Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2021, 10(8), 2784-2793**
Published Online August 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2021.108290

Hans汉斯

一类连图的Yamada多项式的性质

王　璐

辽宁师范大学，辽宁 大连
Email: 2440922484@qq.com

收稿日期：2021年7月11日；录用日期：2021年7月28日；发布日期：2021年8月12日

摘　要

Yamada多项式是图论中重要的不变量之一。本文主要研究了一类特殊空间图的多项式不变量的性质，在两点连图性质的基础上，通过利用Yamada多项式非环边的性质，给出了特殊的两点连图$(1,n)$与图(m,n)的Yamada多项式，进一步推广到一类特殊的三点连图的情形，研究了这类连图的Yamada多项式并给出了其推导公式。

关键词

Yamada多项式，不变量，连图

The Properties of Yamada Polynomials of a Class of Connected Graphs

Lu Wang

Liaoning Normal University, Dalian Liaoning
Email: 2440922484@qq.com

Received: Jul. 11th, 2021; accepted: Jul. 28th, 2021; published: Aug. 12th, 2021

Abstract

Yamada polynomial is one of the important invariants in graph theory. This paper mainly studies the properties of the polynomial invariants of a special type of space graph. Based on the properties of the two-point connected graph, by using the non-circular edge property of the Yamada polynomial, the Yamada polynomial of special two-point connected graph $(1,n)$ and (m,n) is given. Yamada polynomials are further extended to a special type of three-point connected graphs. The Yamada polynomials of this type of connected graphs are studied and their derivation formulas are given.

文章引用: 王璐. 一类连图的 Yamada 多项式的性质[J]. 应用数学进展, 2021, 10(8): 2784-2793.
DOI: 10.12677/aam.2021.108290

Keywords

Yamada Polynomial, Invariant, Connected Graph

1. 引言

图论可以看作是对纽结理论的一种推广，它也是拓扑学领域中的重要组成部分，图的等价分类问题在图论中具有十分重要的地位与作用，而图的多项式作为图的不变量已经被国内外许多专家学者在各方面进行了深入的研究，这为图论奠定了坚实的基础。Yamada 多项式作为图论中重要的多项式不变量，与 chromatic 多项式[1]之间有着紧密的联系。

本文主要研究一类特殊连图的 Yamada 多项式。在预备知识部分我们将介绍图论及图的 Yamada 多项式的一些基本概念；在第二部分我们将主要介绍图的 Yamada 多项式的性质；第三部分根据两点连图的性质，计算出了特殊连图(1, n)与图(m, n)的 Yamada 多项式，最后，通过研究计算得到了一类特殊的三点连图 Yamada 多项式的具体表达式。

2. 预备知识

2.1. 图的基本概念

定义 2.1 [2] 图 G 是指一个有序三元组$\left(V(G),E(G),\psi(G)\right)$，其中$V(G)$是图 G 的顶点集，$E(G)$是图 G 的边集且$E(G)\cap V(G)=\phi$，$\psi_G$是关联函数，它将 G 的每条边对应于 G 的无序顶点对(可以是相同顶点)。若边 e 和两个顶点 u 和 v 满足$\psi_G(e)=uv$，则称边 e 联结顶点 u 和 v，顶点 u 和 v 称为边 e 的端点。

注释 2.1 以后为了方便，分别用 V 和 E 表示图 G 的边集和顶点集。

注释 2.2 如果有一条边连接相同的顶点，那么我们称这样的边为环(loop)。

2.2. 洛朗多项式的定义

定义 2.2 [3] 图$G=(V,E)$，V 是 G 的顶点集，E 是 G 的边集。$\mu(G)$和$\beta(G)$分别表示图的连通分支数和一维 Betti 数。且$f(G)=x^{\mu(G)}y^{\beta(G)}$，$h(G)$是一个 2-洛朗多项式：

$$h(G)=h(G)(x,y)=\sum_{F\subset E}(-x)^{-|F|}f(G-F)$$

注释 2.3 F 是 E 的子集，$|F|$是 F 包含元素的数目，$G-F=(V,E-F)$且 x 和 y 是不定元，定义$h(\phi)=1$。且$G-F=(V,G-F)$。

