Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2021, 10(8), 2633-2638
Published Online August 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2021.108273

Hans汉斯

Stern偏序集的flag f和flag h向量的性质研究

林佳倩

辽宁师范大学数学学院，辽宁 大连
Email: jiaqian-lin@hotmail.com

收稿日期：2021年7月2日；录用日期：2021年7月21日；发布日期：2021年8月3日

摘 要

Stern偏序集是组合数学中一类非常重要且有趣的偏序集，在组合计数中起到重要的统一作用。本篇论文从计数序理想角度出发，研究了Stern偏序集的flag f和flag h向量，并给出了具体表达公式。

关键词

Stern偏序集，flag f向量，flag h向量

The flag f and flag h Vectors of the Stern's Poset

Jiaqian Lin

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning
Email: jiaqian-lin@hotmail.com

Received: Jul. 2nd, 2021; accepted: Jul. 21st, 2021; published: Aug. 3rd, 2021

Abstract

The Stern's poset is one kind of partially ordered set with great importance and interest in Combinatorics, which plays a unifying role in combinatorial counting. In this paper, we study the flag f and flag h vectors of the Stern's poset from the viewpoint of counting order ideal, and then give the specific expression formulas.

Keywords

Stern's Poset, flag f Vector, flag h Vector

文章引用: 林佳倩. Stern 偏序集的 flag f 和 flag h 向量的性质研究[J]. 应用数学进展, 2021, 10(8): 2633-2638.
DOI: 10.12677/aam.2021.108273

1. 引言

设 P 是一个非空集合，如果在 P 的元素中定义一个二元关系 $\le$，满足：

1) 自反性：对所有 P 中元素 x 都有 $x \le x$；

2) 反对称性：如果 $x \le y$ 且 $y \le x$ 则有 $x = y$；

3) 传递性：如果 $x \le y$ 且 $y \le z$ 则有 $x \le z$。

那么 $\le$ 称为 P 上的一个偏序，P 连同此偏序 $\le$ 称为一个偏序集，记为 $(P,\le)$，简记为 P。若偏序集 P 中存在元素 x 满足对所有的 $y \in P$ 都有 $y \ge x$ （$y \le x$），则称 x 是 P 的极小元(极大元)，记为 $\hat{0}$ （$\hat{1}$）。若 $x < y$ 且没有 P 中元素 z 满足 $x < z < y$ 成立，则称 y 覆盖 x 并记为 $x \lessdot y$。每个偏序集都唯一的由它上面的覆盖关系决定。将偏序集中的每个元素画成一个点，任意两点间有边相连当且仅当这两点间有覆盖关系，这样得到的图称为偏序集的 Hasse 图，下面是一些常见的偏序集及其对应的 Hasse 图。

例 1.1 偏序集 $\mathcal{B}_n$：集合 P 是 $[n]$ 的所有子集合 $2^{[n]}$，二元关系 $\le$ 定义为子集的包含关系。如图 1 所示，

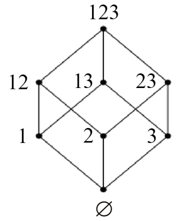

Figure 1. $\mathcal{B}_3$
图 1. $\mathcal{B}_3$

例 1.2 偏序集 D_n：集合 P 是正整数 n 的所有因子，二元关系 $\le$ 定义为整除关系。如图 2 所示，

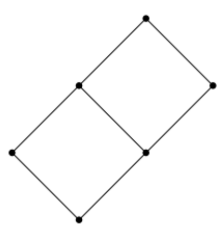

Figure 2. D_{12}
图 2. D_{12}

偏序集是现代数学的重要研究对象，是组合数学与其他数学分支之间联系的桥梁与纽带，在组合数学的研究中起着重要的统一作用[1] [2]。本文我们研究了 Stern 偏序集。

