Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2021, 10(9), 3084-3090**
Published Online September 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2021.109322

Hans汉斯

(1 + 1)维Benjiamin Omo方程的精确行波解研究

刘红霞*，韩青秀，伍　芸

贵州师范大学数学科学学院，贵州　贵阳
Email: *1871514455@qq.com

收稿日期：2021年8月14日；录用日期：2021年9月6日；发布日期：2021年9月17日

摘　要

通过行波变换，利用微分方程定性理论与动力系统分支方法，我们得到了(1 + 1)维Benjiamin Omo方程在不同参数形式下的线性波解。

关键词

动力系统，Benjiamin Omo方程，周期波，孤立波

Study of the Exact Traveling Wave Solutions of (1+1) Dimensional Benjiamin Omo Equation

Hongxia Liu*, Qingxiu Han, Yun Wu

Department of Mathematical Science, Guizhou Normal University, Guiyang Guizhou
Email: *1871514455@qq.com

Received: Aug. 14th, 2021; accepted: Sep. 6th, 2021; published: Sep. 17th, 2021

Abstract

Through the traveling wave transformation, by exploiting the qualitative theory of differential equations and the bifurcation method of dynamical systems, we obtained some nonlinearwave solutions for Benjiamin Omo equation under different parameter forms after travelingwave transformation.

*通讯作者。

文章引用: 刘红霞, 韩青秀, 伍芸. (1 + 1)维 Benjiamin Omo 方程的精确行波解研究[J]. 应用数学进展, 2021, 10(9): 3084-3090. DOI: 10.12677/aam.2021.109322

Keywords

Dynamical Systems, Benjiamin Omo Equation, Solitarywaves, Periodic Waves

1. 研究背景和预备知识

我们考虑如下的 Benjiamin Omo 方程

$$u_{tt}+\beta\left(u^2\right)_{xx}+\gamma u_{xxxx}=0. \tag{1}$$

其中 β,γ 是任意常数。

(1 + 1) 维 Benjiamin Omo 方程[1] [2] [3]是物理学中一个十分重要的非线性发展方程，已经有许多人对这一模型进行了广泛的研究.如文献[4]中用基于改进的投影 Riccati 法求得了该模型的单变量行波解。文献[5]通过 Jacobi 椭圆函数展开法，求得了该方程的精确周期解。在文献[6] [7]中，利用双线性方法和扩展的测试函数求得了其周期孤波解和双周期孤波解。文献[8]中通过改进的辅助方程法，求得了该方程的精确解。而本文运用平面动力系统的分支方法定性理论[9]，讨论方程(1)的非线性波解。

为了研究方程(1)的非线性波，设 $c>0$ 是波速，$u(x,t)=\varphi(\xi)$，$\xi=x-ct$。将 $u=\varphi(\xi)$ 代入方程(1)可得

$$c^2\varphi''+2\beta(\varphi')^2+2\beta\varphi\varphi''+\gamma\varphi''''=0. \tag{2}$$

对(2)式关于 ξ 积分两次可得

$$c^2\varphi+\beta\varphi^2+\gamma\varphi''=0. \tag{3}$$

令 $\varphi'=y$，得到下面的平面系统

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\xi}=y\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\xi}=-\dfrac{1}{\gamma}\left(\beta\varphi^2+c^2\varphi\right).\end{cases} \tag{4}$$

很明显，系统(4)是一个有着 Hamiltonian 函数的 Hamiltonian 系统

$$H(\varphi,y)=y^2+\frac{2\beta}{3\gamma}\varphi^3+\frac{c^2}{\gamma}\varphi^2. \tag{5}$$