2.3. Yamada 多项式的定义

定义 2.3 [3] 将 $x=-1$ 和 $y=-A-2-A^{-1}$ 代入到多项式$h(G)(x,y)$中，我们就得到一个多项式$H(G)(A)$：

$$H(G)(A)=h(G)\left(-1,-A-2-A^{-1}\right)$$

称$H(G)(A)$为图 G 的 Yamada 多项式。

2.4. 两点连图的定义

定义 2.4 [4] 若 u_1, v_1 为图 G 中的两个点，u_2, v_2 为图 H 中的两个点，将 u_1 和 u_2 粘合成一个新的顶点 u，再将 v_1 和 v_2 粘合成一个新的顶点 v，得到一个新图 $G:H$，称图 $G:H$ 为 G 和 H 的两点连图。

3. Yamada 多项式的性质

G/e 为收缩边 e 得到的图，$G-e$ 为删除边 e 得到的图。

给定两个图 G_1 和 G_2，$G_1 \cup G_2$ 表示图 G_1 和 G_2 的不交并，$G_1 \cdot G_2$ 表示图 G_1 和 G_2 的一点并。我们称 G 有一割边 e，如果 $G-e$ 比 G 有更多的连通分支数。

性质 3.1 [1] $H(\cdot) = -1$。

证明：由于 $h(\cdot) = (-x)^0 xy^0 = x$，

因此 $H(\cdot) = h(\cdot)(-1, -A-2-A^{-1}) = -1$。

性质 3.2 [1] 如果图 G 有一条割边，则 $H(G) = 0$。

证明：设 e 是 G 的割边，则 $G-e = G_1 \cup G_2$，$G/e = G_1 \cdot G_2$，由 $h(G)$ 的性质得，

$$
\begin{aligned}
h(G) &= h(G/e) - \frac{1}{x} h(G-e) \\
&= h(G_1 \cdot G_2) - \frac{1}{x} h(G_1 \cup G_2) \\
&= \frac{1}{x} h(G_1) h(G_2) - \frac{1}{x} h(G_1) h(G_2) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

因此 $H(G) = 0$。

性质 3.3 [1] $H(G) = -(A+1+A^{-1}) H(G-e)$，$e$ 是环边。

证明：记 $G-e = G'$，$F-e = F'$，那么 $|F| = |F'|+1$，$\mu(G'-F) = \mu(G-F)$，$1+\beta(G'-F) = \beta(G-F)$，则

$$
\begin{aligned}
h(G) &= \sum_{e \notin F \subset E} (-x)^{-|F|} x^{\mu(G-F)} y^{\beta(G-F)} + \sum_{e \in F \subset E} (-x)^{-|F|} x^{\mu(G-F)} y^{\beta(G-F)} \\
&= \sum_{F \subset E-e} (-x)^{-|F|} x^{\mu(G'-F)} y^{\beta(G'-F)+1} + \sum_{F' \subset E-e} (-x)^{-|F'|-1} x^{\mu(G'-F')} y^{\beta(G'-F')} \\
&= y \sum_{F \subset E-e} (-x)^{-|F|} x^{\mu(G'-F)} y^{\beta(G'-F)} - \frac{1}{x} \sum_{F' \subset E-e} (-x)^{-|F'|} x^{\mu(G'-F')} y^{\beta(G'-F')} \\
&= y h(G-e) - \frac{1}{x} h(G-e)
\end{aligned}
$$

因此 $H(G) = (-A-2-A^{-1}) H(G-e) + H(G-e) = -(A+1+A^{-1}) H(G-e)$。

性质 3.4 [1] $H(G) = H(G/e) + H(G-e)$，e 是非环边。

证明：记 $G-e = G'$，$F-e = F'$，那么 $|F| = |F'|+1$，则

$$
\begin{aligned}
h(G) &= \sum_{e \notin F \subset E} (-x)^{-|F|} x^{\mu(G-F)} y^{\beta(G-F)} + \sum_{e \in F \subset E} (-x)^{-|F|} x^{\mu(G-F)} y^{\beta(G-F)} \\
&= \sum_{F \subset E-e} (-x)^{-|F|} x^{\mu(G/e-F)} y^{\beta(G/e-F)} + \sum_{F' \subset E-e} (-x)^{-|F'|-1} x^{\mu(G'-F')} y^{\beta(G'-F')} \\
&= \sum_{F \subset E-e} (-x)^{-|F|} x^{\mu(G/e-F)} y^{\beta(G/e-F)} - \frac{1}{x} \sum_{F' \subset E-e} (-x)^{-|F'|} x^{\mu(G'-F')} y^{\beta(G'-F')} \\
&= h(G/e) - \frac{1}{x} h(G-e)
\end{aligned}
$$