Pascal 三角是数学中非常著名的三角，它的前几项如图 3 所示。

类似于 Pascal 三角，我们也从一行中“向下”复制每个数字得到下一行，从而得到 Stern 三角。如图

4 所示。

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & & & & & \vdots & & & & &
\end{array}
$$

Figure 3. Pascal triangle
图 3. Pascal 三角

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & 1 & & & & 1 & & & & 1 & & & \\
 & 1 & & 1 & & 2 & & 1 & & 2 & & 1 & & 1 & \\
1 & 1 & 2 & 1 & 3 & 2 & 3 & 1 & 3 & 2 & 3 & 1 & 2 & 1 & 1 \\
 & & & & & & & \vdots & & & & & & &
\end{array}
$$

Figure 4. Stern's triangle
图 4. Stern 三角

将 Stern 三角上下翻转，Stern 三角中的每一个元素用 (a,b) 表示，对 Stern 三角中的元素定义序关系，满足：$(a',b') \le (a,b)$ 当且仅当 $a' \le a$ 且 $b' \le b$。最小元素 $(0,0)$，我们得到 Stern 偏序集如图 5 所示。

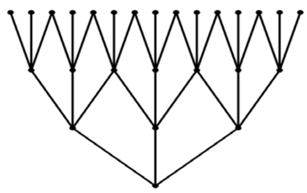

Figure 5. Stern's poest
图 5. Stern 偏序集

R. Stanley 定义了 Stern 偏序集并证明了对一个固定整数 $r \ge 1$，第 n 行元素的第 n 次幂和 $u_r(n)$ 满足常系数线性递归[3]。通过对 Stern 偏序集主理想的计数可以得到许多组合序列。

下面介绍组合学中的一些基本概念(详见[4]，Ch3)。设 P 是秩为 n 的有限偏序集，其秩函数 $\rho: P \to [0,n]$。如果 $S \subseteq [0,n]$，定义子偏序集 $P_s = \{t \in P : \rho(T) \in S\}$，称为 P 的 S 级子偏序集。定义 $\tilde{f}_P(S)$ (或简记为 $\tilde{f}(S)$)为 P_s 的最大链数。例如，$\tilde{f}(i)$ ($\tilde{f}(\{i\})$ 的简称)是 P 中秩为 i 的元素个数。定义函数 $\tilde{f}: 2^{[0,n]} \to Z$ 为 P 的 flag f 向量。通过公式 $\tilde{h}(S) = \sum_{T \subseteq S} (-1)^{\#(S-T)} \tilde{f}(T)$ 定义 $\tilde{h}_P(S) = \tilde{h}(S)$，函数 $\tilde{h}$ 称为 P 的 flag h 向量。$\tilde{f}$ 和 $\tilde{h}$ 这两个函数自然地出现在数学的不同领域，并得到广泛的研究[5] [6]。2020 年，牟丽丽通过建立 Hexagonal 格路的 n 阶理想与 Schröder 路的阶理想的双射关系给出了 Hexagonal 偏序集的一些组合性质，并给出了 Hexagonal 偏序集的 flag f 和 flag h 向量的递归公式[7]。同年，牟丽丽与我研究了 J. Propp 通过对 Ferrers 图进行变换得到的 Hexagonal 偏序集、Rhomb 偏序集等一类广义 Square 偏序集的 flag f 和 flag h 向量的递归公式。

2. Stern 偏序集的 flag f 和 flag h 向量

这部分我们主要研究了 Stern 偏序集的 flag f 和 flag h 向量。通过对 Stern 偏序集每一层的元素个数以

及层与层之间的最大链个数进行归纳总结，得到定理 2.1。

定理 2.1 令 $S=\{i_1,i_2,\cdots,i_t\}$ 并且 $S_m=\{i_1,i_2,\cdots,i_{t-m}\}$ 是 Stern 偏序集的秩数集，则

$$\tilde{f}(i_j)=2^{i_j+1}-1,\ \tilde{f}(S)=\tilde{f}(i_1)\tilde{f}(i_2-i_1)\tilde{f}(i_3-i_2)\cdots\tilde{f}(i_t-i_{t-1})。$$

