\\
&\le\gamma\|v_1\|_{L_4}\|u_1-u_2\|\|u_1-u_2\|_{L^4}+\gamma\|u_2\|\|v_1-v_2\|_{L^4}\|u_1-u_2\|_{L^4}\\
&\le C^2\gamma\|v_1\|_{H_0^1}\|u_1-u_2\|\|u_1-u_2\|_{H_0^1}+C^2\gamma\|u_2\|\|v_1-v_2\|_{H_0^1}\|u_1-u_2\|_{H_0^1}\\
&\le\frac{C^4\gamma^2}{d_1}\|v_1\|^2_{H_0^1}\|u_1-u_2\|^2+\frac{d_1}{4}\|u_1-u_2\|^2_{H_0^1}+\frac{C^4M^2\gamma^2}{d_1}\|v_1-v_2\|^2_{H_0^1}+\frac{d_1}{4}\|u_1-u_2\|^2_{H_0^1}\\
&=\frac{C^4\gamma^2}{d_1}\|v_1\|^2_{H_0^1}\|u_1-u_2\|^2+\frac{C^4M^2\gamma^2}{d_1}\|v_1-v_2\|^2_{H_0^1}+\frac{d_1}{2}\|u_1-u_2\|^2_{H_0^1},\end{aligned}\tag{3.4}$$

其中用到了下面的嵌入不等式

$$\|\varphi\|_{L^4} \leq C\|\varphi\|_{H_0^1}, \quad for \quad \varphi \in H_0^1.$$

(3.2) 式可以写成

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_1-u_2\|^2 + d_1\|u_1-u_2\|_{H_0^1} \\
&\quad = \int_\Omega [(u_1-u_2)^2 - \alpha(v_1-v_2)(u_1-u_2) + \gamma(u_1v_1-u_2v_2)(u_1-u_2) \\
&\quad - (u_1^3-u_2^3)(u_1-u_2)]dx \\
&\quad \leq \int_\Omega [(u_1-u_2)^2 + \frac{\alpha}{2}(v_1-v_2)^2 + \frac{\alpha}{2}(u_1-u_2)^2 + \gamma(u_1v_1-u_2v_2)(u_1-u_2)]dx,
\end{aligned} \tag{3.5}$$

把(3.4) 代入(3.5) 再乘以2得到

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_1-u_2\|^2 + d_1\|u_1-u_2\|_{H_0^1} \\
&\quad \leq 2\|u_1-u_2\|^2 + \alpha\|u_1-u_2\|^2 + \alpha\|v_1-v_2\|^2 \\
&\quad + \frac{2C^4\gamma^2}{d_1}\|v_1\|_{H_0^1}^2\|v_1-v_2\|^2 \\
&\quad + \frac{2C^4M^2\gamma^2}{d_1}\|v_1-v_2\|^2.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

(3.3) 式也可以写成

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|v_1-v_2\|^2 + 2d_2\|v_1-v_2\|_{H_0^1}^2 \\
&\quad = \int_\Omega [(u_1-u_2)(v_1-v_2) - \beta(v_1-v_2)(v_1-v_2)]dx \\
&\quad \leq \|u_1-u_2\|^2 + \|v_1-v_2\|^2 + 2\beta\|v_1-v_2\|^2.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

(3.7) 式乘以$\frac{3C^4M^2\gamma^2}{2d_1d_2}$得到

$$\begin{aligned}
&\frac{3C^4M^2\gamma^2}{2d_1d_2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|v_1-v_2\|^2 + \frac{3C^4M^2\gamma^2}{d_1}\|v_1-v_2\|_{H_0^1}^2 \\
&\quad \leq \frac{3C^4M^2\gamma^2}{2d_1d_2}\|u_1-u_2\|^2 + \frac{3C^4M^2\gamma^2}{2d_1d_2}\|v_1-v_2\|^2 \\
&\quad + \frac{3C^4M^2\gamma^2\beta}{d_1d_2}\|v_1-v_2\|^2.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