因此 $H(G)=H(G/e)+H(G-e)$。

性质 3.5 [1] $H(G_1\cup G_2)=H(G_1)H(G_2)$。

证明：记 $F=F_1\cup F_2$，$E=E_1\cup E_2$，且 $F_1\subset E_1\subset G_1$，$F_2\subset E_2\subset G_2$，那么 $\mu(G_1\cup G_2)=\mu(G_1)+\mu(G_2)$，$\beta(G_1\cup G_2)=\beta(G_1)+\beta(G_2)$，则

$$
\begin{aligned}
h(G_1)h(G_2)&=\sum_{F_1\subset E_1\subset E}(-x)^{-|F_1|}x^{\mu(G_1-F_1)}y^{\beta(G_1-F_1)}\cdot\sum_{F_2\subset E_2\subset E}(-x)^{-|F_2|}x^{\mu(G_2-F_2)}y^{\beta(G_2-F_2)}\\
&=\sum_{F_1、F_2\subset E}(-x)^{-|F_1|-|F_2|}x^{\mu(G_1-F_1)+\mu(G_2-F_2)}y^{\beta(G_1-F_1)+\beta(G_2-F_2)}\\
&=\sum_{F_1、F_2\subset E}(-x)^{-|F_1|-|F_2|}x^{\mu(G_1\cup G_2-F_1\cup F_2)}y^{\beta(G_1\cup G_2-F_1\cup F_2)}\\
&=h(G_1\cup G_2)
\end{aligned}
$$

因此 $H(G_1\cup G_2)=H(G_1)H(G_2)$。

性质 3.6 [1] $H(G_1\cdot G_2)=-H(G_1)H(G_2)$。

证明：记 $F=F_1\cup F_2$，$E=E_1\cup E_2$，且 $F_1\subset E_1\subset G_1$，$F_2\subset E_2\subset G_2$，那么 $\mu(G_1\cup G_2-F)-1=\mu(G_1\cdot G_2-F)$，$\beta(G_1\cup G_2-F)=\beta(G_1\cdot G_2-F)$，则

$$
\begin{aligned}
h(G_1\cdot G_2)&=\sum_{F\subset E}(-x)^{-|F|}x^{\mu(G_1\cdot G_2-F)}y^{\beta(G_1\cdot G_2-F)}\\
&=\sum_{F\subset E}(-x)^{-|F|}x^{\mu(G_1\cup G_2-F)-1}y^{\beta(G_1\cup G_2-F)}\\
&=\sum_{F_1\subset E_1}\sum_{F_2\subset E_2}(-x)^{-|F_1|-|F_2|}x^{\mu(G_1-F_1)+\mu(G_2-F_2)-1}y^{\beta(G_1-F_1)+\beta(G_2-F_2)}\\
&=\frac{1}{x}\sum_{F_1\subset E_1}(-x)^{-|F_1|}x^{\mu(G_1-F_1)}y^{\beta(G_1-F_1)}\cdot\sum_{F_2\subset E_2}(-x)^{-|F_2|}x^{\mu(G_2-F_2)}y^{\beta(G_2-F_2)}\\
&=\frac{1}{x}h(G_1)\cdot h(G_2)
\end{aligned}
$$

因此 $H(G_1\cdot G_2)=-H(G_1)H(G_2)$。

4. 一类连图的 Yamada 多项式的性质

4.1. 两点连图 Yamada 多项式的性质

定理 4.1 [1] 图 G_1 和 G_2 有两个公共顶点 u 和 v，$G_1:G_2$ 表示图 G_1 和 G_2 的两点并，K_1 和 K_2 分别是粘接图 G_1 和 G_2 的顶点 u 和 v 得到的图，则

$$H(G_1:G_2)=\frac{1}{\sigma}\left[H(K_1)H(K_2)+(\sigma+1)H(G_1)H(G_2)+H(K_1)H(G_2)+H(K_2)H(G_1)\right]$$

4.2. 图 $(1,n)$ 的 Yamada 多项式的性质

定义 4.1 [5] 给定两个图 G，K，u_1，v_1 是图 G 的任意两个顶点，u_2，v_2 是图 K 的任意两个顶点，将顶点 u_1，u_2 用一条边连接起来，v_1，v_2 用 n 条边连接起来，如图 1 所示，所得到的图记作 $(1,n)$，$n\ge 1$。

定理 4.2 对于图 $(1,n)$，$n\ge 1$，有

$$H((1,n))=-\left(\frac{1-(-\sigma)^n}{1+\sigma}\right)H_GH_K+\left(\frac{1-(-\sigma)^n}{1+\sigma}\right)H(G:K)$$

