

# 在智能网联车中考虑电子节气门开度的多前车速度差的跟驰模型

周琳\*, 李良鹏, 化存才#

云南师范大学数学学院, 云南 昆明

Email: 1401972442@qq.com, liliangpengxin@163.com, \*cuncai-hua@139.com

收稿日期: 2021年8月9日; 录用日期: 2021年9月1日; 发布日期: 2021年9月10日

## 摘要

在智能网联车辆(Connected and autonomous vehicles, CAVs)的环境下, 多前车信息基于车车互联(vehicle-to-vehicle, V2V)技术相通。为此, 本文在多前车速度差模型中, 考虑电子节气门开度的影响, 提出了一个新的改进模型(T-MVD)。首先, 导出了模型的线性稳定性条件, 并计算了在不同的多前车数量 $m$ 和电子节气门角度差的权重系数 $\omega$ 下的稳定性区域面积占比, 发现随着 $m$ 和 $\omega$ 的增大, 稳定性区域面积的占比也在增大; 其次, 利用约化摄动法导出了T-MVD模型在不同区域下的密度波方程——Burgers方程、mKdV方程、KdV方程; 最后, 在不同的 $m$ 和 $\omega$ 值下对T-MVD模型进行了数值模拟, 结果表明该模型能有效地抑制交通阻塞, 以及高速状态下的致稳作用。

## 关键词

交通流, 智能网联车, 稳定性分析, 数值模拟

# Multi-Front Vehicle Velocity Difference Car Following Model by Considering the Electronic Throttle Opening in Intelligent-Network Connected Cars

Lin Zhou\*, Liangpeng Li, Cuncai Hua#

School of Mathematics, Yunnan Normal University, Kunming Yunnan

Email: 1401972442@qq.com, liliangpengxin@163.com, \*cuncai-hua@139.com

\*第一作者。

#通讯作者。

## Abstract

In the environment of connected and autonomous vehicles (CAVs), the information multi-front vehicle is connected with each other on the basis of vehicle to vehicle technology (V2V). For this, a new improved model (T-MVD) is proposed by considering the influence of electronic throttle opening in the multi-front vehicle velocity difference model. Firstly, the linear stability condition of the model is derived, and the proportion of the area of the stability region is calculated with the weighted coefficients of the number of vehicles  $m$  and the angle difference of the electronic throttle  $\omega$ . It is found that the area of stability region increases with  $m$  and  $\omega$ . Secondly, the Burgers equation, mKdV equation and KdV equation of T-MVD model are derived respectively in different regions by using the reduced perturbation method. Finally, the T-MVD model is numerically simulated in different  $m$  and  $\omega$  under the condition of high velocity. The results show that the T-MVD can effectively restrain the traffic jam and stabilize the vehicle at high velocity.

## Keywords

Traffic Flow, Intelligent-Network Connected Vehicle, Stability Analysis, Numerical Simulation

Copyright © 2021 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

随着通信和智能交通信息技术水平的提高,智能网联车(Connected and autonomous vehicles,简称CAVs)将会在未来逐渐得到广泛推行应用,它通过车与车互联(vehicle-to-vehicle,简称V2V)技术共享来获得更多前车的交通运行信息及其周围路况、地理位置等多种信息,从而有利于驾驶员安全驾驶,确保抑制交通堵塞,避免发生交通事故。

智能网联车环境下的交通流问题成为一个新的研究热点。在微观跟驰模型, Bando 等[1]提出的优化速度模型已被广泛研究,之后 Helbing 等[2]考虑了负速度差的影响提出了广义力(General Force, GF)模型,姜锐[3]提出了全速度差(Full Velocity Difference, FVD)模型。接下来,许多学者都在 FVD 模型上,基于实际交通情况考虑后视效应和速度差信息、加速度效应而改进模型[4] [5] [6] [7],王涛等[8]在可获知多辆前导车的速度信息的情况下,提出了多前车速度差(Multiple Velocity Difference, MVD)模型, MVD 模型的交通流稳定区域相比 FVD 模型有所增大,由此说明多前车信息对于交通致稳作用更大,更能使交通顺畅。电子节气门控制(electronic throttle control, ETC)是车辆控制的核心,在 CAV 智能系统中,如果知道前车电子节气门(ET)的开度,那么,处于同一排的后车可调整其 ET 来自动反应而避免交通堵塞和碰撞,1991年, Hedrick 等[9],1994年 Ioannou 等[10]开展了关于电子节气门开度与车速的研究,后来也有许多学者研究过 ETC [11] [12] [13] [14]。特别地,2016年, Li 等[15]在 FVD 模型的基础上研究电子节气门的影响,结果是扩大了交通流稳定性区域,说明基于车车通讯技术提高了 CAV 系统的性能;然而,他们所考虑的都是最近邻车辆,进而, Li 等[16]和 Chen 等[17]还分别考虑了延迟速度差和平均车头时距的影响的跟驰模型,理论上的结果表明稳定交通流更加有效,更能缓解交通拥堵。

本文主要在智能交通系统中 CAV 的应用环境下, 提出考虑车辆加载有电子节气门开度的多辆前车速度差模型, 称为 T-MVD (the throttle-based Multiple Velocity Difference) 模型。首先用线性稳定性方法导出 T-MVD 模型的稳定性条件, 并通过约化摄动法导出模型的密度波方程——Burgers 方程、mKdV 方程、KdV 方程, 接着通过 Matlab 编程计算模拟验证 T-MVD 模型的合理性。

## 2. T-MVD 模型的提出

1961 年, Newell 等[18]基于依赖车头间距的优化速度思想提出了如下的车辆跟驰模型:

$$v_n(t+\tau) = V(\Delta x_n(t)) \quad (1)$$

其中,  $\tau$  表示驾驶车辆的延迟时间,  $v_n$  为第  $n$  辆车的瞬时速度,  $V(\Delta x_n(t))$  表示依赖车辆车头间距  $\Delta x_n(t)$  行驶允许的最优速度。

1995 年, Bando 等[1]进一步提出了如下的优化速度模型(Optimal Velocity Model, OVM):

$$\dot{v}_n(t) = a[V(\Delta x_n(t)) - v_n(t)] \quad (2)$$

其中,  $a$  为敏感系数,  $V(\Delta x_n(t))$  表示依赖车辆车头间距  $\Delta x_n(t)$  行驶允许的最优速度。

2001 年, 姜锐[3]考虑全速度差的影响, 提出了 FVD 模型:

$$\dot{v}_n(t) = a[V(\Delta x_n(t)) - v_n(t)] + \lambda \Delta v_n(t) \quad (3)$$