将(3.6) 与(3.8)两式相加得到

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\|u_1-u_2\|^2+\frac{3C^4M^2\gamma^2}{2d_1d_2}\|v_1-v_2\|^2\right)+d_1\|u_1-u_2\|_{H_0^1}+\frac{C^4M^2\gamma^2}{d_1}\|v_1-v_2\|_{H_0^1}^2\\
&\le\left(2+\alpha+\frac{3C^4M^2\gamma^2}{2d_1d_2}+\frac{2C^4\gamma^2}{d_1}\|v_1\|_{H_0^1}\right)\|u_1-u_2\|^2\\
&+\left(\alpha+1+\frac{3C^4M^2\gamma^2\beta}{d_1d_2}\right)\frac{2d_1d_2}{3C^4M^2\gamma^2}\frac{3C^4M^2\gamma^2}{2d_1d_2}\|v_1-v_2\|^2\\
&\le\left[2+\alpha+\frac{3C^4M^2\gamma^2}{2d_1d_2}+\frac{2C^4\gamma^2}{d_1}\|v_1\|_{H_0^1}+\left(\alpha+1+\frac{3C^4M^2\gamma^2\beta}{d_1d_2}\right)\frac{2d_1d_2}{3C^4M^2\gamma^2}\right]\\
&\left(\|u_1-u_2\|^2+\frac{3C^4M^2\gamma^2}{2d_1d_2}\|v_1-v_2\|^2\right).
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

利用Gronwall’s 不等式，我们有

$$
\begin{aligned}
&\|u_1-u_2\|^2+\frac{3C^4M^2\gamma^2}{2d_1d_2}\|v_1-v_2\|^2\\
&\le e^{\int_0^t[2+\alpha+\frac{3C^4M^2\gamma^2}{2d_1d_2}+\frac{2C^4\gamma^2}{d_1}\|v_1(s)\|_{H_0^1}+(\alpha+1+\frac{3C^4M^2\gamma^2\beta}{d_1d_2})\frac{2d_1d_2}{3C^4M^2\gamma^2}]ds}\\
&(\|u_{10}-u_{20}\|^2+\frac{3C^4M^2\gamma^2}{2d_1d_2}\|v_{10}-v_{20}\|^2)\\
&=0.
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

因此, 我们得到$u_1=u_2, v_1=v_2$, 这表明初值问题(3.1)的弱解是唯一的. 从(3.10)中我们还可以得到解对初值的连续依赖性.

引理 3.2 对任意的$\tau,T\in\mathbb{R},T>\tau$, 如果$u_\tau\in E$, 则初值问题(3.1) 存在唯一的强解$g(t)=(u(t),v(t)),t\in(\tau,T)$ 满足

$$g\in C([\tau,T];E)\cap L^2(\tau,T;D(A)).$$

定理 3.1 对任意的$\tau,T\in\mathbb{R},T>\tau,ifu_\tau\in E$, 非自治*Boissonade* 发展方程(3.1)存在唯一的整体强解$g(t)=(u(t),v(t)),t\in(\tau,\infty)$

由定理3.1 知非自治Boissonade 发展方程(3.1)的整体强解定义了E上的一个半过程:

$$\{U_\sigma(t,\tau)\}:U_\sigma(t,\tau)g_\tau=g(t)=(u(t),v(t)).$$

引理 3.3 若$h(t) \in L^2_{Loc}(\mathbb{R}_\tau; H)$ 是平移有界的，则存在常数$K_1 > 0$, 使得闭球

$$B_1 = g\{\in V : \|g\|_E^2 \leq K_1\}$$

是半过程$\{U_\sigma(t,\tau)\}, \sigma \in \Sigma$在$V$中的一致(关于$\sigma \in \Sigma$) 吸收集, 即对任意的有界集$B \subset H$, 存在时间$T_B > 0$, 使得对任意的$t \geq T_B$, $g_\tau \in B, \sigma \in \Sigma$, 有

$$\|U_\sigma(t,\tau)g_\tau\|_E^2 \leq K_1.$$

这个引理的证明请参考文献 [9]

引理 3.4 若$h(t) \in L^2_{Loc}(\mathbb{R}_\tau; H)$ 是平移有界的，则存在常数$K_p > 0$, 使得对任意的有界集$B \subset H$, 存在时间$t_B > 0$, 对任意的$t \geq t_B$, $g_\tau \in B, \sigma \in \Sigma$, 有

$$\|U_\sigma(t,\tau)g_\tau\|_{L^p}^2 \leq K_p.$$

这个引理的证明请参考文献 [10]。

4. 一致吸引子的存在性

引理 4.1 设$\varphi \in L^2_{Loc}(\mathbb{R}; L^2(\Omega))$, 如果对任意的$\varepsilon \geq 0$, 存在常数$\eta > 0$, 使得

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \int_t^{t+\eta} \|\varphi\|_E^2 ds \leq \varepsilon.$$

成立,则称φ 是正规的.