如果令 $f(\varphi)=-\dfrac{1}{\gamma}\left(\beta\varphi^2+c^2\varphi\right)$

$$\Delta=\frac{c^4}{\gamma^2}$$

则我们有下面的结果。

当 $\Delta>0$ 时，$f(\varphi)$ 有两个零点 φ_1 和 φ_2，它们的表达式为

$$\varphi_1 = 0, \varphi_2 = \frac{-c^2}{\beta}. \tag{6}$$

当$\Delta \le 0$时，$f(\varphi)$没有零点。

如果$\tilde{\varphi}$是系统(4)的一个奇点，那么在$(\tilde{\varphi},0)$的特征值为

$$\lambda = \pm\sqrt{f'(\tilde{\varphi})}.$$

利用微分方程动力系统的定性理论，我们有下面的结论。

(1) 如果$f'(\tilde{\varphi}) > 0$，则$(\tilde{\varphi},0)$是一个鞍点。

(2) 如果$f'(\tilde{\varphi}) < 0$，则$(\tilde{\varphi},0)$是一个中心。

(3) 如果$f'(\tilde{\varphi}) = 0$，则$(\tilde{\varphi},0)$是一个退化鞍点。

2. Benjiamin Omo 方程的行波解的参数表达式

命题 1. 当$\gamma > 0, \beta > 0$时，方程(1)有两个孤立波解$u_1^{\pm}$和两个周期波解$u_2^{\pm}$。

$$u_1^{\pm} = p\left(1 - 3\tanh^2\left(\frac{1}{2}\eta_1|\xi|\right)\right) \tag{7}$$

$$u_2^{\pm} = \frac{a_2(a_3 - a_1) - a_2(a_3 - a_2)sn^2\left(\sqrt{\frac{\beta(a_3 - a_1)}{6\gamma}}|\xi|, \sqrt{\frac{a_3 - a_2}{a_3 - a_1}}\right)}{a_3 - a_1 - (a_3 - a_2)sn^2\left(\sqrt{\frac{\beta(a_3 - a_1)}{6\gamma}}|\xi|, \sqrt{\frac{a_3 - a_2}{a_3 - a_1}}\right)} \tag{8}$$

其中

$$p = \frac{c^2}{2\beta},$$

$$\eta_1 = \sqrt{\frac{c^2}{\gamma}},$$

$$a_1 + a_2 + a_3 = -\frac{3c^2}{2\beta},$$

$$a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3 = 0,$$

$$a_1a_2a_3 = 0.$$

如图 1 所示

证明。在(5)式中，令$H(\varphi_2, 0) = h_1$，则有

$$\Gamma_1^{\pm}: y^2 = \frac{2\beta}{3\gamma}\left(-\varphi^3 - \frac{3c^2}{2\beta}\varphi^2 + \frac{3\gamma}{2\beta}h_1\right) = \frac{2\beta}{3\gamma}(\varphi - \varphi_2)^2(p - \varphi) \tag{9}$$

由(4)式得

$$\frac{d\varphi}{d\xi} = \pm\sqrt{\frac{2\beta}{3\gamma}(\varphi - \varphi_2)^2(p - \varphi)} \tag{10}$$

积分(10)式得

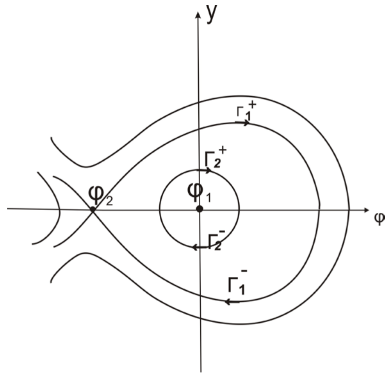

Figure 1. Track chart of the $\Gamma_1^{\pm}$ and $\Gamma_2^{\pm}$

图 1. $\Gamma_1^{\pm}$ 和 $\Gamma_2^{\pm}$ 的轨道图

$$\int_{\varphi_2}^{\varphi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{(\varphi-\varphi_2)\sqrt{p-\varphi}}=\pm\int_0^{\xi}\sqrt{\frac{2\beta}{3\gamma}}\mathrm{d}\xi \tag{11}$$