其中,  $\lambda$  为速度差反应系数,  $\Delta v_n(t) = v_{n+1}(t) - v_n(t)$ 。

2006 年, 王涛等[8]提出了如下多前车速度差模型:

$$\dot{v}_n(t) = a[V(\Delta x_n(t)) - v_n(t)] + \sum_{j=1}^m k_j \Delta v_{n+j-1}(t) \quad (4)$$

其中,  $k_j$  为前车  $j$  的速度差  $\Delta v_{n+j-1}(t)$  反应系数,  $m \ll N$ , 且  $k_j > k_{j+1}$ 。

2012 年, 唐亮等[19]基于多前导车位置与速度信息的影响提出多期望速度与速度差模型:

$$\dot{v}_n(t) = \sum_{j=1}^m a_j [V(\Delta x_n(t)) - v_n(t)] + \lambda_j \Delta v_{n+j-1}(t) \quad (5)$$

其中,  $a_j$  为前导车  $j$  的敏感系数,  $a_j > a_{j+1}$ ,  $m \ll N$ 。

2016 年, Li 等[15]在 FVD 模型的基础上, 考虑电子节气门的开度的影响, 提出了如下的 T-FVD (Throttle-based FVD)模型:

$$a_i(t) = k[V(\Delta x_i(t)) - v_i(t)] + \lambda \Delta v_i(t) + \kappa \Delta \theta_i \quad (6)$$

其中,  $\Delta \theta_i = \theta_{i+1} - \theta_i$  为车  $i+1$  与车  $i$  的角度差,  $\kappa$  为敏感系数。

实际上, 在 CAV 的环境下, 驾驶员通过 V2V 技术快速获取信息重视车辆驾驶安全行为, 从而能有效地提高交通流的稳定性。因此, 本文在车联网环境下, 基于多前车速度差模型(4), 考虑电子节气门开度的影响, 提出如下的 T-MVD 模型:

$$a_j(t) = k[V(\Delta x_j(t)) - v_j(t)] + \sum_{l=1}^m \lambda_l \Delta v_{j+l-1}(t) + \omega \Delta \theta_j \quad (7)$$

其中,  $k$  为驾驶员在驾驶过程中敏感系数,  $\lambda_l$  为前车  $j$  的速度差  $\Delta v_{j+l-1}(t)$  反应系数,  $m$  表示前  $m$  辆车,  $l=1, 2, \dots, m$ ,  $w$  为电子节气门角度差的权重系数;  $h_c$  为安全距离。优化速度函数选取文献[20]中的如下形式:

$$V(\Delta x_j(t)) = \frac{V_{\max}}{2} [\tanh(\Delta x_j - h_c) + \tanh(h_c)] \quad (8)$$

当  $\omega = 0$  时, (7) 为多速度差模型(4) [8], 且当  $\omega \neq 0, m = 1$  时, (7) 为 T-FVD 模型(6) [3]。

### 3. T-MVD 模型的线性稳定性分析

本节用线性稳定性分析方法来分析 T-MVD 模型(7)的线性稳定性。

为方便计算起见, 将方程(7)改写为:

$$\ddot{x}_j(t) = k[V(\Delta x_j(t)) - \dot{x}_j(t)] + \sum_{l=1}^m \lambda_l \Delta \dot{x}_{j+l-1}(t) + \omega \Delta \theta_j \quad (9)$$

假设车辆在交通流系统中的初始状态是稳定的, 车辆都以相同的车头时距和最佳速度行驶, 车头间距为  $h$ , 对应的最优速度为  $V(h)$ , 那么稳态交通流中车辆的位置可以表示为:

$$x_j^0(t) = hj + V(h)t, h = L/N \quad (10)$$

在稳态交通流系统施加一个小扰动  $y_j(t)$ ,  $y_j(t) = \exp(ijk + zt)$ , 则  $x_j(t)$  为

$$x_j(t) = x_j^0(t) + y_j(t) \quad (11)$$

将(10)和(11)代入方程(9), 可得:

$$\ddot{y}_j(t) = k[V(h + \Delta y_j(t)) - V(h) - \dot{y}_j(t)] + \sum_{l=1}^m \lambda_l \Delta \dot{y}_j(t) + \omega \Delta \theta_j \quad (12)$$

其中,  $\Delta y_j(t) = y_{j+1}(t) - y_j(t)$ 。

由文献[10] [11]可知, ET 角度与车辆速度的方程如下:

$$a_j(t) = -e(v_j(t) - v_0) + c\bar{\theta}_j + d_j \quad (13)$$

其中,  $\bar{\theta}_j = \theta_j - \theta_0$ , 为油门偏离  $\theta_0$  的角度,  $v_0$  为稳态车辆,  $e$  与  $c$  时随  $v_0$  变化的系数,  $d_j$  为小扰动。

于是, 分别有

$$\theta_j = \bar{\theta}_j + \theta_0 = \frac{1}{c}(\ddot{y}_j(t) + e\dot{y}_j(t) - d_j) + \theta_0 \quad (14)$$

$$\Delta \theta_j = \frac{1}{c}(\Delta \ddot{y}_j(t) + e\Delta \dot{y}_j(t)) \quad (15)$$

其中,  $\Delta \theta_j = \theta_{j+1} - \theta_j$ 。

将(15)代入(12)式, 整理得到:

$$\ddot{y}_j(t) = k[V'(h)\Delta y_j(t) - \dot{y}_j(t)] + \sum_{l=1}^m \lambda_l \Delta \dot{y}_{j+l-1}(t) + \frac{\omega}{c}(\Delta \ddot{y}_j(t) + e\Delta \dot{y}_j(t)) \quad (16)$$

其中,  $V'(h) = \left. \frac{dV(\Delta x_j)}{d\Delta x_j} \right|_{\Delta x_j = h}$ 。

又将  $y_j(t) = \exp(ijk + zt)$  代入(16), 整理得到:

$$z^2 = k[V'(h)(\exp(ik) - 1) - z] + z \sum_{l=1}^m \lambda_l (\exp(ilk) - \exp(ilk - ik)) + \frac{\omega}{c}(z^2 + ez)(\exp(ik) - 1) \quad (17)$$

将参数  $z$  展开为  $z = z_1(ik) + z_2(ik)^2 + \dots$ , 保留至  $ik$  的二次项, 代入(17), 整理得到:

$$z_1 = V'(h), \quad z_2 = \frac{k + 2\sum_{l=1}^m \lambda_l + \frac{2e\omega}{c}}{2k} V'(h) - \frac{V'(h)^2}{k}$$