证明：$\tilde{f}(i_j)$ 是秩为 i_j 层的元素个数，由图 5 易得 $\tilde{f}(i_j)=2^{i_j+1}-1$。

由 $\tilde{f}(i_j,i_k)$ 是秩为 i_j 层和秩为 i_k 层之间的最大链个数，而秩为 i_j 层每个元素到秩为 i_k 层均有 $(2^{i_k-i_j+1}-1)$ 条最大链，即 $\tilde{f}(i_k-i_j)$ 条最大链，而秩为 i_j 层共有 $\tilde{f}(i_j)$ 个元素，故 $\tilde{f}(i_j,i_k)=\tilde{f}(i_j)\tilde{f}(i_k-i_j)$。

公式对 $t=1,2$ 成立，下面考虑 $t>2$ 情况。

假设对 $t-1$ 成立，则有 $\tilde{f}(S_1)=\tilde{f}(i_1)\tilde{f}(i_2-i_1)\tilde{f}(i_3-i_2)\cdots\tilde{f}(i_{t-1}-i_{t-2})$，任取 $i_1,i_2,\cdots,i_t$ 层，秩为 i_{t-1} 层每个元素到秩为 i_t 层均有 $(2^{i_t-i_{t-1}+1}-1)$ 条最大链，即 $\tilde{f}(i_t-i_{t-1})$ 条最大链，而前 $i_1,i_2,\cdots,i_{t-1}$ 层共有 $\tilde{f}(S_1)$ 个元素，故 $\tilde{f}(S)=\tilde{f}(S_1)\tilde{f}(i_t-i_{t-1})=\tilde{f}(i_1)\tilde{f}(i_2-i_1)\tilde{f}(i_2-i_2)\cdots\tilde{f}(i_t-i_{t-1})$。 □

通过定理 2.1 我们可以得到以下两个推论。

推论 2.2 Stern 偏序集从 $(0,0)$ (底部元素)到第 n 层的饱和链的个数为 3^n。

推论 2.3 令 $S=\{1,2,\cdots,n\}$，则 $\tilde{f}([n])=3^n$。

现在我们应用 flag f 向量的公式得到 flag h 向量的公式。

定理 2.4 令 $S=\{i_1,i_2,\cdots,i_t\}$ 并且 $S_m=\{i_1,i_2,\cdots,i_{t-m}\}$ 是 Stern 偏序集的秩数集，则

$$\tilde{h}(i_j)=2^{i_j+1}-2,\tilde{h}(S)=\tilde{h}(i_1)\tilde{h}(i_2-i_1-1)\tilde{h}(i_3-i_2-1)\cdots\tilde{h}(i_t-i_{t-1}-1).$$

证明：根据 flag h 向量的定义，

$$\tilde{h}(i_j)=-1+\tilde{f}(i_j)=-1+2^{i_j+1}-1=2^{i_j+1}-2 \tag{2.1}$$

$$\tilde{h}(i_j,i_k)=1-\tilde{f}(i_j)-\tilde{f}(i_k)+\tilde{f}(i_j,i_k)=\tilde{h}(i_j)\tilde{h}(i_k-i_j-1)$$

现在 $\tilde{h}(S)$ 的公式对 $t=1,2$ 成立，我们对 $t-1$ 进行归纳，即，

$$\tilde{h}(S_1)=\tilde{h}(i_1)\tilde{h}(i_2-i_1-1)\tilde{h}(i_3-i_2-1)\cdots\tilde{h}(i_{t-1}-i_{t-2}-1) \tag{2.2}$$

