

基于小波变换的图像压缩

张必慧

华北电力大学, 北京

Email: 1415434005@qq.com

收稿日期: 2021年7月23日; 录用日期: 2021年8月15日; 发布日期: 2021年8月24日

摘要

近年来, 随着数字通信技术的发展和网络、多媒体技术的兴起, 图像编码与压缩作为数据压缩的一个分支收到越来越多的关注。小波压缩技术是一种有损的图像压缩技术, 利用Mallat分解算法或者小波包方法对图像进行压缩与重构可以在保留图像重要信息的条件下, 尽量减少图像的存储空间, 便于储存和传输。本文通过运用Haar小波和db4小波, 两种小波对图像进行两层分解和低频系数重构, 发现对同一张图像, 同样层数的压缩Haar小波和db4小波对图像压缩的效果(压缩比)相差不大。而“sym4”小波包的压缩效果要比小波压缩效果更好。

关键词

小波变换, 图像压缩, 压缩比, 小波包

Image Compression Based on Wavelet Transform

Bihui Zhang

North China Electric Power University, Beijing

Email: 1415434005@qq.com

Received: Jul. 23rd, 2021; accepted: Aug. 15th, 2021; published: Aug. 24th, 2021

Abstract

In recent years, with the development of digital communication technology and the rise of network and multimedia technology, image coding and compression, as a branch of data compression, have received more and more attention. Wavelet compression technology is a lossy image compression technology. Using Mallat decomposition algorithm or wavelet packet method to compress and reconstruct the image can minimize the storage space of the image and facilitate storage

and transmission under the condition of retaining the important information of the image. In this paper, Haar wavelet and db4 wavelet are used to decompose the image into two layers and reconstruct the low-frequency coefficients. It is found that for the same image, the compression effect (compression ratio) of Haar wavelet and db4 wavelet with the same number of layers is almost the same. The compression effect of "sym4" wavelet packet is better than that of wavelet compression.

Keywords

Wavelet Transform, Image Compression, Compression Ratio, Wavelet Packet

Copyright © 2021 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

图像压缩是图像处理的一个重要部分，随着科学技术的发展现在我们的生活越来越多元化，每天我们都会浏览甚至下载很多的图片，这极大地占据了我们的存储空间，而图像压缩的目的就是减少图片的存储空间，尽量提取图片中的有用信息，减少冗余信息。在不影响图片的清晰度及不减少图片所蕴含的重要信息的前提下对图片进行压缩。近年来，小波变换在信号消噪、信号的奇异性检测、图像压缩、图像融合[1]、图像边缘检测[2]等中的广泛应用使其在电力信号检测[3]、材料检测[4]、地质检测[5]、机械故障诊断[6]、计算机视觉[7]等方面都起到了很大的作用，甚至有时在求解非线性问题[8]中也会用到小波变换。

本文主要将小波变换[9]应用于图像压缩处理。小波用于图像压缩的基本思想就是将图像进行多分辨率分解，分解成不同空间，不同频率的子图像，然后再对子图像进行系数筛选，去除冗余系数。根据 Mallat 算法[10]将图像分割成低频系数和高频系数，其中高频系数又包括水平、垂直和对角线三个方向。高频系数展示图片的细节信息，低频系数含有图像更多的能量。

2. 不同小波压缩效果的比较

2.1. 多分辨分析

1) 设 $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ 是由尺度函数 φ 生成的多分辨分析， $\{W_j\}$ 是 V_j 在 V_{j+1} 中的正交补空间，并有两尺度方程

$$\begin{cases} \varphi(x) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \varphi(2x - k) \\ \psi(x) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k \varphi(2x - k) \end{cases}$$

其中 $h_k(x) = \sqrt{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \overline{\varphi(2x - k)} dx$ ， $g_k(x) = (-1)^k \overline{h_{1-k}}$ 。

$\left\{ \varphi_{jk}(x) = 2^{\frac{j}{2}} \varphi(2^j x - k) \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$ 是 V_j 的标准正交基， $\left\{ \psi_{jk}(x) = 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j x - k) \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$ 是 W_j 的标准正交基，并

且有 $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$ ， $V_j \perp W_j$ ，且 $L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j$ 。