如果  $z_2 > 0$ ，原交通流系统保持稳定；如果  $z_2 < 0$ ，原交通流系统将不稳定。在  $z_2 = 0$  时，得到其稳定性临界条件：

$$k = 2 \left( V'(h) - \sum_{l=1}^m \lambda_l - \frac{e\omega}{c} \right) \tag{18}$$

由于  $V'(h) - \sum_{l=1}^m \lambda_l > V'(h) - \sum_{l=1}^m \lambda_l - \frac{e\omega}{c}$ ，故有稳定性条件  $k > V'(h) - \sum_{l=1}^m \lambda_l - \frac{e\omega}{c}$  包含了多前车速度差模型的  $k > V'(h) - \sum_{l=1}^m \lambda_l$ ，这表明电子油门开度扩大了稳定性区域。

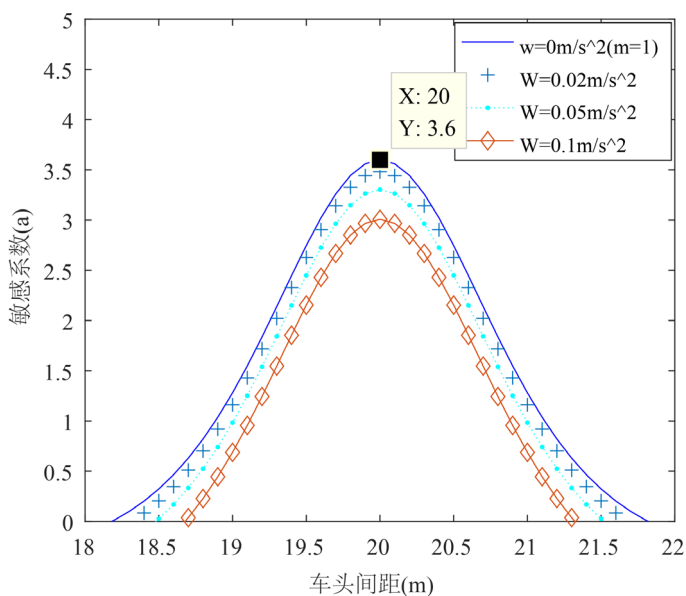
为了进一步精确说明稳定区域的扩大，我们用 MATLAB 分别画出 T-MVD 模型在不同  $\omega$  取值下的车头间距与敏感系数的临界稳定性曲线。临界曲线的上部分是稳定区域，其下部分是非稳定区域，见图 1 ( $m=1, m=2$ ) 和图 2 ( $m=3$ )。定义稳定区域面积的占比率为  $P = 1 - \frac{S_1(\text{不稳定区域面积})}{S(\text{总面积})} \times 100\%$ 。其中，

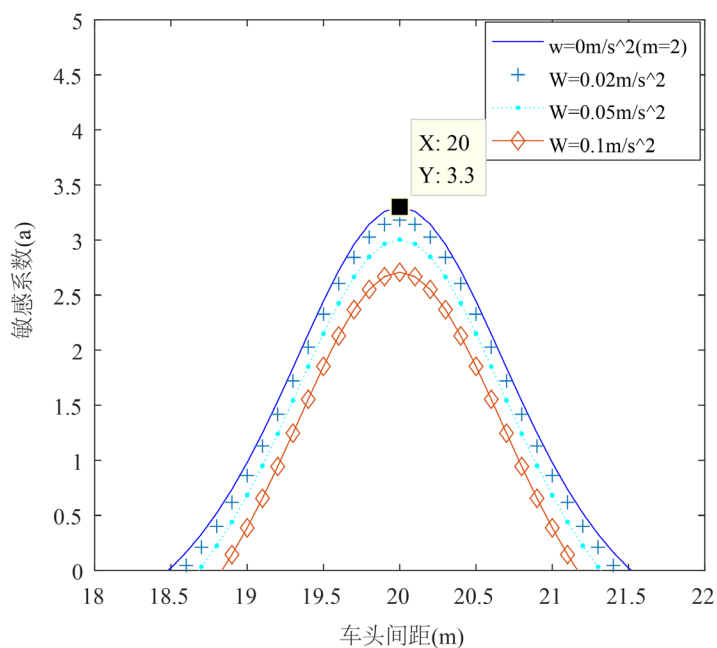
不稳定区域面积为

$$S_1 = \int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{V_{\max}}{2} \operatorname{sech}^2(x - h_c) - \sum_{l=1}^m \lambda_l - \frac{e\omega}{c} \right] dx = \frac{V_{\max}}{2} [\tanh(x_2 - h_c) - \tanh(x_1 - h_c)] - \left( \sum_{l=1}^m \lambda_l + \frac{e\omega}{c} \right) (x_2 - x_1)$$

其中， $x_1, x_2 \in (18, 22)$ ，总面积  $S$  为临界稳定性曲线图中横、纵坐标之差的乘积。通过 MATLAB 编程分别计算得出 FVD 模型 ( $m=1, \omega=0$ ) 的  $P = 69.33\%$ ，MVD 模型 ( $m=3, \omega=0$ ) 的  $P = 77.19\%$ ，T-MVD 模型 (取  $m=1, \omega=0.1$ ) 的  $P = 84.46\%$ ；由此可见，T-MVD 模型有效地扩大了稳定性。

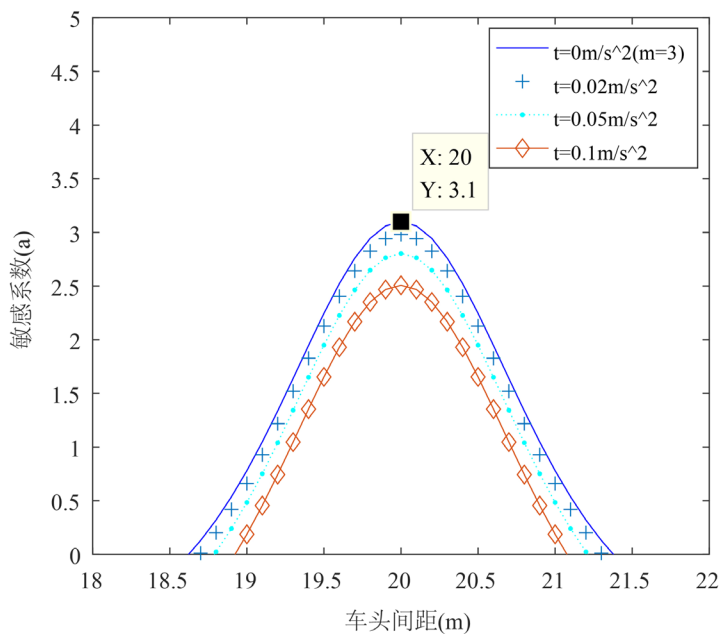
由面积的占比率的理论计算公式和图 1，图 2 都可以知道，随着  $\omega$  (电子节气门角度差灵敏度系数) 的增大，T-MVD 模型中的灵敏度系数越高，稳定区域扩大，致稳的作用大；同样，随着  $m$  的增大，T-MVD 模型考虑的前车数量越多，稳定区域越大。这说明，考虑电子节气门的角度及在 V2V 环境下的多前车信息有助于增强交通流的稳定性，缓解交通堵塞。