$L^2_{Loc}(\mathbb{R}; L^2(\Omega))$中所有正规函数的集合记成$L^2_n(\mathbb{R}; L^2(\Omega))$.

引理 4.2 如果一个函数$\varphi_0 \in L^2_n(\mathbb{R}; E)$, 那么对任意的$\tau \in \mathbb{R}$, 有

$$\lim_{\gamma\to\infty} \sup_{t\geq\tau} \int_\tau^t e^{-\gamma(t-s)}\|\varphi(s)\|_E^2 ds = 0.$$

引理 4.3 若$h_1(t,x), h_2(x,t) \in L^2_{Loc}(\mathbb{R}; L^2(\Omega))$是正规的, 则对任意的$\varepsilon \geq 0$, 和任意的有界集$B \subset H$, $(u_\tau, v_\tau) \subset B$, 存在$M \leq 0, t_0 \leq 0, \eta \leq 0$ 使得

$$\int_t^{t+\eta}\int_{\Omega(u\geq M)} |u|^3|(u-M)_+|^3 dxds \leq \varepsilon, \quad t \geq t_0, \quad \sigma \in \Sigma, \tag{4.1}$$

$$\int_t^{t+\eta}\int_{\Omega(u\leq -M)} |u|^3|(u+M)_-|^3 dxds \leq \varepsilon, \quad t \geq t_0, \quad \sigma \in \Sigma, \tag{4.2}$$

$$\int_t^{t+\eta}\int_{\Omega(v\geq M)} |v||(v-M)_+| dxds \leq \varepsilon, \quad t \geq t_0, \quad \sigma \in \Sigma, \tag{4.3}$$

$$\int_t^{t+\eta}\int_{\Omega(v\le -M)}|v||(v+M)_-|dxds\le\varepsilon,\quad t\ge t_0,\quad \sigma\in\Sigma, \tag{4.4}$$

成立, 其中

$$(u-M)_+=\begin{cases}u-M, & u\ge M,\\ 0, & u\le M.\end{cases}\qquad (u+M)_-=\begin{cases}u+M, & u\le -M,\\ 0, & u\ge -M.\end{cases}$$

$$(v-M)_+=\begin{cases}v-M, & v\ge M,\\ 0, & v\le M.\end{cases}\qquad (v+M)_-=\begin{cases}v+M, & v\le -M,\\ 0, & v\ge -M.\end{cases}$$

定理 4.1 如果$h_1(x,t),h_2(x,t)\in L^2_{Loc}(\mathbb{R}_\tau;H)$是正规的, $f_1(u,v)$, $f_2(u,v)$ 满足(1.5) 和(1.6), 那么对应于初值问题(2.1) 的半过程$U_\sigma(t,\tau)$ 存在一个一致(关于$\sigma\in\Sigma$) 吸引子.

证明. 由引理3.2知，半过程$U_\sigma(t,\tau)$在V中有一个一致(关于$\sigma\in\Sigma$)吸收集B_1.
下面我们证明一致条件(C). 因为$(-\Delta)^{-1}$ 是H中的连续紧算子,由经典谱理论知存在序列$\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty}$:

$$0<\lambda_1\le\lambda_2\le\cdots\le\lambda_i\le\cdots,\quad \lambda_j\to\infty,\quad as\quad j\to\infty, \tag{4.5}$$

和$D(-\Delta)$ 中在H中正交的一族函数$\{\omega_j\}_{j=1}^{\infty}$, 满足

$$-\Delta\omega_j=\lambda_j\omega_j,\quad \forall j\in N.$$

记$\widehat{V}_m=span\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_m\}\subset H_0^1(\Omega)$, $P_m:V\to V_m$ 是正交算子, 其中$V_m=\widehat{V}_m\times\widehat{V}_m$. 对任意g $\in D(-\Delta)$, 写成

$$g=P_mg+(I-P_m)g=g_1+g_2$$

其中$g_1=(u_1,v_1),\quad g_2=(u_2,v_2)$. 对任意固定的$\widetilde{h_1},\widetilde{h_2}\in\Sigma$, 将((1.1), $-\Delta u_2$) 和((1.2), $-\Delta v_2$) 相加, 我们得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|u_2\|^2_{H_0^1}+\|v_2\|^2_{H_0^1})+d_1\|\Delta u_2\|^2+d_2\|\Delta v_2\|^2\\ &=(f_1(u,v),\Delta u_2)-(\widetilde{h_1}(t),\Delta u_2)\\ &+(f_2(u,v),\Delta v_2)-(\widetilde{h_2}(t),\Delta v_2).\end{aligned} \tag{4.6}$$