2) **Mallat 分解算法**[10]: 设 $f \in L^2(\mathbb{R})$ ， $f_j \in V_j$ ， $\left\{ \varphi_{jk}(x) = 2^{\frac{j}{2}} \varphi(2^j x - k) \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$ 是 V_j 的标准正交基，

$$f_j(x) = \sum_{k \in Z} c_{jk} \varphi_{jk}(x) = \sum_{k \in Z} c_{j-1,k} \varphi_{j-1,k}(x) + \sum_{k \in Z} d_{j-1,k} \psi_{j-1,k}(x)$$

故有

$$c_{jk} = \langle f_j, \varphi_{jk} \rangle, c_{j-1,k} = \langle f_j, \varphi_{j-1,k} \rangle, d_{j-1,k} = \langle f_j, \psi_{j-1,k} \rangle$$

其中 c_{jk} 为尺度系数, d_{jk} 为小波系数, 且有

$$c_{j-1,k} = \sum_{n \in Z} \overline{h_{n-2k}} c_{jn}, d_{j-1,k} = \sum_{n \in Z} \overline{g_{n-2k}} c_{jn}$$

Mallat 重构算法:

$$c_{jn} = \sum_{k \in Z} h_{n-2k} c_{j-1,k} + \sum_{k \in Z} g_{n-2k} d_{j-1,k}$$

2.2. Haar 小波压缩图像

Haar 尺度函数为

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

利用 Haar 小波将图像进行 2 层分解得到如下结果:

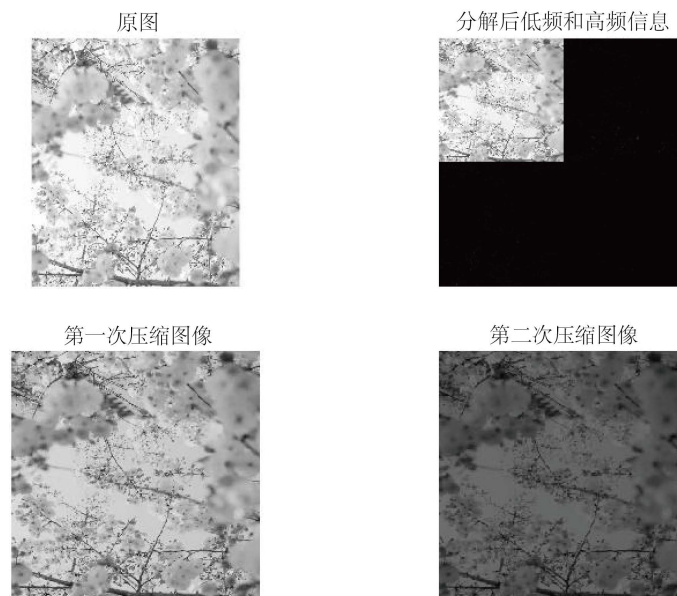


Figure 1. Haar wavelet compressed image
图 1. Haar 小波压缩图像

Table 1. Haar wavelet compression effect
表 1. Haar 小波压缩效果

Name	Size	Bytes	Class	压缩比
x1	1291 * 1080	11,154,240	double	
ca1	646 * 540	2,790,720	double	25%
ca2	323 * 270	697,680	double	6.25%

如上图 1 中的压缩效果,其中第一次压缩提取的是原始图像中小波分解第一层的低频信息 ca1,从表 1 中可以看到此时压缩比较小,大约是 25%,且图像的尺寸与内存都有了明显的缩减,图像也比较清晰,压缩效果较好。第二次压缩是提取小波分解第二层的低频部分,由表 1 知其压缩比大约为 6.25%,内存与尺寸减小的更多,因为此时省略的高频信息不仅有第一层分解中的高频信息,还有第二层中的高频信息,这些信息省略的越多,压缩比就越小,但是压缩后图像的一些重要信息就很有可能会丢失,从而造成图像失真、模糊等情况。