**Figure 1.** The critical stability curve of T-MVD model with  $m = 1$  and  $m = 2$

**图 1.** 当  $m = 1, m = 2$  时 T-MVD 模型的临界稳定性曲线



**Figure 2.** The critical stability curve of T-MVD model with  $m = 3$

**图 2.** 当  $m = 3$  时 T-MVD 模型的临界稳定性曲线

#### 4. T-MVD 模型的孤立波的约化摄动法分析

本节中通过约化摄动法对方程(19)进行非线性分析,推导出临界点附近的交通流不同区域的非线性方程以及给出相应的孤立波,根据文献[21]将交通流分为稳定区域、不稳定区域、亚稳定区域。

现将方程(7)改写为:

$$\begin{aligned} \frac{d^2(\Delta x_j(t))}{dt^2} = & k \left[ V(\Delta x_{j+1}(t)) - V(\Delta x_j(t)) - \frac{d(\Delta x_j(t))}{dt} \right] \\ & + \sum_{l=1}^m \lambda_l \left( \frac{d(\Delta x_{j+l}(t))}{dt} - \frac{d(\Delta x_{j+l-1}(t))}{dt} \right) \\ & + \frac{\omega}{c} \left[ \frac{d^2(\Delta x_{j+1}(t))}{dt^2} - \frac{d^2(\Delta x_j(t))}{dt^2} + e \left( \frac{d(\Delta x_{j+1}(t))}{dt} - \frac{d(\Delta x_j(t))}{dt} \right) \right] \end{aligned} \quad (19)$$

#### 4.1. 导出 Burgers 方程

在稳定区域, 引入变量  $X$  和  $T$ :

$$X = \varepsilon(j + bt), T = \varepsilon^2 t \quad (20)$$

其中,  $b$  是待定常数,  $0 < \varepsilon \ll 1$ , 设车头间距为:

$$\Delta x_j(t) = h_c + \varepsilon R(X, T) \quad (21)$$

将(20)、(21)式代入(19)式, 以及泰勒展开到  $\varepsilon^3$  量级, 则得到方程:

$$k\varepsilon^2(b - V'(h))\partial_X R + \varepsilon^3 \left[ \left( b^2 - \frac{kV'(h)}{2} - b \sum_{l=1}^m \lambda_l - \frac{\omega b e}{c} \right) \partial_X^2 R - kV''(h)R\partial_X R + k\partial_T R \right] = 0 \quad (22)$$

其中,  $V'(h) = \left. \frac{dV(\Delta x_j)}{d\Delta x_j} \right|_{\Delta x_j=h}$ ,  $V''(h) = \left. \frac{d^2V(\Delta x_j)}{d\Delta x_j^2} \right|_{\Delta x_j=h}$ 。

令  $b = V'(h_c)$ , 消去  $\varepsilon$  的二次项, 化简(22)为:

$$\partial_T R - V''(h)R\partial_X R + \left( \frac{V'(h)}{k} - \frac{1}{2} - \frac{\sum_{l=1}^m \lambda_l}{k} - \frac{\omega w}{ck} \right) V'(h)\partial_X^2 R = 0 \quad (23)$$

由稳定性条件:

$$V'(h) < \frac{k}{2} + \sum_{l=1}^m \lambda_l + \frac{e\omega}{c} \quad (24)$$

故可知(23)是一个 Burgers 方程, 它有如下解:

$$\begin{aligned} R(X, T) = & \frac{1}{|V'(h_c)|T} \left[ X - \frac{1}{2}(\eta_j + \eta_{j+1}) \right] - \frac{1}{2|V'(h_c)|T} (\eta_{j+1} - \eta_j) \\ & \times \tanh \left[ \frac{m_1}{2|V'(h_c)|T} V'(h)(\eta_{j+1} - \eta_j)(X - \zeta_j) \right] \end{aligned} \quad (25)$$

其中,  $m_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{k} \sum_{l=1}^m \lambda_l + \frac{\omega e}{ck} - \frac{V'(h)}{k}$ ,  $b = V'(h_c)$  为三角激波的传播速度,  $\zeta_j$  为激波波前的坐标,  $\eta_j$  为沿着  $x$  轴的斜率, 由 Burgers 方程的解可以看出, 车辆的平均车头间距越大, 三角激波的传播速度减小; 当  $T \rightarrow \infty$  时, 有  $R(X, T) \rightarrow 0$ , 这表明, T-MVD 模型在稳定区域的三角激波会变为稳定交通流。

## 4.2. 导出 mKdV 方程

在不稳定区域, 引入变量  $X$  和  $T$ :

$$X = \varepsilon(j + bt), T = \varepsilon^3 t \quad (26)$$

其中,  $b$  是待定常数,  $0 < \varepsilon \ll 1$ , 设车头间距为:

$$\Delta x_j(t) = h_c + \varepsilon R(X, T) \quad (27)$$

将(26)及(27)代入方程(19), 并泰勒展开到  $\varepsilon^5$  量级, 则得到下列方程:

$$\begin{aligned} & k\varepsilon^2(b - V'(h))\partial_X R + \varepsilon^3 \left( b^2 - \frac{kV'(h)}{2} - b \sum_{l=1}^m \lambda_l - \frac{\omega b e}{c} \right) \partial_X^2 R \\ & + \varepsilon^4 \left[ k\partial_T R - \frac{kV''(h)}{6} \partial_X R^3 - \left( \frac{kV'(h)}{6} + \frac{b}{2} \sum_{l=1}^m \lambda_l (2l-1) + \frac{\omega b^2}{c} + \frac{1}{2} \frac{\omega b e}{c} \right) \partial_X^3 R \right] \\ & + \varepsilon^5 \left[ \left( 2b - \sum_{l=1}^m \lambda_l - \frac{\omega e}{c} \right) \partial_X \partial_T R - \frac{kV'''(h)}{12} \partial_X^2 R^3 - \left( \frac{kV''(h)}{24} + \frac{b}{6} \sum_{l=1}^m \lambda_l (3l^2 - 3l + 1) + \frac{1}{2} \frac{\omega b^2}{c} + \frac{1}{6} \frac{\omega b e}{c} \right) \partial_X^4 R \right] = 0 \end{aligned} \quad (28)$$

其中,  $V'(h) = \frac{dV(\Delta x_j)}{d\Delta x_j} \Big|_{\Delta x_j = h}$ ,  $V''(h) = \frac{d^2V(\Delta x_j)}{d\Delta x_j^2} \Big|_{\Delta x_j = h}$ ,  $V'''(h) = \frac{d^3V(\Delta x_j)}{d\Delta x_j^3} \Big|_{\Delta x_j = h}$ .

