Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2021, 10(7), 2605-2613
Published Online July 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2021.107270

Hans汉斯

给定度序列具有最小覆盖成本的树

贾雁宇，李玉瑛*，郝艺方

太原理工大学数学学院，山西 晋中
Email: 1506046375@qq.com, *13803491408@163.com, 1169828666@qq.com

收稿日期：2021年6月26日；录用日期：2021年7月19日；发布日期：2021年7月28日

摘 要

图G上顶点v的覆盖成本定义为$CC_G(v)=\sum_{u\in V(G)} H_{vu}$，$H_{vu}$是从$v$开始随机游走到达$u$的平均首达时间。本文研究了给定度序列树的覆盖成本，并且刻画出覆盖成本最小的树。

关键词

度序列，覆盖成本，贪婪树

The Minimum Cover Cost of a Tree with Given Degree Sequence

Yanyu Jia, Yuying Li*, Yifang Hao

School of Mathematics, Taiyuan University of Technology, Jinzhong Shanxi
Email: 1506046375@qq.com, *13803491408@163.com, 1169828666@qq.com

Received: Jun. 26th, 2021; accepted: Jul. 19th, 2021; published: Jul. 28th, 2021

Abstract

The cover cost of a vertex v in G is defined as $CC_G(v)=\sum_{u\in V(G)} H_{vu}$, where H_{vu} is the expected hitting time for random walk beginning at v to visit u. In this paper, we study the cover cost of trees and characterize the unique tree with the minimum cover cost with given degree sequence.

Keywords

Degree Sequence, Cover Cost, Greedy Tree

*通讯作者。

文章引用: 贾雁宇, 李玉瑛, 郝艺方. 给定度序列具有最小覆盖成本的树[J]. 应用数学进展, 2021, 10(7): 2605-2613.
DOI: 10.12677/aam.2021.107270

1. 引言

设 G 为具有顶点集 $V(G)=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$ 和边集 $E(G)$ 的简单连通图。任给 $v\in V(G)$，v 的度是与 v 关联的边的数目，用 $d(v)$ 表示。令 $d(v_i)=d_i, i=1,2,\cdots,n$，则非增序列 $\pi=(d_1,d_2,\cdots,d_n)$ 称为 G 的度序列。图 G 中度至少为 3 的顶点称为分支点，度为 1 的顶点称为叶子点或者悬挂点。

Wiener 指数是指图 G 的所有顶点对的距离和，即 $W(G)=\sum_{\{u,v\}\subseteq V(G)} d_G(u,v)=\frac{1}{2}\sum_{v\in V(G)} D_G(v)$，这里 $D_G(v)=\sum_{u\in V(G)} d_G(v,u)$。直到现在，Wiener 指数在各种图族中被广泛研究，一些结论可以在[1] [2] [3]中找到。

我们称树 (T,r) 是以顶点 r 为根的树，在这个有根树中，$P_T(v,u)$ 表示树 T 中连通顶点 v,u 的唯一路，$d_T(v,u)$ 为路 $P_T(v,u)$ 上边的数目，顶点 v 的高度定义为 $h_T(v)=d_T(r,v)$。在 (T,r) 中，对于任意两个不同的顶点 u,v，如果 $P_T(r,u)\subset P_T(r,v)$，称 v 是 u 的后序点，u 是 v 的前序点。如果 v 和 u 相邻且 $d_T(r,u)=d_T(r,v)-1$，称 u 是 v 的 parent，v 是 u 的 child。如果两个顶点 u,v 有同一个 parent，则称 u,v 是 siblings。

2008 年，Wang Hua [2]刻画出给定度序列使 Wiener 指数最小化的树是贪婪树。2012 年，Georgakopoulos [4]在图 G 中定义了顶点 v 的覆盖成本 $CC_G(v)$ 是从 v 开始随机游走到达图中所有顶点的平均首达时间总和，即 $CC_G(v)=\sum_{u\in V(G)} H_{vu}$，并研究了覆盖成本的性质。2015 年，Georgakopoulos 和 Wagner [5]在图 G 中定义了顶点 v 的反向覆盖成本 $RC_G(v)=\sum_{u\in V(G)} H_{uv}$，并且得到了树的覆盖成本与 Wiener 指数关系的公式以及反向覆盖成本与 Wiener 指数关系的公式，即对于树 T 和任给 $v\in V(T)$，有

$$CC_T(v)=2W(T)-D_T(v),$$

$$RC_T(v)=(2n-1)D_T(v)-2W(T)。$$

他们确定了给定阶数树的覆盖成本，反向覆盖成本和首达时间的极值和极图。2019 年，李书超和王书晶[6]在给定片段序列的情况下，刻画出覆盖成本最小及反向覆盖成本最小的树，也找到了反向覆盖成本最大的唯一树。2021 年，张慧慧和李书超[7]在给定直径，匹配数和控制数的情况下，得出覆盖成本和反向覆盖成本的上下界，并刻画了对应的极图。