由(11)式得到方程的孤立波解的表达式为$u_1^{\pm}$。

同理，在(5)式中，令$H(\varphi_1,0)=0$，则有

$$\Gamma_2^{\pm}:y^2=\frac{2\beta}{3\gamma}\left(-\varphi^3-\frac{3c^2}{2\beta}\varphi^2\right)=\frac{2\beta}{3\gamma}(\varphi-a_1)(\varphi-a_2)(a_3-\varphi) \tag{12}$$

由(4)式可得

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\xi}=\pm\sqrt{\frac{2\beta}{3\gamma}(\varphi-a_1)(\varphi-a_2)(a_3-\varphi)}. \tag{13}$$

积分(13)式得

$$\int_{a_2}^{\varphi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{(\varphi-a_1)(\varphi-a_2)(a_3-\varphi)}}=\pm\int_0^{\xi}\sqrt{\frac{2\beta}{3\gamma}}\mathrm{d}\xi. \tag{14}$$

由(14)式得到方程的周期波解的表达式为$u_2^{\pm}$。

命题 2. 当$\gamma<0,\beta>0$时，方程(1)有两个孤立波解$u_3^{\pm}$和两个周期波解$u_4^{\pm}$。

$$u_3^{\pm}=\frac{3c^2}{2\beta}\left(\tanh^2\left(\frac{1}{2}\eta_2|\xi|\right)-1\right) \tag{15}$$

$$u_4^{\pm}=(a_2-a_1)sn^2\left(\sqrt{\frac{-\beta(a_3-a_1)}{6\gamma}}|\xi|,\sqrt{\frac{a_2-a_1}{a_3-a_1}}\right)+a_1 \tag{16}$$

其中$\eta_2=\sqrt{-\frac{c^2}{\gamma}}$，

如图 2 所示

证明。在(5)式中，令$H(\varphi_1,0)=0$，则有

$$\Gamma_3^{\pm}:y^2=\frac{-2\beta}{3\gamma}(\varphi^3+\frac{3c^2}{2\beta}\varphi^2)=-\frac{2\beta}{3\gamma}\varphi^2(\varphi+\frac{3c^2}{2\beta}) \tag{17}$$

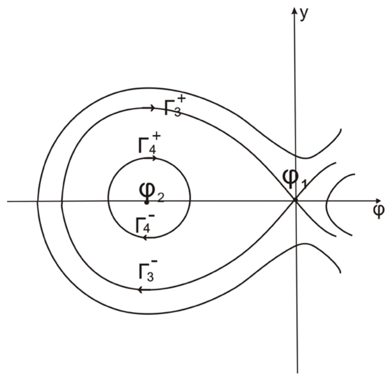

Figure 2. Track chart of the $\Gamma_3^{\pm}$ and $\Gamma_4^{\pm}$

图 2. $\Gamma_3^{\pm}$ 和 $\Gamma_4^{\pm}$ 的轨道图

由(4)式得

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\xi}=\pm\sqrt{-\frac{2\beta}{3\gamma}\varphi^2\left(\varphi+\frac{3c^2}{2\beta}\right)} \tag{18}$$

积分(18)式得

$$\int_{\frac{-3c^2}{2\beta}}^{\varphi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{-\varphi\sqrt{\varphi+\frac{3c^2}{2\beta}}}=\pm\int_0^{\xi}\sqrt{-\frac{2\beta}{3\gamma}}\mathrm{d}\xi \tag{19}$$

由(19)式得到方程的孤立波解的表达式为$u_3^{\pm}$。

同理，在(5)式中，令$H(\varphi_2,0)=h_1$，则有

$$\Gamma_4^{\pm}: y^2=-\frac{2\beta}{3\gamma}\left(\varphi^3+\frac{3c^2}{2\beta}\varphi^2-\frac{3\gamma}{2\beta}h_1\right)=\frac{-2\beta}{3\gamma}(\varphi-a_1)(a_2-\varphi)(a_3-\varphi) \tag{20}$$

由(4)式可得

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\xi}=\pm\sqrt{-\frac{2\beta}{3\gamma}(\varphi-a_1)(a_2-\varphi)(a_3-\varphi)} \tag{21}$$