令  $b = V'(h_c)$ , 且假设  $\partial_X \partial_T R = \frac{k}{6} V'''(h) \partial_X^2 R^3 + \left( \frac{V''(h)}{6} + \frac{b}{2k} \sum_{l=1}^m \lambda_l (2l-1) + \frac{\omega b^2}{ck} + \frac{1}{2} \frac{\omega b e}{ck} \right) \partial_X^4 R$ , 则在临界点  $(k_c, h_c)$  附近, (28)的第 1 项为零, 由此化简为:

$$\partial_T R - a_1 \partial_X^3 R + a_2 \partial_X R^3 + \varepsilon (a_3 \partial_X^2 R + a_4 \partial_X^2 R^3 + a_5 \partial_X^4 R) = 0 \quad (29)$$

其中,  $a_1 = \frac{V'}{6} + \frac{V'}{2k_c} \sum_{l=1}^m \lambda_l (2l-1) + \frac{\omega b^2}{ck_c} + \frac{1}{2} \frac{\omega b e}{ck_c}$ ,  $a_2 = -\frac{V'''}{6}$ ,  $a_3 = \frac{V''}{2}$ ,  $a_4 = -\frac{V'''}{12} \left( 2 \sum_{l=1}^m \lambda_l + \frac{2\omega e}{c} - 4V' \right)$ ,

$$\begin{aligned} a_5 = & \left( 2V' - \frac{\omega e}{c} - \sum_{l=1}^m \lambda_l \right) \left( \frac{V'}{6} + \frac{\omega V'^2}{ck_c} + \frac{1}{2} \frac{\omega V' e}{ck_c} + \frac{V'}{2k_c} \sum_{l=1}^m \lambda_l (2l-1) \right) \\ & - \left( \frac{1}{2} \frac{\omega V'^2}{c} + \frac{1}{6} \frac{\omega V' e}{c} + \frac{V' k_c}{24} + \frac{V'}{6} \sum_{l=1}^m \lambda_l (3l^2 - 3l + 1) \right) \end{aligned}$$

对(29)式作如下线性变换:

$$T' = a_1 T, \quad R = \sqrt{\frac{a_1}{a_2}} R'$$

可以得到含有  $O(\varepsilon)$  得 mKdV 方程:

$$\partial_{T'} R' - \partial_X^3 R' + \partial_X R'^3 + \frac{\varepsilon}{a_1} \left( a_3 \partial_X^2 R' + \frac{a_1 a_4}{a_2} \partial_X^2 R'^3 + a_5 \partial_X^4 R' \right) = 0 \quad (30)$$

其中  $\frac{1}{a_1} \left( a_3 \partial_X^2 R' + \frac{a_1 a_4}{a_2} \partial_X^2 R'^3 + a_5 \partial_X^4 R' \right) = M[R']$ , 在(30)中忽略校正项  $O(\varepsilon)$ , 得到标准的 mKdV 方程, 其扭结 - 反扭结波解为:



$$R'(X, T') = \sqrt{c_1} \tanh \left[ \sqrt{\frac{c_1}{2}} (X - c_1 T') \right] \quad (31)$$

若考虑在(30)中保留  $O(\varepsilon)$  项, 则假设  $R'(X, T') = R'_0(X, T') + \varepsilon R_1(X, T')$ 。为了解出(31)式中的传播速度  $c_1$ , 需要  $R'_0(X, T')$  满足如下的可解性条件:

$$(R'_0, M[R'_0]) = \int_{-\infty}^{+\infty} dX R'_0 M[R'_0] = 0 \quad (32)$$

由(32)式即可导出传播速度  $c_1$  的表达式为:

$$c_1 = \frac{5a_2 a_3}{2a_2 a_5 - 3a_1 a_4} \quad (33)$$

因此, 方程(30)的解为:

$$R(X, T) = \sqrt{\frac{\left[ V' + \frac{6\omega V'^2 + 3\omega V'e}{ck_c} + \frac{3V'}{k_c} \sum_{l=1}^m \lambda_l (2l-1) \right] c_1}{-V''}} \times \tanh \sqrt{\frac{c_1}{2}} \left[ X - c_1 T \left( \frac{V'}{6} + \frac{V'}{2k_c} \sum_{l=1}^m \lambda_l (2l-1) + \frac{\omega V'^2}{ck_c} + \frac{1}{2} \frac{\omega V'e}{ck_c} \right) \right] \quad (34)$$

于是, 得到 T-MVD 模型的车头间距的解为:

$$\Delta x_j(t) = h_c + \sqrt{\frac{\left[ V' + \frac{6\omega V'^2 + 3\omega V'e}{ck_c} + \frac{3V'}{k_c} \sum_{l=1}^m \lambda_l (2l-1) \right] \left( \frac{k_c}{k} - 1 \right) c_1}{-V''}} \times \tanh \left\{ \sqrt{\frac{c_1}{2}} \left( \frac{k_c}{k} - 1 \right) \left[ j + \left( 1 - c_1 \left( \frac{V'}{6} + \frac{V'}{2k_c} \sum_{l=1}^m \lambda_l (2l-1) + \frac{\omega b^2}{ck_c} + \frac{1}{2} \frac{\omega b e}{ck_c} \right) \left( \frac{k_c}{k} - 1 \right) \right) t \right] \right\} \quad (35)$$

扭结 - 反扭结波解(36)的振幅为:

$$B = \sqrt{\frac{\left[ V' + \frac{6\omega V'^2 + 3\omega V'e}{ck_c} + \frac{3V'}{k_c} \sum_{l=1}^m \lambda_l (2l-1) \right] \left( \frac{k_c}{k} - 1 \right) c_1}{-V''}} \quad (36)$$