基于以上研究，本文在给定度序列的情况下，刻画出覆盖成本最小的树。

2. 预备知识

下面介绍本文用到的一些定义和定理。

定理 2.1 [5]. 对于树 T 和任给 $v\in V(T)$，有

$$CC_T(v)=2W(T)-D_T(v),$$

$$RC_T(v)=(2n-1)D_T(v)-2W(T).$$

定义集合 $L(T)=\{v\in V(T)\mid D_T(v)\geq D_T(u),\forall u\in V(T)\}$。

DOI: 10.12677/aam.2021.107270

定理 2.2 [6]. 任给树 T，$v\in V(T)$ 当且仅当 $CC_T(v)=\min_{u\in V(T)} CC_T(u)$ 当且仅当 $RC_T(v)=\max_{u\in V(T)} RC_T(u)$。任给 $v\in V(T)$，v 是悬挂点。

定义 2.1 [2]. 给定非叶子点的度，贪婪树通过下面的贪婪算法得到：

1) 将最大度的顶点命名为 v (根)；

2) 将与 v 相邻的顶点依次命名为 $v_1,v_2,\cdots$，给这些顶点分配可用的最大度且满足 $d(v_1)\ge d(v_2)\ge\cdots$；

3) 将与 v_1 相邻的顶点依次命名为 $v_{11},v_{12},\cdots$ (v 除外)，给这些点分配可用的最大度且满足 $d(v_{11})\ge d(v_{12})\ge\cdots$，顶点 $v_2,v_3,\cdots$ 做法类似。

4) 对所有新命名的顶点重复 3)，总是从已命名且度最大的顶点的未命名邻集开始。

从上面的定义中可以得出贪婪树的性质如下：

定理 2.3 [2]. 给定度序列的有根树 T 是贪婪树，如果满足下面条件：

1) 根 v 具有最大度；

2) 任意两个叶子点的高度差至多是 1；

3) 对于任意两个顶点 u 和 w，如果 $h_T(w)<h_T(u)$，则 $d(w)\ge d(u)$；

4) 对于有相同高度的任意两个顶点 u,w，如果 $d(u)>d(w)$，则 $d(u')\ge d(w')$，u',w' 分别是 u,w 的后序点，u' 和 w' 高度相同；

5) 对于有相同高度的任意两个顶点 u,w，如果 $d(u)>d(w)$，则 $d(u')\ge d(w')$，$d(u'')\ge d(w'')$，u',w' 分别是 u,w 的 siblings，u'',w'' 分别是 u',w' 的后序点，u' 和 w' 高度相同，u'' 和 w'' 高度相同。

例 1. 度序列为 $(4,4,4,3,3,3,3,3,3,3,3,2,2,1,\cdots,1)$ (1 的重数为 15)的贪婪树如图 1 所示。

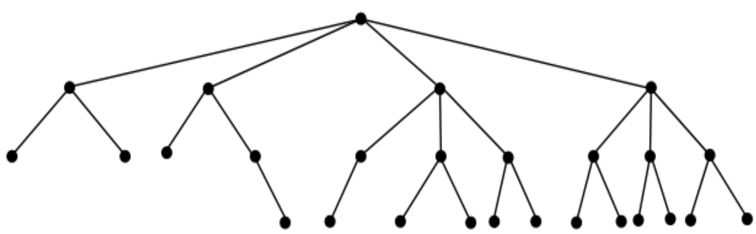

Figure 1. Greedy tree with degree sequence of (4,4,4,3,3,3,3,3,3,3,3,2,2,1,…,1)
图 1. 度序列为(4,4,4,3,3,3,3,3,3,3,3,2,2,1,…,1)的贪婪树

3. 主要结论

本节研究给定度序列树的覆盖成本，并且称该条件下覆盖成本最小的树是理想树。

在理想树中选一条路，移除这条路上的所有边之后，如果一些连通分支仍然存在，取一个点将其命名为 z，将点 z 右边的顶点依次命名为 $x_1,x_2,\cdots$，将点 z 左边的顶点依次命名为 $y_1,y_2,\cdots$。令 $X_i,Y_i,Z\ (i=1,2,\cdots)$ 表示包含对应顶点的分支，$X_{>k}$ 和 $Y_{>k}$ 分别表示由 $V(X_{k+1})\cup V(X_{k+2})\cup\cdots$ 和 $V(Y_{k+1})\cup V(Y_{k+2})\cup\cdots$ 导出的子树，如图 2。不失一般性，假设 $|V(X_1)|\ge|V(Y_1)|$。