2.3. db4 小波压缩图像

利用“db4”小波将图像进行 2 层分解,并分别提取其低频系数,在压缩过程中只保存原始图像中的低频信息,不经过其他处理,得到下面的压缩结果。

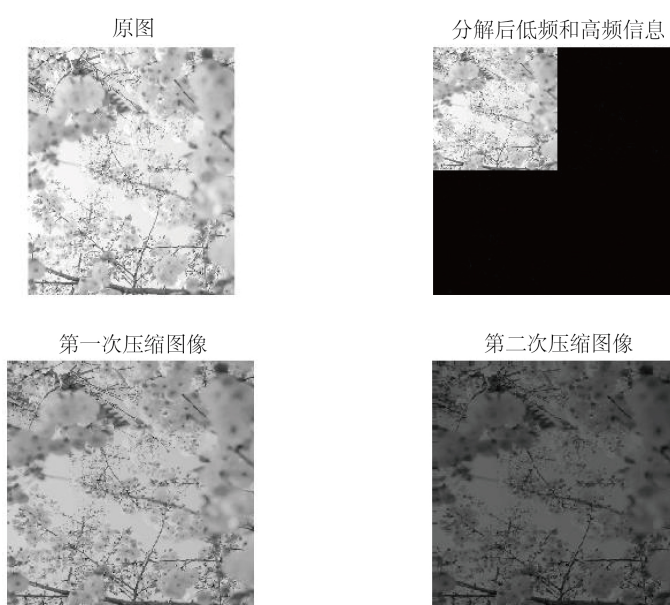


Figure 2. db4 wavelet compressed image
图 2. db4 小波压缩图像

Table 2. db4 wavelet compression effect
表 2. db4 小波压缩效果

Name	Size	Bytes	Class	压缩比
x1	1291 * 1080	11,154,240	double	
ca1	649 * 543	2,819,256	double	25.28%
ca2	328 * 275	721,600	double	6.47%

如上图 2 的压缩结果,其中第一次压缩提取的是原始图像中小波分解第一层的低频信息 ca1,由表 2 可以看到此时压缩比较小,大约是 25.28%,图像的尺寸与内存有明显的缩减,图像也比较清晰,压缩效果较好。第二次压缩是提取小波分解第二层的低频部分,由表 2 知其压缩比大约为 6.47%。

比较:从表 1 和表 2 中数据可以看出,用“db4”小波进行 2 层分解所得到的图像的压缩比与使用“haar”小波进行 2 层压缩得到的图像的压缩比相差不大,“db4”的压缩比略大于“haar”的压缩比。

3. 小波包压缩图像

3.1. 小波包分解

我们知道，给定一个 f 可以运用 Mallat 算法对其进行分解与重构，得到高频和低频两部分，且低频部分可以再次进行分解为高频和低频。而高频部分的分解则要通过小波包方法来完成，小波包的定义[10]如下：

使用记号 $u_0(x) = \varphi(x), u_1(x) = \psi(x)$ 。

定义 u_n 如下：
$$\begin{cases} u_{2n}(x) = \sqrt{2} \sum_{k \in Z} h_k u_n(2x-k) \\ u_{2n+1}(x) = \sqrt{2} \sum_{k \in Z} g_k u_n(2x-k) \end{cases}$$
 称函数集合 $\{u_n(x)\}_{n=0}^{+\infty}$ 为由 $u_0 = \varphi$ 所确定的小波包，

即

正交小波包。

小波包分解算法[10]：
$$\begin{cases} d_{jl}^{2n} = \sum_{k \in Z} \overline{h_{k-2l}} d_{j+1,k}^n \\ d_{jl}^{2n+1} = \sum_{k \in Z} \overline{g_{k-2l}} d_{j+1,k}^n \end{cases}。$$

小波包重构算法[10]： $d_{j+1,l}^n = \sum_{k \in Z} (h_{l-2k} d_{jk}^{2n} + g_{l-2k} d_{jk}^{2n+1})。$