由(1.3) 可知

$$|f_1(u,v)|\le C_1(|u|^3+1).$$

由Young's 不等式, 我们得到

$$
\begin{aligned}
|(f_1(u,v),\Delta u_2)| &\le \|f_1(u,v)\|\|\Delta u_2\| \\
&\le \frac{d_1}{4}\|\Delta u_2\|^2+\frac{1}{d_1}\|f_1(u,v)\|^2 \\
&\le \frac{d_1}{4}\|\Delta u_2\|^2+\frac{1}{d_1}\int_\Omega C_1^2(|u|^3+1)^2dx \\
&\le \frac{d_1}{4}\|\Delta u_2\|^2+\frac{2C_1^2}{d_1}|\Omega|+\frac{2C_1^2}{d_1}\int_\Omega |u|^6dx \\
&\le \frac{d_1}{4}\|\Delta u_2\|^2+\frac{2C_1^2}{d_1}|\Omega|+\frac{2C_1^2}{d_1}\int_{\Omega(|u|\ge M)}|u|^6dx+\frac{2C_1^2}{d_1}\int_{\Omega(|u|\le M)}|u|^6dx \\
&\le \frac{d_1}{4}\|\Delta u_2\|^2+\frac{2C_1^2}{d_1}|\Omega|+\frac{2C_1^2M^6}{d_1}|\Omega|+\frac{2C_1^2}{d_1}\int_{\Omega(|u|\ge M)}|u|^6dx,
\end{aligned}
\tag{4.7}
$$

以及

$$
\begin{aligned}
|(\widetilde{h_1}(t),-\Delta u_2)| &= |\int_\Omega \widetilde{h_1}(t)(-\Delta u_2)dx| \\
&\le \|\widetilde{h_1}(t)\|^2\|\Delta u_2\|^2 \\
&\le \frac{d_1}{4}\|\Delta u_2\|^2+\frac{1}{d_1}\|\widetilde{h_1}(t)\|^2.
\end{aligned}
\tag{4.8}
$$

由(1.4) 可知

$$
|f_2(u,v)|\le C_2(|u|+1).
$$

由Young's 不等式,我们得到

$$
\begin{aligned}
|f_2(u,v),\Delta v_2| &= |\int_\Omega f_2(u,v)\Delta v_2dx| \\
&\le \|f_2(u,v)\|\|\Delta v_2\| \\
&\le \frac{d_2}{4}\|\Delta v_2\|^2+\frac{1}{d_2}\|f_2(u,v)\|^2 \\
&\le \frac{d_2}{4}\|\Delta v_2\|^2+\frac{1}{d_2}\int_\Omega C_2^2(|v|+1)^2dx \\
&\le \frac{d_2}{4}\|\Delta v_2\|^2+\frac{2C_2^2}{d_2}|\Omega|+\frac{2C_2^2}{d_2}\int_\Omega |v|^2dx \\
&\le \frac{d_2}{4}\|\Delta v_2\|^2+\frac{2C_2^2}{d_2}|\Omega|+\frac{2C_2^2}{d_2}\int_{\Omega(|v|\ge M)}|v|^2dx+\frac{2C_2^2}{d_2}\int_{\Omega(|v|\le M)}|v|^2dx \\
&\le \frac{d_2}{4}\|\Delta v_2\|^2+\frac{2C_2^2}{d_2}|\Omega|+\frac{2C_2^2M^2}{d_2}|\Omega|+\frac{2C_2^2}{d_2}\int_{\Omega(|v|\ge M)}|v|^2dx,
\end{aligned}
\tag{4.9}
$$