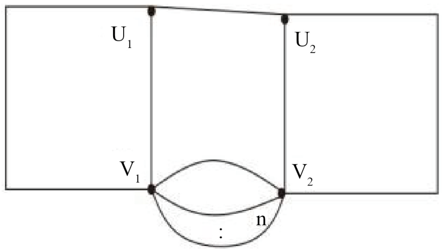

Figure 1. Figure $(1,n)$

图 1. 图$(1,n)$

其中：H_G，H_K 分别为图 G，K 的 Yamada 多项式；$H(G:K)$ 为图 G，K 的两点并的 Yamada 多项式，$\sigma = A+1+A^{-1}$。

证明：利用性质 3.4，对图$(1,n)$的 n 条边中的一条边进行缩边减边的运算，再对 $n-1$ 条边进行缩边减边的运算，以此类推，那么有等式

$$H((1,n)) = H((1,n-1)) + H(K_{n-1})$$

成立，其中 $H(K_{n-1}) = (-\sigma)^{n-1} H(F)$，则

$$H((1,n)) = H((1,n-1)) + (-\sigma)^{n-1} H(F) \tag{1}$$

由(1)式可知，

$$H((1,n)) = H((1,n-1)) + (-\sigma)^{n-1} H(F)$$

$$H((1,n-1)) = H((1,n-2)) + (-\sigma)^{n-2} H(F)$$

$$H((1,n-2)) = H((1,n-3)) + (-\sigma)^{n-3} H(F)$$

$$\vdots$$

$$H((1,2)) = H((1,1)) + (-\sigma)^{1} H(F)$$

$$H((1,1)) = H((1,0)) + (-\sigma)^{0} H(F)$$

所以

$$H((1,n)) = H((1,0)) + \left(1 + (-\sigma)^1 + (-\sigma)^2 + \cdots + (-\sigma)^{n-1}\right) H(F) \tag{2}$$

另外 $H(F) = -H_G H_K + H(G:K)$，将其代入到(2)中，得

$$H((1,n)) = -\left(\frac{1-(-\sigma)^n}{1+\sigma}\right) H_G H_K + \left(\frac{1-(-\sigma)^n}{1+\sigma}\right) H(G:K)$$

其中图 K_{n-1}，F 如图 2 所示。

4.3. 图(m,n)的 Yamada 多项式的性质

定义 4.2 [5] 给定两个图 G，K，u_1，v_1 是图 G 的任意两个顶点，u_2，v_2 是图 K 的任意两个顶点，若顶点 u_1，u_2 用 m 条边连接起来，v_1，v_2 用 n 条边连接起来，如图 3 所示，所得到的图记作(m,n)，且 $m,n \ge 1$。

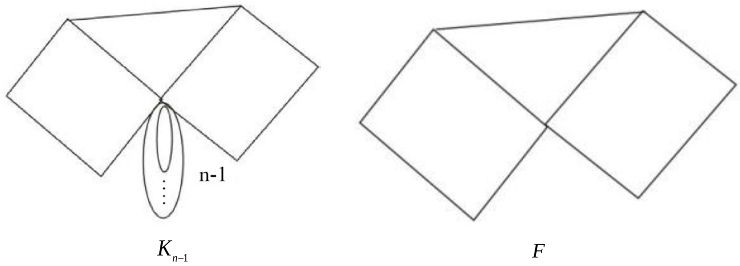

Figure 2. K_{n-1}, F

图 2. K_{n-1}，F

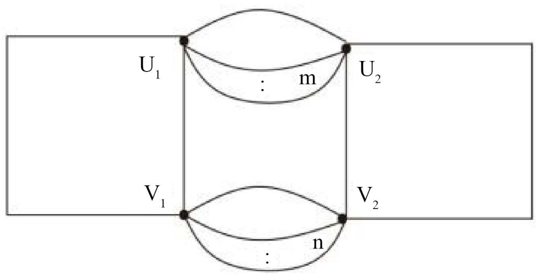

Figure 3. (m,n)

图 3. (m,n)

定理 4.3 对于图(m,n)，$m,n\ge 1$，有

$$H((m,n))=-\left(\frac{1-(-\sigma)^{n}+(-\sigma)\left(1-(-\sigma)^{m-1}\right)}{1+\sigma}\right)H_G H_K+\frac{\left(1-(-\sigma)^{n}\right)\left(1-(-\sigma)^{m}\right)}{(1+\sigma)^{2}}H(G:K)$$

其中：H_G，H_K分别为图 G，K 的 Yamada 多项式；$H(G:K)$为图 G，K 的两点并的 Yamada 多项式，$\sigma=A+1+A^{-1}$。