### 4.3. 导出 KdV 方程

定义缓变量  $X = \varepsilon(j + bt)$  和  $T = \varepsilon^3 t$ ,  $0 < \varepsilon \ll 1$ , 其中  $b$  为待定系数。设车头间距:

$$\Delta x_j(t) = h + \varepsilon^2 R(X, T) \quad (37)$$

将(37)式代入(19), 以及将其泰勒展开至  $\varepsilon^6$  量级, 则得到如下方程:

$$\begin{aligned} & k\varepsilon^3 (b - V') \partial_X R + \varepsilon^4 \left( b^2 - \frac{kV'}{2} - b \sum_{l=1}^m \lambda_l - \frac{\omega b e}{c} \right) \partial_X^2 R \\ & + \varepsilon^5 \left[ k \partial_T R - \frac{kV''}{2} \partial_X R^2 - \left( \frac{kV'}{6} + \frac{b}{2} \sum_{l=1}^m \lambda_l (2l-1) + \frac{\omega b^2}{c} + \frac{1}{2} \frac{\omega b e}{c} \right) \partial_X^3 R \right] \\ & + \varepsilon^6 \left[ \left( 2b - \sum_{l=1}^m \lambda_l - \frac{\omega e}{c} \right) \partial_X \partial_T R - \frac{kV''}{4} \partial_X^2 R^2 - \left( \frac{kV'}{24} + \frac{b}{6} \sum_{l=1}^m \lambda_l (3l^2 - 3l + 1) + \frac{1}{2} \frac{\omega b^2}{c} + \frac{1}{6} \frac{\omega b e}{c} \right) \partial_X^4 R \right] = 0 \end{aligned} \quad (38)$$

其中,  $V' = \frac{dV(\Delta x)}{d\Delta x} \Big|_{\Delta x=h}$ ,  $V'' = \frac{d^2V(\Delta x)}{d\Delta x^2} \Big|_{\Delta x=h}$ 。

令  $b = V'$ ，假设

$$\partial_X \partial_T R = \left( \frac{V'}{6} + \frac{b}{2k} \sum_{l=1}^m \lambda_l (2l-1) + \frac{\omega b^2}{ck} + \frac{1}{2} \frac{\omega b e}{ck} \right) \partial_X^4 R + \frac{V''}{2} \partial_X^2 R^2$$

则在中性稳定曲线  $V'(h) = \frac{k_s}{2} + \sum_{l=1}^m \lambda_l + \frac{\omega b}{c}$  附近，有  $k = \frac{k_s}{1-\varepsilon^2}$ ，此时方程(38)化简为：

$$\partial_T R - f_1 \partial_X^3 R - f_2 R \partial_X R + \varepsilon \left[ -f_3 \partial_X^2 R + f_4 \partial_X^4 R + f_5 \partial_X^2 R^2 \right] = 0 \quad (39)$$

其中， $f_1 = \frac{V'}{6} + \frac{V'}{2k_s} \sum_{l=1}^m \lambda_l (2l-1) + \frac{\omega b^2}{ck_s} + \frac{1}{2} \frac{\omega b e}{ck_s}$ ， $f_2 = V''$ ， $f_3 = \frac{V'}{2}$ ，

$$f_4 = \left( 2V' - \sum_{l=1}^m \lambda_l - \frac{\omega e}{c} \right) \left( \frac{V'}{6} + \frac{V'}{2k_s} \sum_{l=1}^m \lambda_l (2l-1) + \frac{\omega V'^2}{ck_s} + \frac{1}{2} \frac{\omega V' e}{ck_s} \right) - \left[ \frac{k_s V'}{24} + \frac{V'}{6} \sum_{l=1}^m \lambda_l (3l^2 - 3l + 1) + \frac{1}{2} \frac{\omega V'^2}{c} + \frac{1}{6} \frac{\omega V' e}{c} \right]$$

$$f_5 = -\frac{V''}{4} \left( k - 4V' - 2 \sum_{l=1}^m \lambda_l - \frac{2\omega V'}{c} \right)。$$

对(39)式作如下线性变换：

$$T = \sqrt{f_1} T', X = -\sqrt{f_1} X', R = \frac{R'}{f_2} \quad (40)$$

则得到如下的 KdV 方程：

$$\partial_{T'} R' + \partial_{X'}^3 R' + R' \partial_{X'} R' + \varepsilon \sqrt{\frac{1}{f_1}} \left( -f_3 \partial_{X'}^2 R' + \frac{f_4}{f_1} \partial_{X'}^4 R' + \frac{f_5}{f_1} \partial_{X'}^2 R'^2 \right) = 0 \quad (41)$$

在(41)中忽略  $O(\varepsilon)$  项，得到标准的 KdV 方程，它有孤立波解为：

$$R'_0(X', T') = E \operatorname{sech}^2 \left[ \sqrt{\frac{E}{12}} \left( X' - \frac{E}{3} T' \right) \right] \quad (42)$$

类似于前面分析 mKdV 方程的方法，可得孤立波(42)的幅值  $E$  为：

$$E = \frac{21 f_1 f_2 f_3}{5 f_2 f_4 - 24 f_1 f_5}$$

于是，我们得到 T-MVD 模型的车头间距的解为：

$$\Delta x_j(t) = h + \frac{E}{V''} \left( 1 - \frac{k}{k_s} \right) \times \operatorname{sech}^2 \left\{ \sqrt{\frac{E}{2V' + \frac{6V''}{k_s} \sum_{l=1}^m \lambda_l (2l-1) + \frac{12\omega V'^2}{ck_s} + \frac{6\omega V' e}{ck_s}} \left( 1 - \frac{k}{k_s} \right)} \right. \\ \left. \times \left[ j + \left( V'(h) + \frac{E}{3} \left( 1 - \frac{k}{k_s} \right) \right) t \right] \right\} \quad (43)$$

由于随着孤立波的振幅的减小, 交通的拥堵情况会变得越严重; 而由该 T-MVD 模型的孤立波表示出的车头间距解(43), 可以知道, 当  $m$  和  $\omega$  的值增大时,  $\Delta x_j(t)$  的值增大, 这就说明交通情况变得顺畅, 拥堵情况减弱。

## 5. T-MVD 模型的数值模拟

本节中将进一步利用 MATLAB2019a 编程计算模拟实验去验证 T-MVD 模型(7)的稳定性和高速状态下行驶的效果。将一队队车辆置于环形道路上, 设置 T-MDV 模型的基本参数如下: 环形道路总长  $L$  取值为 800 m, 车辆数  $N$  取值为 100 辆,  $b = L/N$  采样时间间隔取 0.1 秒;  $K = 0.41$ ,  $c = 0.8$ ,  $e = 0.27$ ,  $\lambda_1 = 0.2$ ,  $\lambda_2 = 0.15$ ,  $\lambda_3 = 0.15$ , 仿真步长为 10000, 模型选取的优化速度为(8)式, 以相同的车头间距均匀分布。我们将从低速与高速状态下  $\omega$  的变化两个方面进行数值计算模拟。