以及

$$
\begin{aligned}
|(\widetilde{h_2}(t),-\Delta v_2)| &\le \|\widetilde{h_2}(t)\|^2\|\Delta v_2\|^2 \\
&\le \frac{d_2}{4}\|\Delta v_2\|^2+\frac{1}{d_2}\|\widetilde{h_2}(t)\|^2.
\end{aligned}
\tag{4.10}
$$

将(4.7) − (4.10) 带入(4.6), 得到

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|u_2\|_{H_0^1}^2+\|v_2\|_{H_0^1}^2)+d_1\|\Delta u_2\|^2+d_2\|\Delta v_2\|^2 \\
&\quad\le \frac{4C_1^2}{d_1}|\Omega|+\frac{4C_1^2M^6}{d_1}|\Omega|+\frac{4C_2^2}{d_2}|\Omega|+\frac{4C_2^2M^2}{d_2}|\Omega| \\
&\quad+\frac{4C_1^2}{d_1}\int_{\Omega(|u|\ge M)}|u|^6dx+\frac{4C_2^2}{d_2}\int_{\Omega(|v|\ge M)}|v|^2dx+\frac{2}{d_1}\|\widetilde{h_1}(t)\|^2+\frac{2}{d_2}\|\widetilde{h_2}(t)\|^2.
\end{aligned}
$$

根据poincaré 不等式

$$
\|\varphi\|\le\frac{1}{\sqrt{\lambda_{m+1}}}\|Du\|^2,\quad \forall\varphi\in H_0^1,
$$

令$d=min\{d_1,d_2\}$, 就有

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|u_2\|_{H_0^1}^2+\|v_2\|_{H_0^1}^2)+\lambda_{m+1}d(\|u_2\|_{H_0^1}^2+\|v_2\|_{H_0^1}^2) \\
&\quad\le \frac{4C_1^2}{d_1}|\Omega|+\frac{4C_1^2M^6}{d_1}|\Omega|+\frac{4C_2^2}{d_2}|\Omega|+\frac{4C_2^2M^2}{d_2}|\Omega| \\
&\quad+\frac{4C_1^2}{d_1}\int_{\Omega(|u|\ge M)}|u|^6dx+\frac{4C_2^2}{d_2}\int_{\Omega(|v|\ge M)}|v|^2dx+\frac{2}{d_1}\|\widetilde{h_1}(t)\|^2+\frac{2}{d_2}\|\widetilde{h_2}(t)\|^2.
\end{aligned}
\tag{4.11}
$$

令$k>max\{T_B,t_B\}$, (4.11)式用Gronwall's 不等式, 得到

$$
\begin{aligned}
&\|u_2\|_{H_0^1}^2+\|v_2\|_{H_0^1}^2\le e^{-\lambda_{m+1}d(t-k)}(\|u_2(\tau)\|_{H_0^1}^2+\|v_2(\tau)\|_{H_0^1}^2) \\
&\quad+\int_k^t e^{-\lambda_{m+1}d(t-s)}(\frac{4C_1^2}{d_1}|\Omega|+\frac{4C_1^2M^6}{d_1}|\Omega|+\frac{4C_2^2}{d_2}|\Omega|+\frac{4C_2^2M^2}{d_2}|\Omega|)ds \\
&\quad+\frac{4C_1^2}{d_1}\int_k^t e^{-\lambda_{m+1}d(t-s)}\int_{\Omega(|u|\ge M)}|u(s)|^6dxds+\frac{4C_2^2}{d_2}\int_k^t e^{-\lambda_{m+1}d(t-s)}\int_{\Omega(|v|\ge M)}|v(s)|^2dxds \\
&\quad+\frac{2}{d_1}\int_k^t e^{-\lambda_{m+1}d(t-s)}\|\widetilde{h_1}(s)\|^2+\frac{2}{d_2}\int_k^t e^{-\lambda_{m+1}d(t-s)}\widetilde{h_2}(s)\|^2ds \\
&\quad\le \rho_V^2e^{-\lambda_{m+1}d(t-k)}+\frac{1}{d\lambda_{m+1}}\left(\frac{4C_1^2}{d_1}|\Omega|+\frac{4C_1^2M^6}{d_1}|\Omega|+\frac{4C_2^2}{d_2}|\Omega|+\frac{4C_2^2M^2}{d_2}|\Omega|\right) \\
&\quad+\frac{4C_1^2}{d_1}\int_k^t e^{-\lambda_{m+1}d(t-s)}\int_{\Omega(|u|\ge M)}|u(s)|^6dxds+\frac{4C_2^2}{d_2}\int_k^t e^{-\lambda_{m+1}d(t-s)}\int_{\Omega(|v|\ge M)}|v(s)|^2dxds \\
&\quad+\frac{2}{d_1}\int_k^t e^{-\lambda_{m+1}d(t-s)}\|\widetilde{h_1}(s)\|^2+\frac{2}{d_2}\int_k^t e^{-\lambda_{m+1}d(t-s)}\widetilde{h_2}(s)\|^2ds,
\end{aligned}
\tag{4.12}
$$