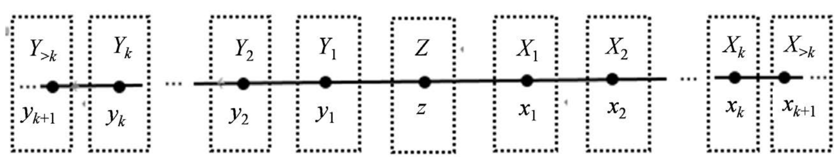

Figure 2. The components resulted from a path with z
图 2. 带有顶点 z 的路产生的分支

定理 3.1. 在如上描述的情形中，对于 $i=1,2,\cdots,k$，如果有 $|V(X_i)|\ge|V(Y_i)|$，则在理想树中满足 $|V(X_{>k})|\ge|V(Y_{>k})|$。

证明：假设在理想树中 $|V(X_{>k})|\ge|V(Y_{>k})|$ 不成立，下面证明交换 $X_{>k}$ 和 $Y_{>k}$ 的位置不增加覆盖成本。当路的末端顶点都在或都不在 $V(Y_{>k})\cup V(X_{>k})$ 中，交换 $X_{>k}$ 和 $Y_{>k}$ 的位置，这两点之间的距离不会改变。因此考虑只有一个末端顶点在 $V(Y_{>k})\cup V(X_{>k})$ 的情况。

先计算 $W(T')-W(T)$，分为下面四种情况：

1) 对于 $V(X_i)(i=1,2,\cdots,k)$ 中的任一顶点和 $X_{>k}$ 中的任一顶点，交换 $X_{>k}$ 和 $Y_{>k}$ 的位置，两点之间的距离增加 $2i$，则总的 Wiener 指数增加 $\sum_{i=1}^{k}(2i)|V(X_i)||V(X_{>k})|$；

2) 对于 $V(Y_i)(i=1,2,\cdots,k)$ 中的任一顶点和 $X_{>k}$ 中的任一顶点，交换 $X_{>k}$ 和 $Y_{>k}$ 的位置，两点之间的距离减少 $2i$，则总的 Wiener 指数减少 $\sum_{i=1}^{k}(2i)|V(Y_i)||V(X_{>k})|$；

3) 对于 $V(Y_i)(i=1,2,\cdots,k)$ 中的任一顶点和 $Y_{>k}$ 中的任一顶点，交换 $X_{>k}$ 和 $Y_{>k}$ 的位置，两点之间的距离减少 $2i$，则总的 Wiener 指数减少 $\sum_{i=1}^{k}(2i)|V(Y_i)||V(Y_{>k})|$；

4) 对于 $V(X_i)(i=1,2,\cdots,k)$ 中的任一顶点和 $Y_{>k}$ 中的任一顶点，交换 $X_{>k}$ 和 $Y_{>k}$ 的位置，两点之间的距离增加 $2i$，则总的 Wiener 指数增加 $\sum_{i=1}^{k}(2i)|V(X_i)||V(Y_{>k})|$；

综上分析，交换 $X_{>k}$ 和 $Y_{>k}$ 的位置，得出 $W(T')-W(T)=\sum_{i=1}^{k}2i(|V(X_i)|-|V(Y_i)|)(|V(X_{>k})|-|V(Y_{>k})|)$。

根据定理 2.2，令 $CC_T(x)=\min_{v\in V(T)}CC_T(v)$，则 $x\in L(T)$。

情形 1：$x\in V(X_i)(1\le i\le k)$

此时，$D_{T'}(x)-D_T(x)=2i(|V(X_{>k})|-|V(Y_{>k})|)$，利用引理 2.1 可得

$$\begin{aligned}CC_{T'}(x)-CC_T(x)&=2(W(T')-W(T))-(D_{T'}(x)-D_T(x))\\&=2(|V(X_{>k})|-|V(Y_{>k})|)\left(\sum_{i=1}^{k}2i(|V(X_i)|-|V(Y_i)|)-i\right)\\&\le 2(|V(X_{>k})|-|V(Y_{>k})|)\sum_{i=1}^{k}\left(2i(|V(X_i)|-|V(Y_i)|)-1\right)\end{aligned}$$

当 $|V(X_i)|=|V(Y_i)|(i=1,2,\cdots,k)$ 时，交换 $X_{>k}$ 和 $Y_{>k}$ 的位置，覆盖成本不增加。

存在 i 使得 $|V(X_i)|>|V(Y_i)|$，则 $\sum_{i=1}^{k}\left(2i(|V(X_i)|-|V(Y_i)|)-1\right)>0$，