### 5.1. 低速状态下不同 $\omega$ 时交通流波形

给交通流中的头车施加小扰动:

$$v_n(0) = V(\Delta x_n(0)), x_n(0) = \begin{cases} 1 & \text{if } n = 1 \\ (n-1)b & \text{if } n > 1 \end{cases} \quad (44)$$

为了便于数值模拟, 我们取:  $V_{\max} = 6$ ,  $m = 3$ , 对 T-MVD、MVD 模型进行的具体数值模拟的结果见图 3。从图 3 可知, T-MVD 模型(7)的车辆速度波动相对小于 MVD 模型, 特别是第 30 辆与第 70 辆车分别出现了最低速度, 然而 T-MVD 模型(7)的最低速度明显高于 MVD 模型, 因此更加安全稳定。

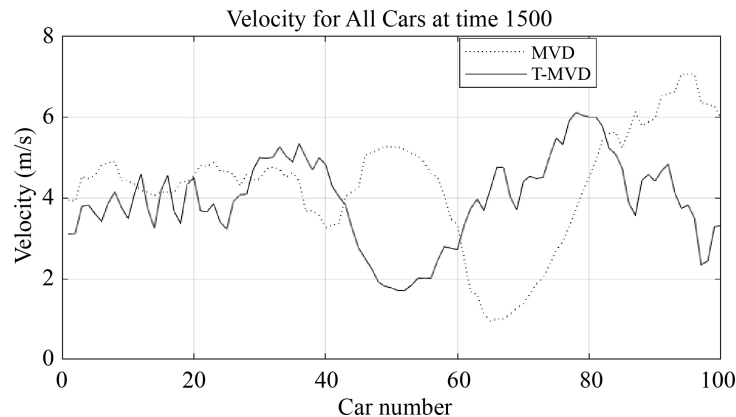


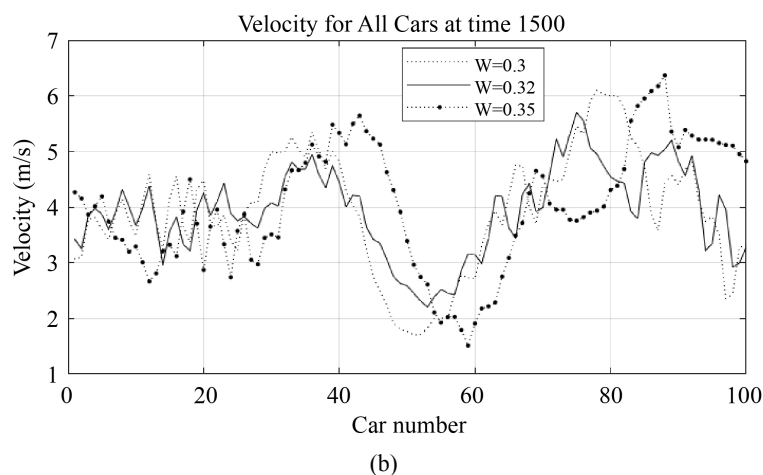
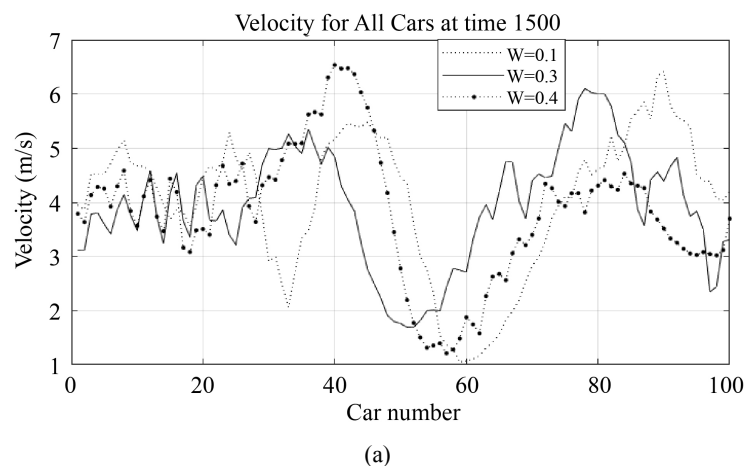
Figure 3. Speed distribution of Vehicles of MVD and T-MVD models

图 3. MVD 与 T-MVD 模型的车辆速度分布图

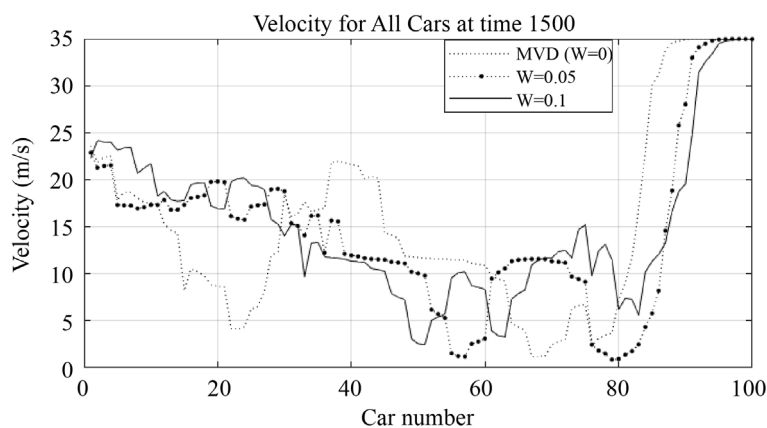
图 4(a)和图 4(b)分别是模型(7)在  $\omega$  按 1 位、2 位有效数值微小变化时的精确速度分布图结果。从图 4(a)可以看出, 随着  $\omega$  值的增大, 车辆速度的波动幅度不断减小, 其交通流状态更加稳定, 不过当其增大到  $\omega = 0.4$  时, 其模拟的速度波动明显大于  $\omega = 0.1$  时, 这不利于交通流稳定性; 从图 4(b)可以看出, 当  $\omega = 0.32$  时车辆速度的波动效果明显好于  $\omega = 0.3$ , 不过, 当  $\omega = 0.35$  时的效果不如  $\omega = 0.3$ , 这说明 T-MVD 模型(7)中的  $\omega$  值并不是越大越好。