积分(21)式得

$$\int_{a_1}^{\varphi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{(\varphi-a_1)(a_2-\varphi)(a_3-\varphi)}}=\pm\int_0^{\xi}\sqrt{\frac{-2\beta}{3\gamma}}\mathrm{d}\xi \tag{22}$$

由(22)式可得到方程的周期波解的表达式为$u_4^{\pm}$。

命题 3。当$\gamma>0,\beta<0$时，方程(1)有两个孤立波解(与$u_1^{\pm}$有着相同形式)和两个周期波解(与$u_4^{\pm}$有着相同形式)。

如图 3 所示

证明。在(5)式中，令$H(\varphi_2,0)=h_1$，则有

$$\Gamma_5^{\pm}: y^2=\frac{-2\beta}{3\gamma}\left(\varphi^3+\frac{3c^2}{2\beta}\varphi^2-\frac{3\gamma}{2\beta}h_1\right)=-\frac{2\beta}{3\gamma}(\varphi_2-\varphi)^2(\varphi-p) \tag{23}$$

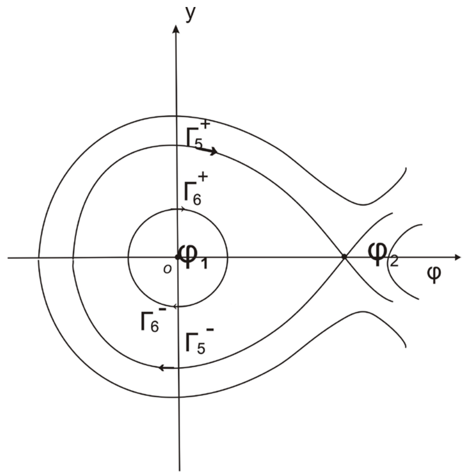

Figure 3. Track chart of the $\Gamma_5^{\pm}$ and $\Gamma_6^{\pm}$

图 3. $\Gamma_5^{\pm}$ 和 $\Gamma_6^{\pm}$ 的轨道图

由(4)式得

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\xi}=\pm\sqrt{-\frac{2\beta}{3\gamma}(\varphi_2-\varphi)^2(\varphi-p)} \tag{24}$$

由(24)式得到方程的孤立波解的参数表达式与 $u_1^{\pm}$ 式形式相同。

同理，在(5)式中，令 $H(\varphi_1,0)=0$，则有

$$\Gamma_6^{\pm}: y^2=-\frac{2\beta}{3\gamma}\left(\varphi^3+\frac{3c^2}{2\beta}\varphi^2\right)=\frac{-2\beta}{3\gamma}(\varphi-a_1)(a_2-\varphi)(a_3-\varphi) \tag{25}$$

由(4)式可得

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\xi}=\pm\sqrt{-\frac{2\beta}{3\gamma}(\varphi-a_1)(a_2-\varphi)(a_3-\varphi)} \tag{26}$$

由(26)式可得到方程的周期波解的表达式为与 $u_4^{\pm}$ 形式相同。

命题 4。当 $\gamma<0,\beta<0$ 时，方程(1)有两个孤立波解(与 $u_3^{\pm}$ 有着相同形式)和两个周期波解(与 $u_2^{\pm}$ 有着相同形式)。

如图 4 所示

证明。在(5)式中，令 $H(\varphi_1,0)=0$，则有

$$\Gamma_7^{\pm}: y^2=\frac{2\beta}{3\gamma}\left(-\varphi^3-\frac{3c^2}{2\beta}\varphi^2\right)=\frac{2\beta}{3\gamma}\varphi^2\left(-\frac{3c^2}{2\beta}-\varphi\right) \tag{27}$$

由(4)式得

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\xi}=\pm\sqrt{\frac{2\beta}{3\gamma}\varphi^2\left(-\frac{3c^2}{2\beta}-\varphi\right)} \tag{28}$$