由假设 $|V(X_{>k})|\le|V(Y_{>k})|$，可得出 $CC_{T'}(x)-CC_T(x)\le 0$。

因为 $\min_{v\in V}CC_{T'}(v)\le CC_{T'}(x)\le CC_T(x)=\min_{v\in V}CC_T(v)$，所以，交换 $X_{>k}$ 和 $Y_{>k}$ 的位置，最小覆盖成本不增加。

情形 2：$x\in V(Y_i)(1\le i\le k)$ 与情形 1 类似。

情形 3：$x\in V(X_{>k})$

这时，$D_{T'}(x)-D_T(x)=\sum_{i=1}^{k}2i(|V(X_i)|-|V(Y_i)|)$，

利用引理 2.1 化简可得 $CC_{T'}(x)-CC_T(x)=\sum_{i=1}^{k}2i(|V(X_i)|-|V(Y_i)|)(2(|V(X_{>k})|-|V(Y_{>k})|)-1)$。

由假设 $|V(X_{>k})|\le|V(Y_{>k})|$，可得出 $CC_{T'}(x)-CC_T(x)\le 0$。

因为 $\min_{v\in V}CC_{T'}(v)\le CC_{T'}(x)\le CC_T(x)=\min_{v\in V}CC_T(v)$，所以，交换 $X_{>k}$ 和 $Y_{>k}$ 的位置，最小覆盖成本不增加。

情形 4：$x\in V(Y_{>k})$ 与情形 3 类似。

情形 5： $x\in V(Z)$， $D_{T'}(x)=D_T(x)$， $CC_{T'}(x)-CC_T(x)\le 0$ 。

综上所述，在理想树中满足 $|V(X_{>k})|\ge|V(Y_{>k})|$，定理证明完毕。

定理 3.2. 在如上描述的情形中，对于 $i=1,2,\cdots,k-1$，有 $|V(X_i)|\ge|V(Y_i)|$， $|V(X_{>k})|\ge|V(Y_{>k})|$，则在理想树中满足 $|V(X_k)|\ge|V(Y_k)|$ 。

证明：假设在理想树中， $|V(X_k)|\ge|V(Y_k)|$ 不成立，下面证明交换 X_k 和 Y_k 的位置不会增加覆盖成本。

根据定理 2.2，令 $CC_T(x)=\min_{v\in V(T)}CC_T(v)$，则 $x\in L(T)$ 。

经过计算得

$$\begin{aligned}W(T')-W(T)&=\sum_{i=1}^{k-1}2i\left(|V(X_i)|-|V(Y_i)|\right)\left(|V(X_k)|-|V(Y_k)|\right)\\&+2k\left(|V(X_{>k})|-|V(Y_{>k})|\right)\left(|V(X_k)|-|V(Y_k)|\right)\\&\le 0\end{aligned}$$

情形 1： $x\in V(X_i)(1\le i\le k-1)$

$$\begin{aligned}CC_{T'}(x)-CC_T(x)&=\sum_{i=1}^{k-1}4i\left(|V(X_i)|-|V(Y_i)|\right)\left(|V(X_k)|-|V(Y_k)|\right)\\&+4k\left(|V(X_{>k})|-|V(Y_{>k})|\right)\left(|V(X_k)|-|V(Y_k)|\right)\\&-2i\left(|V(X_k)|-|V(Y_k)|\right)\end{aligned}$$

由假设 $|V(X_k)|\le|V(Y_k)|$，可得出 $CC_{T'}(x)-CC_T(x)\le 0$ 。

因为 $\min_{v\in V}CC_{T'}(v)\le CC_{T'}(x)\le CC_T(x)=\min_{v\in V}CC_T(v)$，所以交换 X_k 和 Y_k 的位置，最小覆盖成本不增加。

情形 2： $x\in V(Y_i)(1\le i\le k-1)$ 与情形 1 类似。

情形 3： $x\in V(X_{>k})$

$$CC_{T'}(x)-CC_T(x)=\left(\sum_{i=1}^{k-1}4i\left(|V(X_i)|-|V(Y_i)|\right)+4k\left(|V(X_{>k})|-|V(Y_{>k})|\right)-2k\right)\left(|V(X_k)|-|V(Y_k)|\right)$$

由假设 $|V(X_k)|\le|V(Y_k)|$，可得出 $CC_{T'}(x)-CC_T(x)\le 0$ 。

又因为 $\min_{v\in V}CC_{T'}(v)\le CC_{T'}(x)\le CC_T(x)=\min_{v\in V}CC_T(v)$，所以交换 X_k 和 Y_k 的位置，最小覆盖成本不增加。

情形 4： $x\in V(Y_{>k})$ 与情形 3 类似。

情形 5： $x\in V(X_k)$

$$\begin{aligned}CC_{T'}(x)-CC_T(x)&=\sum_{i=1}^{k-1}\left(|V(X_i)|-|V(Y_i)|\right)\left(4i\left(|V(X_k)|-|V(Y_k)|\right)-1\right)\\&+\left(|V(X_{>k})|-|V(Y_{>k})|\right)\left(4k\left(|V(X_k)|-|V(Y_k)|\right)-1\right)\end{aligned}$$