其中T_B 是引理3.3中的, t_B 是引理3.4中的.
另一方面，我们有

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega(|u|\geq M)}|u|^6dx=\int_{\Omega(u\geq M)}|u|^6dx+\int_{\Omega(u\leq -M)}|u|^6dx\\
&=\int_{\Omega(u\geq M)}|u|^3|u|^3dx+\int_{\Omega(u\leq -M)}|u|^3|u|^3dx\\
&=\int_{\Omega(u\geq M)}|u|^3|u-M+M|^3dx+\int_{\Omega(u\leq -M)}|u|^3|u+M-M|^3dx\\
&\leq 4[\int_{\Omega(u\geq M)}|u|^3(|(u-M)_+|^3+|M|^3)dx+\int_{\Omega(u\leq -M)}|u|^3(|(u+M)_-|^3+|M|^3)dx]\\
&\leq 4[\int_{\Omega(u\geq M)}|u|^3|(u-M)_+|^3dx+\int_{\Omega(u\leq -M)}|u|^3|(u+M)_-|^3dx]+4M^3\int_{\Omega}(|u|\geq M)|u|^3dx\\
&\leq 4[\int_{\Omega(u\geq M)}|u|^3|(u-M)_+|^3dx+\int_{\Omega(u\leq -M)}|u|^3|(u+M)_-|^3dx]+4M^2\int_{\Omega(|u|\geq M)}|u|^4dx,
\end{aligned}\tag{4.13}$$

以及

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega(|v|\geq M)}|v|^2dx=\int_{\Omega(v\geq M)}|v|^2dx+\int_{\Omega(v\leq -M)}|v|^2dx\\
&=\int_{\Omega(v\geq M)}|v||v|dx+\int_{\Omega(v\leq -M)}|v||v|dx\\
&=\int_{\Omega(v\geq M)}|v||v-M+M|dx+\int_{\Omega(v\leq -M)}|v||v+M-M|dx\\
&\leq\int_{\Omega(v\geq M)}(|v||v-M|+|M|)dx+\int_{\Omega(v\leq -M)}|v|(|v+M|+|M|)dx\\
&\leq\int_{\Omega(v\geq M)}|v||(v-M)_+|dx+\int_{\Omega(v\leq -M)}|v||(v+M)_-|dx+M\int_{\Omega(|v|\geq M)}|v|dx\\
&\leq\int_{\Omega(v\geq M)}|v||(v-M)_+|dx+\int_{\Omega(v\leq -M)}|v||(v+M)_-|dx+\int_{\Omega(|v|\geq M)}|v|^2dx.
\end{aligned}\tag{4.14}$$

由引理5.1, 我们知道对任意的有界集$\widetilde{B}\subset L^2(\Omega)$, 存在M¿0, $t_0>0$, $\eta>0$ 使得

$$\int_t^{t+\eta}\int_{\Omega(u\geq M)}|u|^3|(u-M)_+|^3dxds\leq\frac{d_1\varepsilon}{320C_1^2},\quad t\geq t_0,\quad \sigma\in\Sigma,\quad u_\tau\in\widetilde{B},\tag{4.15}$$

$$\int_t^{t+\eta}\int_{\Omega(u\leq -M)}|u|^3|(u+M)_-|^3dxds\leq\frac{d_1\varepsilon}{320C_1^2},\quad t\geq t_0,\quad \sigma\in\Sigma,\quad u_\tau\in\widetilde{B},\tag{4.16}$$

$$\int_t^{t+\eta}\int_{\Omega(v\geq M)}|v||(v-M)_+|dxds\leq\frac{d_2\varepsilon}{80C_2^2},\quad t\geq t_0,\quad \sigma\in\Sigma,\quad u_\tau\in\widetilde{B}.\tag{4.17}$$

$$\int_t^{t+\eta}\int_{\Omega(v\leq -M)}|v||(v+M)_-|dxds\leq\frac{d_2\varepsilon}{80C_2^2},\quad t\geq t_0,\quad \sigma\in\Sigma,\quad u_\tau\in\widetilde{B}.\tag{4.18}$$