考虑从 $t-1$ 到 t 的归纳步骤，根据 flag h 向量的定义，

$$\begin{aligned}\tilde{h}(S)&=(-1)^t+(-1)^{t-1}\sum_{1\le j\le t}\tilde{f}(i_j)+(-1)^{t-2}\sum_{j<p}\tilde{f}(i_j,i_p)+\cdots+\tilde{f}(S)\\&=-\tilde{h}(S_1)+(-1)^{t-1}\tilde{f}(i_t)+(-1)^{t-2}\sum_{j=1}^{t-1}\tilde{f}(i_j,i_t)+\cdots+\tilde{f}(S)\end{aligned}$$

我们希望证明，

$$\begin{aligned}&(-1)^{t-1}\tilde{f}(i_t)+(-1)^{t-2}\sum_{j=1}^{t-1}\tilde{f}(i_j,i_t)+\cdots+\tilde{f}(S)\\&=\tilde{h}(S_1)\big(1+\tilde{h}(i_t-i_{t-1}-1)\big)=\tilde{h}(S_1)\tilde{f}(i_t-i_{t-1}-1)\end{aligned} \tag{2.3}$$

这个定理源于，

$$\tilde{h}(S)=-\tilde{h}(S_1)+\tilde{h}(S_1)\big(1+\tilde{h}(i_t-i_{t-1}-1)\big)=\tilde{h}(S_1)\tilde{h}(i_t-i_{t-1}-1)$$

为了证明(2.3)，我们需要考虑以下两个事实：

事实 2.5

$$\tilde{f}(i_t)-\tilde{f}(i_j,i_t)=-\tilde{h}(i_j)\tilde{f}(i_t-i_j-1)=-2\tilde{f}(i_j-1)\tilde{f}(i_t-i_j-1) \tag{2.4}$$

$$\tilde{f}(i_1,\cdots,i_r,i_t)-\tilde{f}(i_1,\cdots,i_r,i_{t-1},i_t)=-2\tilde{f}(S_{t-r})\tilde{f}(i_t-i_r-1)\tilde{f}(i_t-i_{t-1}-1) \tag{2.5}$$

证明(2.4)，

$$\begin{aligned}\tilde{f}(i_t)-\tilde{f}(i_j,i_t)&=2^{i_t+1}-1-\left(2^{i_j+1}-1\right)\left(2^{i_t-i_j+1}-1\right)\\&=-\left(2^{i_j+1}-2\right)\left(2^{i_t-i_j}-1\right)\\&=-\tilde{h}(i_j)\tilde{f}(i_t-i_j-1)\\&=-2\tilde{f}(i_j-1)\tilde{f}(i_t-i_j-1)\end{aligned}$$

接下来证明(2.5)，

$$\begin{aligned}&\tilde{f}(i_1,\cdots,i_r,i_t)-\tilde{f}(i_1,\cdots,i_r,i_{t-1},i_t)\\&=\tilde{f}(S_{t-r})\tilde{f}(i_t-i_r)-\tilde{f}(S_{t-r})\tilde{f}(i_{t-1}-i_r)\tilde{f}(i_t-i_{t-1})\\&=\tilde{f}(S_{t-r})\left[2^{i_t-i_r+1}-1-\left(2^{i_{t-1}-i_r+1}-1\right)\left(2^{i_t-i_{t-1}+1}-1\right)\right]\\&=-\tilde{f}(S_{t-r})\left(2^{i_{t-1}-i_r}-2\right)\left(2^{i_t-i_{t-1}+1}-2\right)\\&=-2\tilde{f}(S_{t-r})\left(2^{i_{t-1}-i_r}-1\right)\left(2^{i_t-i_{t-1}}-1\right)\\&=-2\tilde{f}(S_{t-r})\tilde{f}(i_t-i_r-1)\tilde{f}(i_t-i_{t-1}-1)\end{aligned}$$