由假设 $|V(X_k)|\le|V(Y_k)|$，可得出 $CC_{T'}(x)-CC_T(x)\le 0$ 。

又因为 $\min_{v\in V}CC_{T'}(v)\le CC_{T'}(x)\le CC_T(x)=\min_{v\in V}CC_T(v)$，所以交换 X_k 和 Y_k 的位置，最小覆盖成本不增加。

情形 6： $x\in V(Y_k)$ 与情形 5 类似。

情形 7： $x\in V(Z)$， $D_{T'}(x)=D_T(x)$， $CC_{T'}(x)-CC_T(x)\le 0$ 。

综上所述，在理想树中满足 $|V(X_k)|\ge|V(Y_k)|$，定理证明完毕。

定理 3.3. 在如上描述的情形中，对于 $i=1,2,\cdots,k-1$，如果有 $|V(X_i)|\ge|V(Y_i)|$ 和 $|V(X_{>k-1})|\ge|V(Y_{>k-1})|$

成立，则在理想树中满足 $d(x_k)\ge d(y_k)$。

证明：假设在理想树中 $d(x_k)\ge d(y_k)$ 不成立，设 $a=d(x_k)<d(y_k)=a+b$，从 $X_k(Y_k)$ 中移除顶点 $x_k(y_k)$ 会产生 $a(a+b)$ 个分支。从 Y_k 中任取 b 个分支(令 B 为 b 个分支)，将这些分支与顶点 x_k 连接。经过此操作有 $d(x_k)\ge d(y_k)$，且度序列不改变。

根据定理 2.2 令 $CC_T(x)=\min_{v\in V(T)}CC_T(v), x\in L(T)$。

计算得 $W(T')-W(T)=\sum_{i=1}^{k-1}2i\left(\left|V(Y_i)\right|-\left|V(X_i)\right|\right)|B|+2k\left(\left|V(Y_{>k-1})\right|-|B|-\left|V(X_{>k-1})\right|\right)|B|$

情形 1：$x\in V(X_i)(1\le i\le k-1)$

$$CC_{T'}(x)-CC_T(x)=\sum_{i=1}^{k-1}4i\left(\left|V(Y_i)\right|-\left|V(X_i)\right|\right)|B|+4k\left(\left|V(Y_{>k-1})\right|-|B|-\left|V(X_{>k-1})\right|\right)|B|+2i|B|$$

由已知可以得出 $CC_{T'}(x)-CC_T(x)\le 0$。

因为 $\min_{v\in V}CC_{T'}(v)\le CC_{T'}(x)\le CC_T(x)=\min_{v\in V}CC_T(v)$，经过上面操作，最小覆盖成本不增加。

情形 2：$x\in V(Y_i)(1\le i\le k-1)$ 与情形 1 类似。

情形 3：$x\in V(Y_{>k-1}-B)$

$$CC_{T'}(x)-CC_T(x)=\sum_{i=1}^{k-1}4i\left(\left|V(Y_i)\right|-\left|V(X_i)\right|\right)|B|+4k\left(\left|V(Y_{>k-1})\right|-|B|-\left|V(X_{>k-1})\right|\right)|B|-2k|B|$$

由已知可以得出 $CC_{T'}(x)-CC_T(x)\le 0$。

因为 $\min_{v\in V}CC_{T'}(v)\le CC_{T'}(x)\le CC_T(x)=\min_{v\in V}CC_T(v)$，所以经过上面操作，最小覆盖成本不增加。

情形 4：$x\in V(X_{>k-1})$ 与情形 3 类似。

情形 5：$x\in V(B)$

$$\begin{aligned}CC_{T'}(x)-CC_T(x)=&\sum_{i=1}^{k-1}4i\left(\left|V(Y_i)\right|-\left|V(X_i)\right|\right)|B|+4k\left(\left|V(Y_{>k-1})\right|-|B|-\left|V(X_{>k-1})\right|\right)|B|\\&-\sum_{i=1}^{k-1}(2i)\left(\left|V(Y_i)\right|-\left|V(X_i)\right|\right)-2k\left(\left|V(Y_{>k-1})\right|-|B|-\left|V(X_{>k-1})\right|\right)\end{aligned}$$

由已知可以得出 $CC_{T'}(x)-CC_T(x)\le 0$。

因为 $\min_{v\in V}CC_{T'}(v)\le CC_{T'}(x)\le CC_T(x)=\min_{v\in V}CC_T(v)$，所以经过上面操作，最小覆盖成本不增加。