注意到

$$
\begin{aligned}
&\int_t^{t+\eta} e^{-\lambda_{m+1}d(t-s)}\int_{\Omega(u\geq M)}|u|^3|(u-M)_+|^3dxds\\
&=\left(\int_{t-\eta}^{t}+\int_{t-2\eta}^{t-\eta}+\int_{t-3\eta}^{t-2\eta}+\cdots\right)e^{-\lambda_{m+1}d(t-s)}\int_{\Omega(u\geq M)}|u|^3|(u-M)_+|^3dxds\\
&\leq \int_{t-\eta}^{t}\int_{\Omega(u\geq M)}|u|^3|(u-M)_+|^3dxds+e^{-\lambda_{m+1}d\eta}\int_{t-2\eta}^{t-\eta}\int_{\Omega(u\geq M)}|u|^3|(u-M)_+|^3dxds\\
&+e^{-2\lambda_{m+1}d\eta}\int_{t-3\eta}^{t-2\eta}\int_{\Omega(u\geq M)}|u|^3|(u-M)_+|^3dxds+\cdots\\
&\leq \frac{1}{1-e^{-d\lambda_{m+1}\eta}}\frac{d_1\varepsilon}{320C_1^2},\qquad for\quad k>t_0.
\end{aligned}
\tag{4.19}
$$

同样，我们有

$$
\int_t^{t+\eta} e^{-\lambda_{m+1}d(t-s)}\int_{\Omega(u\leq -M)}|u|^3|(u-M)_+|^3dxds\leq \frac{1}{1-e^{-d\lambda_{m+1}\eta}}\frac{d_1\varepsilon}{320C_1^2},\qquad for\quad k>t_0,\tag{4.20}
$$

$$
\int_t^{t+\eta} e^{-\lambda_{m+1}d(t-s)}\int_{\Omega(v\geq M)}|v||(v+M)_-|dxds\leq \frac{1}{1-e^{-d\lambda_{m+1}\eta}}\frac{d_2\varepsilon}{80C_2^2},\qquad for\quad k>t_0,\tag{4.21}
$$

$$
\int_t^{t+\eta} e^{-\lambda_{m+1}d(t-s)}\int_{\Omega(v\leq -M)}|v||(v-M)_+|dxds\leq \frac{1}{1-e^{-d\lambda_{m+1}\eta}}\frac{d_2\varepsilon}{80C_2^2},\qquad for\quad k>t_0.\tag{4.22}
$$

由(4.5), 我们可以取$m+1$ 足够大, 使得

$$
\frac{16C_1^2}{d_1}\int_k^t e^{-\lambda_{m+1}}d(t-s)\int_{\Omega(u\geq M)}|u|^3|(u-M)_+|^3dxds\leq\frac{\varepsilon}{10},\tag{4.23}
$$

$$
\frac{16C_1^2}{d_1}\int_k^t e^{-\lambda_{m+1}}d(t-s)\int_{\Omega(u\leq -M)}|u|^3|(u+M)_-|^3dxds\leq\frac{\varepsilon}{10},\tag{4.24}
$$

$$
\frac{4C_2^2}{d_2}\int_k^t e^{-\lambda_{m+1}}d(t-s)\int_{\Omega(v\geq M)}|v||(v-M)_+|dxds\leq\frac{\varepsilon}{10},\tag{4.25}
$$

$$
\frac{4C_2^2}{d_2}\int_k^t e^{-\lambda_{m+1}}d(t-s)\int_{\Omega(v\leq -M)}|v||(v+M)_-|dxds\leq\frac{\varepsilon}{10},\tag{4.26}
$$

$$
\frac{4C_1^2}{d_1}\int_k^t e^{-\lambda_{m+1}}d(t-s)\int_{\Omega(|u|\geq M)}4M^2|u(s)|^4|dxds\leq\frac{\varepsilon}{10},\tag{4.27}
$$