由(28)式得到方程的孤立波解的表达式与 $u_3^{\pm}$ 式形式相同。

同理，在(5)式中，令 $H(\varphi_2,0)=h_1$，则有

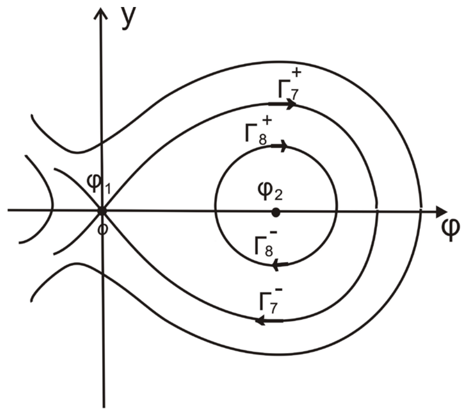

Figure 4. Track chart of the $\Gamma_7^{\pm}$ and $\Gamma_8^{\pm}$

图 4. $\Gamma_7^{\pm}$ 和 $\Gamma_8^{\pm}$ 的轨道图

$$\Gamma_8^{\pm}: y^2 = \frac{2\beta}{3\gamma}\left(-\varphi^3 - \frac{3c^2}{2\beta}\varphi^2 + \frac{3\gamma}{2\beta}h_1\right) = \frac{2\beta}{3\gamma}(\varphi - a_1)(\varphi - a_2)(a_3 - \varphi) \tag{29}$$

由(4)式可得

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\xi} = \pm\sqrt{\frac{2\beta}{3\gamma}(\varphi - a_1)(\varphi - a_2)(a_3 - \varphi)}. \tag{30}$$

由(30)式得到方程的周期波解的表达式与 $u_2^{\pm}$ 形式相同。

综上所述，在不同的参数条件下我们获得了 Benjiamin Omo 方程的多个行波解的精确解。

参考文献

[1] Benjiamin, T.B. (1967) Internal Waves of Permanent Formin Fluids of Great Depth. *Journal of Fluid Mechanics*, **29**, 559-592. https://doi.org/10.1017/S002211206700103X

[2] Davies, R.E. and Acrivos, A. (1967) Solitary Internal Waves Indeep Water. *Journal of Fluid Mechanics*, **29**, 593-607. https://doi.org/10.1017/S0022112067001041

[3] Ono, H. (1975) Algebraic Solitary Waves in Stratifiedfluids. *Journal of the Physical Society of Japan*, **39**, 1082-1091. https://doi.org/10.1143/JPSJ.39.1082

[4] Wang, Z., Li, D.-S., Lu H.-F., *et al*. (2005). A Method for Constructing Exact Solutions and Application to Benjamin Ono Equation. *Chinese Physics*, **14**, 2158-2158. https://doi.org/10.1088/1009-1963/14/11/003

[5] Fu, Z. and Liu, S. (2003) The JEFE Method and Periodic Solutions of Two Kinds of Nonlinear Wave Equations. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **8**, 67-75. https://doi.org/10.1016/S1007-5704(02)00082-5

[6] Xu, Z.H., Xian, D.Q. and Chen, H.L. (2010) New Periodic Solitary-Wave Solutions for the Benjiamin Ono Equation. *Applied Mathematics and Computation*, **215**, 4439-4442. https://doi.org/10.1016/j.amc.2009.11.009

[7] 许瑞麟, 许晓革, 孟祥花. (1+1)维 BenjiaminOno 方程的精确显式解[J]. 北京信息科技大学学报(自然科学版), 2011, 26(3): 58-61.

[8] 杨娟, 冯庆江, 曾春花. 一类非线性数学物理方程的精确解[J]. 数学的实践与认识, 2018, 48(17): 309-313.

[9] Wu, Y., Liu, Z.R. and Bai, C.Z. (2013) New Types of Nonlinear Waves and Bifurcation Phenomena in Schamel-Korteweg-de Vries Equation. *Abstract and Applied Analysis*, **2013**, 1056-1083. https://doi.org/10.1155/2013/483492