情形 6：$x\in V(Z)$，$D_{T'}(x)=D_T(x)$，$CC_{T'}(x)-CC_T(x)\le 0$。

综上所述，在理想树中满足 $d(x_k)\ge d(y_k)$，定理证明完毕。

在理想树中选一条最长路，将各个顶点依次命名为 $w_1,w_2,\cdots$ 和 $u_1,u_2,\cdots$，将各个点所在的分支依次命名为 W_i 和 U_i，U_1 是拥有点数最多的分支。如图 3 所示。

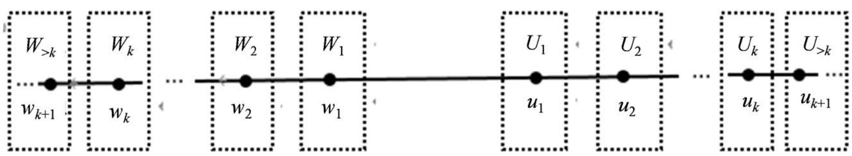

Figure 3. The components resulted from a path

图 3. 在路上的分支

定理 3.4. 如上面所述，在理想树中，如果路长是奇数 $2m-1$，则有

$$\left|V(U_1)\right|\ge\left|V(W_1)\right|\ge\left|V(U_2)\right|\ge\left|V(W_2)\right|\ge\cdots\ge\left|V(U_m)\right|=\left|V(W_m)\right|=1;$$

如果路长是偶数 $2m$，则有 $\left|V(U_1)\right|\ge\left|V(W_1)\right|\ge\left|V(U_2)\right|\ge\left|V(W_2)\right|\ge\cdots\ge\left|V(W_m)\right|=\left|V(U_{m+1})\right|=1$；

证明：本定理只证明路长为奇数，路长为偶数可类似证明。我们假设$\left|V\left(U_1\right)\right| \ge \left|V\left(W_1\right)\right| \ge \left|V\left(U_2\right)\right|$。对于某个 k，我们可得

$$\left|V\left(U_1\right)\right| \ge \left|V\left(W_1\right)\right| \ge \left|V\left(U_2\right)\right| \ge \left|V\left(W_2\right)\right| \ge \cdots \ge \left|V\left(W_{k-1}\right)\right| \ge \left|V\left(U_k\right)\right| \tag{1}$$

如果(1)中除了$\left|V\left(U_k\right)\right| \ge \left|V\left(W_k\right)\right|$其余都成立。我们可以交换$W_i$和$U_i$的命名去保证$\left|V\left(U_k\right)\right| \ge \left|V\left(W_k\right)\right|$(如果有必要)。否则，根据定理 3.1 可得$\left|V\left(U_{>k-1}\right)\right| \ge \left|V\left(W_{>k-1}\right)\right|$。

如果$\left|V\left(W_k\right)\right| \ge \left|V\left(U_k\right)\right|$，则可以得出

$$\left|V\left(U_{>k}\right)\right| = \left|V\left(U_{>k-1}\right)\right| - \left|V\left(U_k\right)\right| > \left|V\left(W_{>k-1}\right)\right| - \left|V\left(W_k\right)\right| = \left|V\left(W_{>k}\right)\right|$$

应用定理 3.2 (令$x_i = u_i, y_i = w_i, i = 1,2,\cdots$)，由$\left|V\left(U_{>k}\right)\right| \ge \left|V\left(W_{>k}\right)\right|$，会得出$\left|V\left(U_k\right)\right| \ge \left|V\left(W_k\right)\right|$，与前面假设$\left|V\left(W_k\right)\right| \ge \left|V\left(U_k\right)\right|$矛盾。因此，可以得出

$$\left|V\left(U_1\right)\right| \ge \left|V\left(W_1\right)\right| \ge \left|V\left(U_2\right)\right| \ge \left|V\left(W_2\right)\right| \ge \cdots \ge \left|V\left(U_k\right)\right| \ge \left|V\left(W_k\right)\right|.$$

如果所有的不等式成立，可以交换U_{i+1}, W_i去保证$\left|V\left(W_k\right)\right| \ge \left|V\left(U_{k+1}\right)\right|$(如果有必要)。否则，对$U_{>k}$和$W_{>k-1}$应用定理 3.1，令$Z = U_1, Y_i = U_{i+1}, X_i = W_i, z = u_1, y_i = u_{i+1}, x_i = w_i$，有$\left|V\left(X_i\right)\right| \ge \left|V\left(Y_i\right)\right| \left(i = 1,2,\cdots,k-1\right)$，由定理 3.1 可得

$$\left|V\left(W_{>k-1}\right)\right| = \left|V\left(X_{>k-1}\right)\right| \ge \left|V\left(Y_{>k-1}\right)\right| = \left|V\left(U_{>k}\right)\right|$$