$$
\frac{4C_2^2}{d_2}\int_k^t e^{-\lambda_{m+1}}d(t-s)\int_{\Omega(|v|\geq M)}|v(s)|^2|dxds\leq\frac{\varepsilon}{10},\tag{4.28}
$$

$$
\frac{1}{d\lambda_{m+1}}\left(\frac{4C_1^2}{d_1}|\Omega|+\frac{4C_1^2M^6}{d_1}|\Omega|+\frac{4C_2^2}{d_2}|\Omega|+\frac{4C_2^2M^2}{d_2}|\Omega|\right)\leq\frac{\varepsilon}{10}.\tag{4.29}
$$

令$t_1 = \frac{1}{d\lambda_{m+1}} \ln \frac{6\rho_V^2}{\varepsilon} + k$, 则当$t \geq t_1$ 时有

$$\rho_V^2 e^{-\lambda_{m+1}(t-k)} \leq \frac{\varepsilon}{10}. \tag{4.30}$$

由引理(4.1), 对任意的$\varepsilon > 0$,可以取$m+1$ 足够大使得

$$\int_k^t e^{-d\lambda_{m+1}(t-s)} \left(\|\widetilde{h_1}(s)\|^2 + \|\widetilde{h_2}(s)\|^2 \right) ds \leq \frac{\varepsilon}{10(\frac{2}{d_1} + \frac{2}{d_2})}, \qquad \forall \sigma \in \Sigma. \tag{4.31}$$

将(4.13) – (4.31) 代入(4.12),得到

$$\|g_2(t)\|_V^2 = \|u_2\|_{H_0^1}^2 + \|v_2\|_{H_0^1}^2 \leq \varepsilon, \qquad t \geq t_1, \quad \sigma \in \Sigma, \quad g_\tau \in B.$$

这表明$U_\sigma(t,\tau), \sigma \in \Sigma$在V中满足一致(关于$\sigma \in \Sigma$) 条件(C). 由定理(2.1) 可知结论成立.

参考文献

[1] Robinson, J.C. and Pierre, C. (2003) Infinite-Dimensional Dynamical Systems: An Introduction to Dissipative Parabolic PDEs and the Theory of Global Attractors. Cambridge Texts in Applied Mathematics. *Applied Mechanics Reviews*, **56**, B54-B55. https://doi.org/10.1115/1.1579456

[2] Haraux, A. (1991) Systèmes dynamiques dissipatifs et applications. In: *Systèmes Dynamiques Dissipatifs et Applications*, Masson, Paris.

[3] Chepyzhov, V.V. and Vishik, M.I. (2002) Attractors for Equations of Mathematical Physics. Vol. 49, American Mathematical Society, Providence, RI. https://doi.org/10.1090/coll/049

[4] Ma, Q.F., Wang, S.H. and Zhong, C.K. (2002) Necessary and Sufficient Conditions for the Existence of Global Attractors for Semigroups and Applications. *Indiana University Mathematics Journal*, **51**, 1541-1559.

[5] Lu, S.S., Wu, H.Q. and Zhong, C.K. (2005) Attractors for Nonautonomous 2D Navier-Stokes Equations with Normal External Forces. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, **13**, 701-719. https://doi.org/10.3934/dcds.2005.13.701

[6] Sell, G.R. and You, Y. (2002) Dynamics of Evolutionary Equations. Springer, New York.

[7] Tu, J.Y. (2015) Global Attractors and Robustness of the Boissonade System. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, **27**, 187-211. https://doi.org/10.1007/s10884-014-9396-8

[8] Song, H.T., Ma, S. and Zhong, C.K. (2009) Attractors of Non-Autonomous Reaction-Diffusion Equations. *Nonlinearity*, **22**, 667-681. https://doi.org/10.1088/0951-7715/22/3/008

[9] 周盛凡, 赵敏, 向晓林. 非自治Boissonade系统的拉回和一致指数吸引子[J]. 中国科学(数学), 2017, 47(12): 1891-1906. https://doi.org/10.1360/N012017-00062

[10] Song, H.T. and Zhong, C.K. (2008) Attractors of Non-Autonomous Reaction-Diffusion Equations in L^p. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, **68**, 1890-1897. https://doi.org/10.1016/j.na.2007.01.059