证明：首先利用性质 3.4，对图(m,n)的 m 条边其中的一条边进行缩边减边运算，得到图$(G\cup_n K)$，再对图$(G\cup_n K)$的 n 条边进行运算，其次对$m-1$条边进行缩边减边运算，以此类推，那么有等式

$$H((m,n))=H((m-1,n))+H(E_{m-1})$$

成立，其中$H(E_{m-1})=(-\sigma)^{m-1}H(G\cup_n K)$，则

$$\begin{aligned}H((m,n))&=H((m-1,n))+(-\sigma)^{m-1}H(G\cup_n K)\\&=H((m-1,n))+(-\sigma)^{m-1}H(G\cup_{n-1}K)+(-\sigma)^{m-1}H(F_{n-1})\end{aligned}$$

且$H(F_{n-1})=(-\sigma)^{n-1}H(G:K)$，代入上式中得

$$H((m,n))=H((m-1,n))+(-\sigma)^{m-1}H(G\cup_{n-1}K)+(-\sigma)^{m-1}(-\sigma)^{n-1}H(G:K) \tag{3}$$

另外有

$$H(G\cup_{n-1}K)=H(G\cup_{n-2}K)+(-\sigma)^{n-2}H(G:K)$$

$$H\left(G\cup_{n-2}K\right)=H\left(G\cup_{n-3}K\right)+\left(-\sigma\right)^{n-3}H\left(G:K\right)$$

$$H\left(G\cup_{n-3}K\right)=H\left(G\cup_{n-4}K\right)+\left(-\sigma\right)^{n-4}H\left(G:K\right)$$

$$\vdots$$

$$H\left(G\cup_{2}K\right)=H\left(G\cup_{1}K\right)+\left(-\sigma\right)^{1}H\left(G:K\right)$$

$$H\left(G\cup_{1}K\right)=-H_GH_K+H\left(G:K\right)$$

综上所述我们得到

$$H\left(G\cup_{n-1}K\right)=-H_GH_K+\left(1+\left(-\sigma\right)^1+\left(-\sigma\right)^2+\cdots+\left(-\sigma\right)^{n-2}\right)H\left(G:K\right)$$

将其代入(3)式可得

$$H\left(\left(m,n\right)\right)=H\left(\left(m-1,n\right)\right)-\left(-\sigma\right)^{m-1}H_GH_K+\left(-\sigma\right)^{m-1}\left(1+\left(-\sigma\right)^1+\left(-\sigma\right)^2+\cdots+\left(-\sigma\right)^{n-1}\right)H\left(G:K\right)$$

$$H\left(\left(m-1,n\right)\right)=H\left(\left(m-2,n\right)\right)-\left(-\sigma\right)^{m-2}H_GH_K+\left(-\sigma\right)^{m-2}\left(1+\left(-\sigma\right)^1+\left(-\sigma\right)^2+\cdots+\left(-\sigma\right)^{n-1}\right)H\left(G:K\right)$$

$$\vdots$$

$$H\left(\left(2,n\right)\right)=H\left(\left(1,n\right)\right)-\left(-\sigma\right)^{1}H_GH_K+\left(-\sigma\right)^{1}\left(1+\left(-\sigma\right)^1+\left(-\sigma\right)^2+\cdots+\left(-\sigma\right)^{n-1}\right)H\left(G:K\right)$$

$$H\left(\left(1,n\right)\right)=-\left(1+\left(-\sigma\right)^1+\left(-\sigma\right)^2+\cdots+\left(-\sigma\right)^{n-1}\right)H_GH_K+\left(1+\left(-\sigma\right)^1+\left(-\sigma\right)^2+\cdots+\left(-\sigma\right)^{n-1}\right)H\left(G:K\right)$$

由此我们可以得到

$$\begin{aligned}H\left(\left(m,n\right)\right)=&-\left(1+\left(-\sigma\right)^1+\left(-\sigma\right)^2+\cdots+\left(-\sigma\right)^{n-1}+\left(-\sigma\right)^1+\left(-\sigma\right)^2+\cdots+\left(-\sigma\right)^{m-1}\right)H_GH_K\\&+\left(1+\left(-\sigma\right)^1+\left(-\sigma\right)^2+\cdots+\left(-\sigma\right)^{n-1}\right)\left(1+\left(-\sigma\right)^1+\left(-\sigma\right)^2+\cdots+\left(-\sigma\right)^{m-1}\right)H\left(G:K\right)\\&=-\left(\frac{1-\left(-\sigma\right)^n+\left(-\sigma\right)\left(1-\left(-\sigma\right)^{m-1}\right)}{1+\sigma}\right)H_GH_K+\frac{\left(1-\left(-\sigma\right)^n\right)\left(1-\left(-\sigma\right)^m\right)}{\left(1+\sigma\right)^2}H\left(G:K\right)\end{aligned}$$