3.2. 小波包压缩结果及分析

利用“sym4”小波包对图像进行压缩，压缩结果如下图所示。

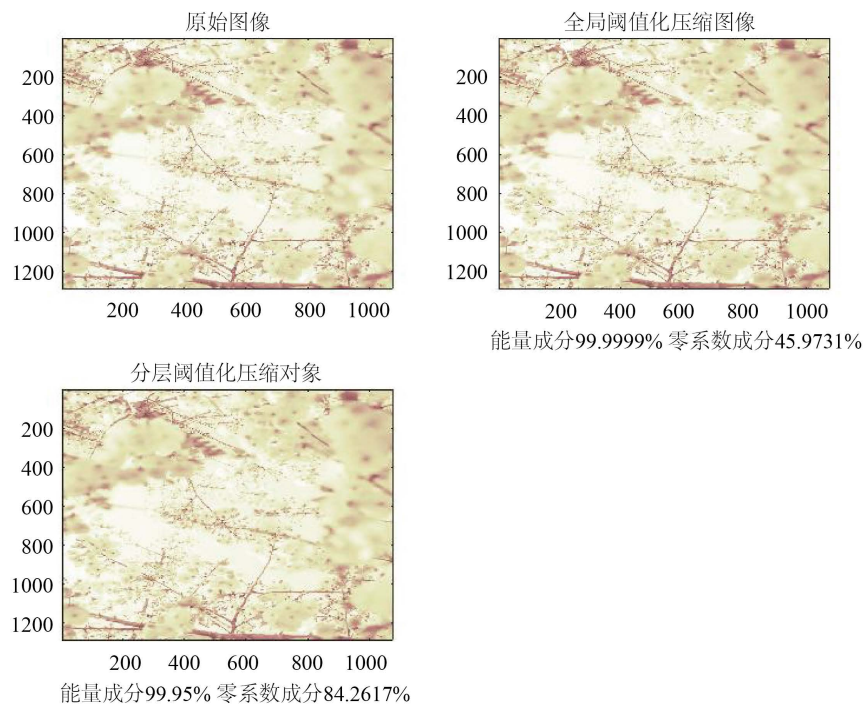


Figure 3. “sym4” wavelet packet compression results

图 3. “sym4” 小波包压缩结果

从图 3 中可以看出虽然全局阈值化压缩图像所保留的原图像的能量更多，但是其零系数成分比较少，对图片的压缩比率较小；而分层阈值化压缩图像能够保证在拥有较高原图像能量的前提下使零系数的成

分也很高，这就使得图像压缩达到了很好的效果。

4. 结论

1) 同一张图像，采用相同的压缩方法，相同压缩层数的不同小波去压缩图像所得到的效果相差不大。

2) 通过对比 Haar 小波、db4 小波和“sym4”小波包压缩的结果发现，小波包压缩的结果压缩比更大，保留原图像的能量成分更高。这是由于在进行小波压缩时，我们采用的压缩方法是在重构过程中只分别保留第一层和第二层的低频信号进行新图像的重构，所以得到了更小的压缩比，这种方法虽然简单地减小了压缩比，但是这种省略高频细节信息的压缩方法如果遇到了高频系数居多的图像情况，就会使图像的能量损失增大，可能会使图片失真，而不再适用。而这种高频成分较多的图像，小波包的分解细节信息的特点尤其能发挥其优势，能够既保留大部分能量，又达到较小的压缩比。

参考文献

- [1] 马震, 马立修, 潘金凤, 刘冲. 基于 IHS 和小波变换的电晕放电图像融合方法[J]. 激光杂志, 2021, 42(6): 51-55.
- [2] 孙青锋. 一种基于小波变换的边缘检测算法[J]. 河北北方学院学报(自然科学版), 2021, 37(3): 10-14.
- [3] 郜逸星. 内蒙地区输电线路故障率预测模型的小波去噪方法研究[D]: [硕士学位论文]. 北京: 华北电力大学, 2020.
- [4] 刘立伟. 基于小波变换的木材应力波缺陷检测研究[D]: [硕士学位论文]. 哈尔滨: 东北林业大学, 2017.
- [5] 薛雅娟, 曹俊兴. 基于小波包倒谱的地震声纹分析技术及其在储层含气性检测中的应用[C]//中国地球物理学会、全国岩石学与地球动力学研讨会组委会、中国地质学会构造地质学与地球动力学专业委员会、中国地质学会区域地质与成矿专业委员会. 2014 年中国地球科学联合学术年会——专题 18: 油藏地球物理论文集, 2014: 1.
- [6] 邢钧. 基于小波分析的齿轮箱故障诊断技术的研究和应用[D]: [硕士学位论文]. 北京: 北京工业大学, 2002.
- [7] 王智文, 刘美珍, 蔡启先, 李道丰. 基于小波分析和伪彩色的遥感图像增强[J]. 计算机工程与设计, 2008(18): 4771-4772+4776.
- [8] 徐聪. 复杂区域强非线性力学问题求解的小波方法[D]: [博士学位论文]. 兰州: 兰州大学, 2020.
- [9] 徐长发, 李国宽. 实用小波方法[M]. 第 3 版. 武汉: 华中科技大学出版社, 2009.
- [10] 刘明才. 小波分析及其应用[M]. 第 2 版. 北京: 清华大学出版社, 2013.