□

现在我们来证明(2.3)，通过(2.4)很容易得到(2.3)对 $t=2$ 成立。现在考虑 $t>2$ 情况，通过重排(2.3)得到，

$$\begin{aligned}&(-1)^{t-1}\left[\tilde{f}(i_t)-\tilde{f}(i_{t-1},i_t)\right]+(-1)^{t-2}\sum_{j<t-1}\left[\tilde{f}(i_j,i_t)-\tilde{f}(i_j,i_{t-1},i_t)\right]+\cdots+(-1)\left[\tilde{f}(i_1,\cdots,i_{t-2},i_t)-\tilde{f}(S)\right]\\&=(-1)^t 2\tilde{f}(i_{t-1}-1)\tilde{f}(i_t-i_{t-1}-1)+(-1)^{t-1}2\sum_{j<t-1}\tilde{f}(i_j)\tilde{f}(i_{t-1}-i_j-1)\tilde{f}(i_t-i_{t-1}-1)\\&\quad+\cdots+2\tilde{f}(S_2)\tilde{f}(i_{t-1}-i_{t-2}-1)\tilde{f}(i_t-i_{t-1}-1)\end{aligned}$$

提取公因式 $\tilde{f}(i_t-i_{t-1}-1)$，我们剩下，

$$(-1)^t 2\tilde{f}(i_{t-1}-1)+(-1)^{t-1}2\sum_{j<t-1}\tilde{f}(i_j)\tilde{f}(i_{t-1}-i_j-1)+\cdots+2\tilde{f}(S_2)\tilde{f}(i_{t-1}-i_{t-2}-1) \tag{2.6}$$

与(2.3)比较，我们只需要证明下列方程成立，

$$(2.6)=\tilde{h}(S_1)$$

然后提取(2.6)中的系数 $2\tilde{f}(i_{t-1}-1)$ 得到，

$$\begin{aligned}(2.6)=&2\tilde{f}(i_{t-1}-1)\tilde{h}(S_2)+(-1)^t\sum_{j<t-1}2^{i_{t-1}-i_j}\tilde{f}(i_j)\tilde{h}(i_j)+(-1)^{t-1}\sum_{j<p<t-1}2^{i_{t-1}-i_p}\tilde{f}(i_j,i_p)\tilde{h}(i_p)\\&+\cdots+(-1)2^{i_{t-1}-i_{t-2}}\tilde{f}(S_2)\tilde{h}(i_{t-2})\end{aligned}$$

事实 2.6

$$\begin{aligned}&(-1)^t\sum_{j<t-1}2^{i_{t-1}-i_j}\tilde{f}(i_j)\tilde{h}(i_j)+(-1)^{t-1}\sum_{j<p<t-1}2^{i_{t-1}-i_p}\tilde{f}(i_j,i_p)\tilde{h}(i_p)+\cdots+(-1)2^{i_{t-1}-i_{t-2}}\tilde{f}(S_2)\tilde{h}(i_{t-2})\\&=-2^{i_{t-1}-i_{t-2}}\tilde{f}(i_{t-2})\tilde{h}(S_2)\end{aligned} \tag{2.7}$$

证明事实 2.6：我们归纳 $t>2$ 的情况，不难验证 $t=3$ 是正确的。假设 $t-1$ 是正确的，则，

$$(-1)^{t-1}\sum_{j<t-2}2^{i_{t-1}-i_j}\tilde{f}(i_j)\tilde{h}(i_j)+(-1)^{t-2}\sum_{j<p<t-2}2^{i_{t-1}-i_p}\tilde{f}(i_j,i_p)\tilde{h}(i_p)+\cdots+2^{i_{t-1}-i_{t-3}}\tilde{f}(S_3)\tilde{h}(i_{t-3})$$
$$=-2^{i_{t-1}-i_{t-3}}\tilde{f}(i_{t-3})\tilde{h}(S_3)$$