其中图 E_{m-1}， $G\cup_n K$， F_{n-1} 如图 4 所示。

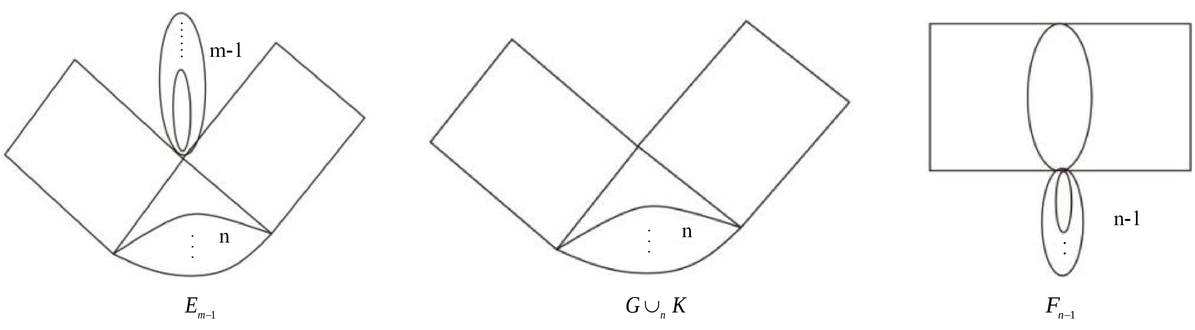

Figure 4. E_{m-1}, $G\cup_n K$, F_{n-1}

图 4. E_{m-1}， $G\cup_n K$， F_{n-1}

4.4. 一类三点连图 Yamada 多项式的性质

定理 4.4 给定两个图 G_1 和 G_2，$G_1 \vdots G_2$ 表示图 G_1 和 G_2 的三点连图，其中顶点 $u,v,w \subseteq G_1$，$u',v',w' \subseteq G_2$，设图 G_1 中的顶点 u 与 w，v 与 w 之间无边且无环边，图 G_2 中的顶点 u' 与 w'，v' 与 w' 之间无边且无环边。k_1,k_2,k_3,k_0 及 k_1',k_2',k_3',k_0' 分别为粘接图 G_1 和 G_2 的顶点 u 与 v，u 与 w，v 与 w，u,v,w 及 u' 与 v'，u' 与 w'，v' 与 w'，u',v',w' 得到的图，则

$$\begin{aligned}H\left(G_1 \vdots G_2\right)=&-\frac{1}{\sigma^2}\Big[H\left(k_0\right)H\left(k_0'\right)+(\sigma+1)H\left(k_1\right)H\left(k_1'\right)+H\left(k_0\right)H\left(k_1'\right)+H\left(k_0'\right)H\left(k_1\right)\\&+H\left(k_2\right)H\left(k_0'\right)+(\sigma+1)H\left(G_1\right)H\left(k_1'\right)+H\left(k_2\right)H\left(k_1'\right)+H\left(k_0'\right)H\left(G_1\right)\\&+\sigma(\sigma+1)H\left(G_1\right)H\left(G_2\right)+\sigma H\left(k_1\right)H\left(G_2\right)\Big]\end{aligned} \tag{4}$$

证明：令 $G=G_1 \vdots G_2$，$p(G)$，$q(G)$ 分别表示图 G 的顶点个数与边的个数，下面通过对图 G 的边数 $q(G)$ 用归纳法来证明这一定理。

若 $q(G)=0$，那么 G_1 和 G_2 都是由孤立顶点组成。假设 $p(G_1)=p_1 \ge 3$，$p(G_2)=p_2 \ge 3$，则 G 是由 p_1+p_1-3 个孤立点组成的图。由性质 3.1 和性质 3.5，得 $H(G)=(-1)^{p_1+p_2-3}$。