### 5.2. 高速状态下不同 $\omega$ 时的交通流波形

现取  $V_{\max} = 35$  m/s, 给交通流中的头车施加的小扰动, 我们进行 T-MVD 模型(7)在高速状态下模型的车辆速度的数值实验, 其结果见图 5。



**Figure 4.** Speed distribution of Vehicles of T-MVD model  
**图 4.** T-MVD 模型的速度分布图



**Figure 5.** Speed distribution of vehicles of T-MVD model at high speed  
**图 5.** 高速状态下 T-MVD 模型的车辆速度分布

由图 5 可知, 在高速状态下, 与对比于 MVD 模型( $\omega = 0$ ), T-MVD 模型(7)当  $\omega = 0.05$  和  $\omega = 0.1$  在第 20 辆车到第 30 辆车就出现了速度相对过低, 容易出现交通事故, 并且随着  $\omega$  值的增大, 其速度最低

点的值有所增大, 交通流稳定性增强, 这与前面第 2 节中给出的线性稳定性分析结果一致。因此, 在高速状态下, 考虑电子节气门开度的灵敏度系数对其稳定性有一定的提高。

## 6. 结论

本文在智能网联车的环境下, 在多前车速度差模型基础上, 考虑电子节气门开度的影响, 提出了 T-MVD 模型(7), 通过线性稳定性分析得到了模型的线性稳定性条件, 分析了电子节气门开度对稳定区域扩大的结果; 通过非线性给出不同区域下车流的密度波解, 分析电子节气门开度变化对交通堵塞的影响结果; 最后, 通过数值模拟 T-MVD 模型(7)而验证了理论分析结果, 以及高速状态下的致稳作用, 且进一步分析表明 T-MVD 模型(7)可以在 CAV 环境下收到电子节气门开度的反馈, 使驾驶员避免过多的进行加速、减速操控, 从而减少污染, 又可以在考虑多前车速度差的情况下提高车辆交通的稳定性, 从而抑制交通堵塞。

## 参考文献

- [1] Bando, M., Hasebe, K., Nakayama, A., *et al.* (1995) Dynamical Model of Traffic Congestion and Numerical Simulation. *Physical Review E Statistical Physics Plasmas Fluids & Related Interdisciplinary Topics*, **51**, 1035. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.51.1035>
- [2] Helbing, D. and Tilch, B. (1998) Generalized Force Model of Traffic Dynamics. *Physical Review E*, **58**, 133-138. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.58.133>
- [3] Jiang, R., Wu, Q. and Zhu, Z. (2001) Full Velocity Difference Model for a Car-Following Theory. *Physical Review E, Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, **64**, Article ID: 017101. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.64.017101>
- [4] 彭光含, 孙棣华, 何恒攀. 交通流双车跟驰模型与数值仿真[J]. 物理学报, 2008, 57(12): 7541-7546.
- [5] 孙棣华, 张建厂, 廖孝勇, 等. 非邻近车辆最优速度差模型[J]. 交通运输工程学报, 2011, 11(6): 114-118.
- [6] Tian, J.F., Jia, F., Li, X.G., *et al.* (2010) A New Car-Following Model Considering Velocity Anticipation. *Chinese Physics B*, No. 1, 197-203.
- [7] 孙棣华, 张建厂, 赵敏, 田川. 考虑后视效应和速度差信息的跟驰模型[J]. 四川大学学报(自然科学版), 2012, 49(1): 115-120.
- [8] 王涛, 高自友, 赵小梅. 多速度差模型及稳定性分析[J]. 物理学报, 2006, 55(2): 634.
- [9] Hedrick, J.K., Mcmahon, D., Narendran, V., *et al.* (1991) Longitudinal Vehicle Controller Design for IVHS Systems. 1991 *American Control Conference*, Boston, 26-28 June 1991, 3107-3112. <https://doi.org/10.23919/ACC.1991.4791980>
- [10] Ioannou, P. and Xu, Z. (1994) Throttle and Brake Control Systems for Automatic Vehicle Following. *IVHS Journal*, **1**, 345-377. <https://doi.org/10.1080/10248079408903805>
- [11] Li, K. and Ioannou, P. (2004) Modeling of Traffic Flow of Automated Vehicles. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, **5**, 99-113. <https://doi.org/10.1109/TITS.2004.828170>
- [12] 郑太雄, 杨斌, 李永福, 等. 车联网环境下电子节气门全局快速滑模控制[J]. 仪器仪表学报, 2014, 35(10): 2356-2364.
- [13] Li, Y., Yang, B., Zheng, T., *et al.* (2015) Extended State Observer Based Adaptive Back-Stepping Sliding Mode Control of Electronic Throttle in Transportation Cyber-Physical Systems. *Mathematical Problems in Engineering*, **2015**, Article ID: 301656. <https://doi.org/10.1155/2015/301656>
- [14] 白锐, 王胜贤, 王贺彬. 汽车电子节气门的建模及滑模控制[J]. 控制工程, 2019, 26(7): 1384-1390.
- [15] Li, Y., Zhang, L., Peeta, S., *et al.* (2016) A Car-Following Model Considering the Effect of Electronic Throttle Opening Angle under Connected Environment. *Nonlinear Dynamics*, **85**, 2115-2125. <https://doi.org/10.1007/s11071-016-2817-y>
- [16] Li, S., Cheng, R. and Ge, H. (2020) An Improved Car-Following Model Considering Electronic Throttle Dynamics and Delayed Velocity Difference. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, **558**, Article ID: 125015. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2020.125015>
- [17] Chen, L., Zhang, Y., Li, K., *et al.* (2021) Car-Following Model of Connected and Autonomous Vehicles Considering Both Average Headway and Electronic Throttle Angle. *Modern Physics Letters B*, **2021**, Article ID: 2150257.

---

<https://doi.org/10.1142/S0217984921502572>

- [18] Newell, G.F. (1961) Nonlinear Effects in the Dynamics of Car Following Models. *Operations Research*, **9**, 209-229.  
<https://doi.org/10.1287/opre.9.2.209>
- [19] 唐亮, 孙棣华, 彭光含. 基于多车信息的交通流跟驰模型与数值仿真[J]. 系统仿真学报, 2012(2): 293-296.
- [20] 陈春燕, 许志鹏, 邝华, 等. 连续记忆效应的交通流跟驰建模与稳定性分析[J]. 广西师范大学学报(自然科学版), 2017, 35(3): 18-25.
- [21] 袁娜, 化存才. 多前车速度差的车辆跟驰模型的稳定性与孤波[J]. 物理学报, 2012, 61(16): 108-114.