因此，

$$\begin{aligned}(2.7)&=2^{i_{t-1}-i_{t-3}}\tilde{f}(i_{t-3})\tilde{h}(S_3)+2^{i_{t-1}-i_{t-2}}\tilde{h}(i_{t-2})\left[(-1)^t\tilde{f}(i_{t-2})+(-1)^{t-1}\sum_{j<t-2}\tilde{f}(i_j,i_{t-2})+\cdots-\tilde{f}(S_2)\right]\\&=2^{i_{t-1}-i_{t-3}}\tilde{f}(i_{t-3})\tilde{h}(S_3)-2^{i_{t-1}-i_{t-2}}\tilde{h}(i_{t-2})\left[\tilde{h}(S_2)+\tilde{h}(S_3)\right]\\&=2^{i_{t-1}-i_{t-3}}\tilde{f}(i_{t-3})\tilde{h}(S_3)-2^{i_{t-1}-i_{t-2}}\tilde{h}(i_{t-2})\tilde{f}(i_{t-2}-i_{t-3}-1)\tilde{h}(S_3)\\&=-2^{i_{t-1}-i_{t-2}}\tilde{f}(i_{t-2})\tilde{h}(i_{t-2}-i_{t-3}-1)\tilde{h}(S_3)\\&=-2^{i_{t-1}-i_{t-2}}\tilde{f}(i_{t-2})\tilde{h}(S_2)\end{aligned}$$

□

$$\begin{aligned}(2.6)&=2\tilde{f}(i_{t-1}-1)\tilde{h}(S_2)-2^{i_{t-1}-i_{t-2}}\tilde{f}(i_{t-2})\tilde{h}(S_2)\\&=\left[2\tilde{f}(i_{t-1}-1)-2^{i_{t-1}-i_{t-2}}\tilde{f}(i_{t-2})\right]\tilde{h}(S_2)\\&=\left(2^{i_{t-1}-i_{t-2}}-2\right)\tilde{h}(S_2)\\&=\tilde{h}(i_{t-1}-i_{t-2}-1)\tilde{h}(S_2)\\&=\tilde{h}(S_1)\end{aligned}$$

□

这就完成了证明。

由以上结论得到推论 2.7。

推论 2.7 令 $S=\{1,2,\cdots,n\}$，则 $\tilde{h}([n])=0$。

3. 结论

Stern 偏序集的定义由 R. Stanley 给出，我们根据 Stern 偏序集的性质和结构特点对其 flag f 和 flag h 向量的公式进行归纳。并应用牟丽丽给出的 Hexagonal 偏序集的 flag f 和 flag h 向量公式的方法，给出了 Stern 偏序集的 flag f 和 flag h 向量的具体表达式。

参考文献

[1] Rotr, C. (1964) On the Foundations of Combinatorial Theory I, Theory of Mobiousfunctions. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete*, **2**, 340-368. https://doi.org/10.1007/BF00531932

[2] Stanley, R. (1997) Enumerative Combinatorics Vol. 1. Cambridge University Press, Cambridge. https://doi.org/10.1017/CBO9780511805967

[3] Stanley, R. (2020) Some Linear Recurrences Motivated by Stern's Diatomic Array. *The American Mathematical Monthly*, **127**, 99-111. https://doi.org/10.1080/00029890.2020.1677104

[4] Stanley, R. (2012) Enumerative Combinatorics. 2nd Edition, Vol. 1. Cambridge University Press, Cambridge.

[5] Nyman, K. and Swartz, E. (2004) Inequalities for the h-Vectors and Flag h-Vectors of Geometric Lattices. *Discrete & Computational Geometry*, **32**, 533-548. https://doi.org/10.1007/s00454-004-1137-z

[6] Schweig, J. (2010) Convex-Ear Decompositions and the Flag H-Vector. *Electronic Journal of Combinatorics*, **18**, 4. https://doi.org/10.37236/491

[7] Mu, L. (2020) Some Combinatorial Properties of Hexagonal Poset. *Contributions to Discrete Mathematics*, **15**, 175-182.