又因为 $p(k_1)=p_1-1$，$p(k_2)=p_1-1$，$p(k_3)=p_1-1$，$p(k_0)=p_1-2$，$p(k_1')=p_2-1$，$p(k_2')=p_2-1$，$p(k_3')=p_2-1$，$p(k_0')=p_2-2$，将其带入等式(4)的右边有：

$$\begin{aligned}H\left(G_1 \vdots G_2\right)=&-\frac{1}{\sigma^2}\Big[(-1)^{p_1-2}(-1)^{p_2-2}+(\sigma+1)(-1)^{p_1-1}(-1)^{p_2-1}+(-1)^{p_1-2}(-1)^{p_2-1}+(-1)^{p_2-2}(-1)^{p_1-1}\\&+(-1)^{p_1-1}(-1)^{p_2-2}+(\sigma+1)(-1)^{p_1}(-1)^{p_2-1}+(-1)^{p_1-1}(-1)^{p_2-1}+(-1)^{p_2-2}(-1)^{p_1}\\&+\sigma(\sigma+1)(-1)^{p_1}(-1)^{p_2}+\sigma(-1)^{p_1-1}(-1)^{p_2}\Big]\\=&(-1)^{p_1+p_2-3}\end{aligned}$$

因此等式(4)成立。

现在假设当 $q(G)<k$ 时，定理 4.4 成立，其中 $k \ge 1$。那么我们不妨设 $q(G)=k$，图 $G=G_1 \vdots G_2$，e 为图 G 的一条边，我们不妨假设 $e \in E(G_1)$。我们分两种情况进行讨论：

情况 1. e 是不连接顶点 u,v 的边，那么 e 为 k_1 的一条非环边。因此，

$$\begin{aligned}H(G/e)&=H\left(\left(G_1/e\right)\vdots G_2\right)\\&=-\frac{1}{\sigma^2}\Big[H\left(k_0/e\right)H\left(k_0'\right)+(\sigma+1)H\left(k_1/e\right)H\left(k_1'\right)+H\left(k_0/e\right)H\left(k_1'\right)+H\left(k_0'\right)H\left(k_1/e\right)\\&+H\left(k_2/e\right)H\left(k_0'\right)+(\sigma+1)H\left(G_1/e\right)H\left(k_1'\right)+H\left(k_2/e\right)H\left(k_1'\right)+H\left(k_0'\right)H\left(G_1/e\right)\\&+\sigma(\sigma+1)H\left(G_1/e\right)H\left(G_2\right)+\sigma H\left(k_1/e\right)H\left(G_2\right)\Big]\end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned}H(G-e)&=H\left(\left(G_1-e\right)\vdots G_2\right)\\&=-\frac{1}{\sigma^2}\Big[H\left(k_0-e\right)H\left(k_0'\right)+(\sigma+1)H\left(k_1-e\right)H\left(k_1'\right)+H\left(k_0-e\right)H\left(k_1'\right)+H\left(k_0'\right)H\left(k_1-e\right)\\&+H\left(k_2-e\right)H\left(k_0'\right)+(\sigma+1)H\left(G_1-e\right)H\left(k_1'\right)+H\left(k_2-e\right)H\left(k_1'\right)+H\left(k_0'\right)H\left(G_1-e\right)\\&+\sigma(\sigma+1)H\left(G_1-e\right)H\left(G_2\right)+\sigma H\left(k_1-e\right)H\left(G_2\right)\Big]\end{aligned}$$

因此，

$$
\begin{aligned}
H(G) &= H(G/e)+H(G-e) \\
&= -\frac{1}{\sigma^2}\Big[H(k_0/e)H(k_0')+(\sigma+1)H(k_1/e)H(k_1')+H(k_0/e)H(k_1')+H(k_0')H(k_1/e) \\
&\quad +H(k_2/e)H(k_0')+(\sigma+1)H(G_1/e)H(k_1')+H(k_2/e)H(k_1')+H(k_0')H(G_1/e) \\
&\quad +\sigma(\sigma+1)H(G_1/e)H(G_2)+\sigma H(k_1/e)H(G_2) \\
&\quad +H(k_0-e)H(k_0')+(\sigma+1)H(k_1-e)H(k_1')+H(k_0-e)H(k_1')+H(k_0')H(k_1-e) \\
&\quad +H(k_2-e)H(k_0')+(\sigma+1)H(G_1-e)H(k_1')+H(k_2-e)H(k_1')+H(k_0')H(G_1-e) \\
&\quad +\sigma(\sigma+1)H(G_1-e)H(G_2)+\sigma H(k_1-e)H(G_2)\Big] \\
&= -\frac{1}{\sigma^2}\Big[H(k_0)H(k_0')+(\sigma+1)H(k_1)H(k_1')+H(k_0)H(k_1')+H(k_0')H(k_1) \\
&\quad +H(k_2)H(k_0')+(\sigma+1)H(G_1)H(k_1')+H(k_2)H(k_1')+H(k_0')H(G_1) \\
&\quad +\sigma(\sigma+1)H(G_1)H(G_2)+\sigma H(k_1)H(G_2)\Big]
\end{aligned}
$$