如果$\left|V\left(Y_k\right)\right| = \left|V\left(U_{k+1}\right)\right| > \left|V\left(W_k\right)\right| = \left|V\left(X_k\right)\right|$，则有

$$\left|V\left(Y_{>k}\right)\right| = \left|V\left(Y_{>k-1}\right)\right| - \left|V\left(Y_k\right)\right| < \left|V\left(X_{>k-1}\right)\right| - \left|V\left(X_k\right)\right| = \left|V\left(X_{>k}\right)\right|,$$

对$Y_k = U_{k+1}, X_k = W_k$应用定理 3.2，可得$\left|V\left(X_k\right)\right| > \left|V\left(Y_k\right)\right|$，与前面假设$\left|V\left(Y_k\right)\right| > \left|V\left(X_k\right)\right|$矛盾，因此，有

$$\left|V\left(U_1\right)\right| \ge \left|V\left(W_1\right)\right| \ge \left|V\left(U_2\right)\right| \ge \left|V\left(W_2\right)\right| \ge \cdots \ge \left|V\left(U_k\right)\right| \ge \left|V\left(W_k\right)\right| \ge \left|V\left(U_{k+1}\right)\right|.$$

定理 3.5. 如上面所述，在理想树中，如果路长是奇数$2m-1$，则有

$$d\left(u_1\right) \ge d\left(w_1\right) \ge d\left(u_2\right) \ge d\left(w_2\right) \ge \cdots \ge d\left(u_m\right) = d\left(w_m\right) = 1;$$

如果路长是偶数 $2m$，则有

$$d\left(u_1\right) \ge d\left(w_1\right) \ge d\left(u_2\right) \ge d\left(w_2\right) \ge \cdots \ge d\left(w_m\right) = d\left(u_{m+1}\right) = 1;$$

证明：本定理只证明路长为奇数，路长为偶数时可类似证明。对$u_i, u_{i+1}\left(i = 1,2,\cdots,m-1\right)$应用定理 3.3，令$y_1 = u_{i+1}, y_2 = u_{i+2}, \cdots; x_1 = u_i, x_2 = u_{i-1}, \cdots, x_i = u_1, x_{i+1} = w_1$。则

$$\left|V\left(X_{>1}\right)\right| = \sum_{k=1}^{m}\left|V\left(W_k\right)\right| + \sum_{k=1}^{i-1}\left|V\left(U_k\right)\right| > \sum_{k=i+2}^{m}\left|V\left(U_k\right)\right| = V\left(Y_{>1}\right),$$

推出$d\left(u_i\right) = d\left(x_1\right) \ge d\left(y_1\right) = d\left(u_{i+1}\right)$。因此，可以得出

$$d\left(u_1\right) \ge d\left(u_2\right) \ge \cdots \ge d\left(u_m\right).$$

同理，对w_i, w_{i+1}应用定理 3.3，得出$d\left(w_1\right) \ge d\left(w_2\right) \ge \cdots \ge d\left(w_m\right)$。

对于u_i, w_i，如果定理 3.4 中的不等式处处成立，可得$d\left(u_i\right) \ge d\left(w_i\right)\left(i = 1,2,\cdots,m\right)$。否则，给$u_i, w_i$应用定理 3.3(令$x_i = u_i, y_i = w_i, i = 1,2,\cdots$)得出$d\left(u_i\right) \ge d\left(w_i\right)\left(i = 1,2,\cdots,m\right)$。

相似的，给 w_i, u_{i+1} 应用定理 3.3，得出 $d(w_i) \ge d(u_{i+1})(i = 1, 2, \cdots, m-1)$。

定理 3.6. 具有最小覆盖成本的树是贪婪树。

证明：在任意一条路中，$D_T(v)$ 只在一个顶点或者两个相邻的顶点取到最小值，称这些点为重心。在定理 3.4，3.5 的理想树中的任意一条路上，$D_T(v)$ 在 u_1 处取到最小值，$d(u_1)$ 和 $|V(U_1)|$ 在这条路上都是最大的。

下面有两种情况：

1) 如果重心为一个点，则命名为 v。

2) 如果重心为两个点，则两个分支(移除两个顶点之间的边)有相同的顶点数。选择其中一个顶点命名为 v，另一个命名为 v_1，

本文只证明第一种情况，第二种情况证明类似。

在以顶点 v 为根的理想树 (T, v) 中，很容易得出 v 是具有最大度的顶点。(引理 2.3 中(1)满足)

考虑任意一条以叶子点 u 开始，经过顶点 v，以叶子点 w 结束(w 和 u 有唯一相同的前序点 v)的路，在这条路上应用定理 3.5，使 $u_1 = v$，可以得出

$|d_T(u,v) - d_T(w,v)| \le 1$，即任意两个叶子点的高度差至多是 1。(引理 2.3 中(2)满足)