情况 2. e 是连接顶点 u,v 的边，那么 e 为 k_1 的一条环边。由性质 3.3 及定理 4.1 得

$$
\begin{aligned}
H(G/e) &= H((k_1-e):k_1') \\
&= \frac{1}{\sigma}\Big[H(k_0-e)H(k_0')+(\sigma+1)H(k_1-e)H(k_1')+H(k_0-e)H(k_1')+H(k_0')H(k_1-e)\Big] \\
&= -\frac{1}{\sigma^2}\Big[H(k_0)H(k_0')+(\sigma+1)H(k_1)H(k_1')+H(k_0)H(k_1')+H(k_0')H(k_1)\Big]
\end{aligned}
$$

且

$$
\begin{aligned}
H(G-e) &= H((G_1-e)\vdots G_2) \\
&= -\frac{1}{\sigma^2}\Big[H(k_0-e)H(k_0')+(\sigma+1)H(k_1-e)H(k_1')+H(k_0-e)H(k_1')+H(k_0')H(k_1-e) \\
&\quad +H(k_2-e)H(k_0')+(\sigma+1)H(G_1-e)H(k_1')+H(k_2-e)H(k_1')+H(k_0')H(G_1-e) \\
&\quad +\sigma(\sigma+1)H(G_1-e)H(G_2)+\sigma H(k_1-e)H(G_2)\Big] \\
&= -\frac{1}{\sigma^2}\Big[H(k_2/e)H(k_0')+(\sigma+1)H(G_1/e)H(k_1')+H(k_2/e)H(k_1')+H(k_0')H(G_1/e) \\
&\quad +H(k_2-e)H(k_0')+(\sigma+1)H(G_1-e)H(k_1')+H(k_2-e)H(k_1')+H(k_0')H(G_1-e) \\
&\quad +\sigma(\sigma+1)H(G_1-e)H(G_2)+\sigma H(k_1-e)H(G_2)+\sigma(\sigma+1)H(G_1/e)H(G_2) \\
&\quad -\sigma(\sigma+1)H(G_1/e)H(G_2)\Big] \\
&= -\frac{1}{\sigma^2}\Big[H(k_2)H(k_0')+(\sigma+1)H(G_1)H(k_1')+H(k_2)H(k_1')+H(k_0')H(G_1) \\
&\quad +\sigma(\sigma+1)H(G_1)H(G_2)+\sigma H(k_1)H(G_2)\Big]
\end{aligned}
$$

因此，

$$
\begin{aligned}
H(G) &= H(G/e)+H(G-e) \\
&= -\frac{1}{\sigma^2}\Big[H(k_0)H(k_0')+(\sigma+1)H(k_1)H(k_1')+H(k_0)H(k_1')+H(k_0')H(k_1) \\
&\quad +H(k_2)H(k_0')+(\sigma+1)H(G_1)H(k_1')+H(k_2)H(k_1')+H(k_0')H(G_1) \\
&\quad +\sigma(\sigma+1)H(G_1)H(G_2)+\sigma H(k_1)H(G_2)\Big]
\end{aligned}
$$

定理 4.4 得证。

5. 结语

本文主要研究了一类特殊空间图的 Yamada 多项式的性质，通过利用 Yamada 多项式的性质，在两点连图的基础上，构造出了一类特殊的连图并给出了其具体表达式。未来还可以对空间图 Yamada 多项式的性质做进一步的研究。

参考文献

[1] Li, M., Lei, F., Li, F. and Vesnin, A. (2018) The Yamada Polynomial of Spatial Graphs Obtained by Edge Replacements. *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, **27**, Article ID: 1842004. https://doi.org/10.1142/S021821651842004X

[2] Negami, S. (1987) Polynomial Invariants of Graphs. *Transactions of the American Mathematical Society*, **299**, 601-622. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1987-0869224-1

[3] Yamada, S. (1989) An Invariant of Spatial Graphs. *Journal of Graph Theory*, **13**, 537-551. https://doi.org/10.1002/jgt.3190130503

[4] 廖云华, 谢小良. 两点连图的 Tutte 多项式及其应用[J]. 应用数学学报, 2016, 39(3): 393-401.

[5] 庚东雨. 一类空间图多项式的性质[D]: [硕士学位论文]. 大连: 辽宁师范大学, 2021.