并且，可以推出对于任意两个顶点 x, y (y 是 x 的后序点)，都有 $d(x) \ge d(y)$。

对于高度为 i 的顶点 x 和高度为 j 的顶点 y ($i < j$)，考虑下面两种情况：

a) 如果 y 是 x 的后序点，可直接由上面得出 $d(x) \ge d(y)$

b) 否则，令 u 为 x, y 共同的前序点，且顶点 u 在 $P_T(x, y)$ 上。在通过顶点 y', y, u, x, x' 的路上应用定理 3.5 (y', x' 分别为 y, x 的后序点，且为叶子点)，有 $u_1 = u$，由定理 3.4 可知

$$x = u_{k+1}, y = w_l \text{ 或者 } x = w_k, y = u_{l+1}, \left(k = i - h_T(u), l = j - h_T(u), k+1 \le l\right),$$

根据定理 3.5 可推出 $d(x) \ge d(y)$。(引理 2.3 中(3)满足)

对于两个相同高度的非叶子点 x, y，满足 $d(x) \ge d(y)$。y', x' 分别为 y, x 的后序点，在通过顶点 y', y, u, x, x' 的最长路上应用定理 3.5 (u 为 x, y 共同的前序点，且顶点 u 在 $P_T(x, y)$ 上)，有 $u_1 = u$，根据定理 3.4 有，

$$x = w_k, x' = w_l, y = u_{k+1}, y' = u_{l+1}, \left(k = i - h_T(u), l = j - h_T(u)\right),$$

因此可以推出

$$d(x') \ge d(y')\text{。(引理 2.3 中(4)满足)}$$

令 $x_0(x'), y_0(y')$ 分别为 x, y 的 parents (siblings)，令 y'', x'' (高度为 j)分别为 y', x' 的后序点，由结论(4)可推出 $|V(T(x_0)/T(x'))| > |V(T(y_0)/T(y'))|$。现在考虑经过顶点 y'', y', u, x', x'' 的最长路，u 为 x, y 共同的前序点且顶点 u 在 $P_T(x, y)$ 上，应用定理 3.5 则有 $u_1 = u$，由定理 3.5 有

$x' = w_k, x'' = w_l, y' = u_{k+1}, y'' = u_{l+1}, \left(k = i - h_T(u), l = j - h_T(u)\right)$，

因此可以推出

$$d(x') \ge d(y'), d(x'') \ge d(y'')\text{。(引理 2.3 中(5)满足)}$$

从而覆盖成本最小的树是贪婪树，即理想树是贪婪树，定理证明完毕。

例 2. 度序列为 $(4, 4, 3, 3, 3, 3, 2, 2, 1, \cdots, 1)$ (1 的重数为 10)时，覆盖成本最小的树即贪婪树，如图 4 所示。

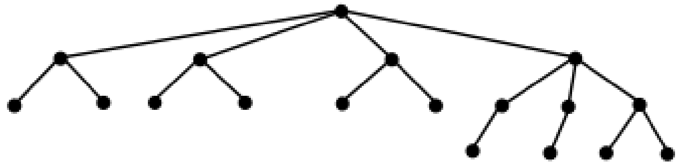

Figure 4. Greedy tree with degree sequence of (4,4,3,3,3,3,2,2,1,…,1)
图 4. 度序列为(4,4,3,3,3,3,2,2,1,…,1)的贪婪树

参考文献

[1] Fischermann, M., Hoffmann, A., Rautenbach, D., Székely, L. and Volkmann, L. (2002) Wiener Index versus Maximum Degree in Trees. *Discrete Applied Mathematics*, **122**, 127-137.

[2] Wang, H. (2008) The Extremal Values of the Wiener Index of a Tree with Given Degree Sequence. *Discrete Applied Mathematics*, **156**, 2647-2654.

[3] Zhang, X.D., Xiang, Q.Y., Xu, L.Q. and Pan, R.Y. (2008) The Wiener Index of Trees with Given Degree Sequences. *Match-Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, **60**, 623-644.

[4] Georgakopoulos, A. (2012) A Tractable Variant of Cover Time. arXiv:1206.6605.

[5] Georgakopoulos, A. and Wagner, S. (2017) Hitting Times, Cover Cost, and the Wiener Index of a Tree. *Journal of Graph Theory*, **84**, 311-326.

[6] Li, S.C. and Wang, S.J. (2020) Extremal Cover Cost and Reverse Cover Cost of Trees with Given Segment Sequence. *Discrete Mathematics*, **343**, 111791.

[7] Zhang, H.H. and Li, S.C. (2021) On the (Reverse) Cover Cost of Trees with Some Given Parameters. *Discrete Mathematics*, **344**, 112226.