

# 带参数PH曲线几何特征及过渡曲线构造

宋九锡, 王 研, 沈 洋, 秦凌云, 彭兴璇

辽宁师范大学数学学院, 辽宁 大连

Email: 1161770874@qq.com

收稿日期: 2021年8月17日; 录用日期: 2021年9月9日; 发布日期: 2021年9月22日

## 摘 要

本文通过选取恰当的带参数Bézier曲线模型, 得到其成为PH曲线的几何特征条件, 构造了一类带参数的三次PH曲线。基于该曲线, 构造了不互相包含两圆之间的过渡曲线, 该曲线是 $G^2$ 连续的C型过渡曲线, 并且在一定条件下, 曲线内部的曲率有且仅有一个曲率极值点。数值例子验证了该方法的有效性。

## 关键词

三次PH曲线, 过渡曲线,  $G^2$ 连续, C型

# Geometric Characteristics of PH Curve with Parameters and Construction of Transition Curve

Jiuxi Song, Yan Wang, Yang Shen, Lingyun Qin, Xingxuan Peng

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Email: 1161770874@qq.com

Received: Aug. 17<sup>th</sup>, 2021; accepted: Sep. 9<sup>th</sup>, 2021; published: Sep. 22<sup>nd</sup>, 2021

## Abstract

In this paper, by selecting the appropriate Bézier curve model with parameters, the geometric characteristic conditions of PH curve are obtained. A kind of cubic PH curve with parameters is constructed. Based on this curve, a transition curve is constructed. The curve is a second order continuous c-type transition curve, and the curvature inside the curve has only one curvature extreme point under certain conditions. Numerical examples show the effectiveness of the proposed method.

## Keywords

Cubic PH Curve, Transition Curve,  $G^2$  Continuous, Type C

Copyright © 2021 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

在 CAD 中, 等距线在工业领域应用十分广泛, 如机器人行走路线、数控机器加工等工业领域。Bézier 曲线计算高效, 但是它在求单位法向量时会涉及到求根公式, 这会使其等距线不是有理多项式, 并不兼容于 CAD 系统。Farouki 提出了 PH (Pythagorean hodograph) 曲线[1], 其弧长函数和等距线为多项式或有理多项式, 兼容于 CAD 系统。

到目前为止, 关于 PH 曲线已经有了比较深入的研究, 众所周知, 对于给定 Bézier 曲线的控制多边形, 其相关边长和内角不依赖于坐标选则的固有内在几何参量, 具体数据可由实际测量获得, 因此, 从控制多边形的长度和角度来讨论曲线的几何性质无论在理论时, 还是实际应用中都具有重要意义。Farouki [1]和 Sakalis 给出具有不同控制顶点  $\{P_i\}_{i=0}^3$  的 3 次 Bézier 曲线为 PH 曲线分离形式的边长的约束条件。文献[1]根据 PH 曲线的定义, 构造了 Bézier 曲线形式的四次 PH 曲线。文献[2]给出了 C-Bézier 曲线成为了 PH 曲线条件的方法并证明。

在几何造型中, 曲面曲线的形状调整是一个非常活跃的研究课题。近年来, 为了满足几何造型工业中对曲线曲面调整的要求, 国内外学者提出了许多不同的方法。其中带参数的曲线曲面逐渐成为一个研究热点, 这些方法的主要目的是在曲线模型中引入参数, 并通过修改参数的取值实现对曲线形状的调整。例如, 文献[3]和文献[4]中的带形状参数的 Bézier 曲线、文献[5]和文献[6]中的带形状参数的 B 样条曲线, 文献[7]和文献[8]中的带形状参数的三角曲线等。

另外, 在 CAGD 中, 由于几何拼接的需要, 经常会涉及到平面上两条曲线之间的光滑拼接, 例如, 道路轨迹、机器人的行走路线、数控加工中机床的刀具中心轨迹的设计等等, 一般都是通过构造过渡曲线来实现的。很多文献从不同角度围绕过渡曲线的设计展开研究, 文献[9]以铁路中的过渡曲线为例, 从反射值角度对多项式过渡曲线的形状进行了分化; 文献[10]对两圆间一条三次 Bézier 曲线的过渡曲线进行了研究; 文献[11][12]对两圆之间应用了五次 PH 过渡曲线进行了研究。

本文得到带参数 Bézier 曲线成为 PH 曲线的几何特征条件, 构造了一类带参数的三次 PH 曲线。并应用该曲线, 构造了过渡曲线, 这个曲线是  $G^2$  连续的 C 型过渡曲线, 并且当控制顶点不变时, 通过参数的取值的改变可以调整过渡曲线的形状。

## 2. 带形状参数的 m-Bézier 曲线

定义 1 带形状参数的 m-Bézier 曲线为

$$P(t) = (x(t), y(t)) = \sum_{i=0}^3 P_i B_i^3(t) \quad (1)$$

其中  $B_0^3(t) = (1-mt)(1-t)^2$ ,  $B_1^3(t) = (2+m)t(1-t)^2$ ,  $B_2^3(t) = (2+m)t(1-t)^2$ ,  $B_3^3(t) = (1-m+mt)t^2$  为 m-Bézier 曲线的基函数,  $m$  为参数,  $P_i = (x_i, y_i)$  为三次 PH 曲线的控制顶点,  $i = 0, 1, 2, 3$ 。

### 3. m-Bézier 曲线成为 PH 曲线的几何特征条件

定理 2.1 [2] 若平面参数曲线  $P(t) = (x(t), y(t))$  分量导数表达式为:

$$\begin{aligned} x'(t) &= w(t)(u^2(t) - v^2(t)) \\ y'(t) &= 2w(t)u(t)v(t) \end{aligned}$$

其中  $u(t), v(t), w(t)$  为实系数多项式, 并且多项式  $u(t), v(t)$  互质, 则  $P(t)$  曲线为 PH 曲线。

令  $u(t), v(t)$  为一次多项式,

$$\begin{cases} u(t) = u_0(1-t) + u_1t \\ v(t) = v_0(i-t) + v_1t \end{cases} \quad (2)$$

由 m-Bézier 曲线的基函数, 并根据定理 2.1 得到

$$\begin{aligned} u^2(t) - v^2(t) &= (u_0^2 - v_0^2)B_0^2(t) + (u_0u_1 - v_0v_1)B_1^2(t) + (u_1^2 - v_1^2) \\ 2u(t)v(t) &= 2u_0v_0B_0^2(t) + (u_0v_1 + u_1v_0)B_1^2(t) + 2u_1v_1B_2^2(t) \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t u(t)^2 - v(t)^2 dt = \sum_{k=0}^3 x_k B_k^3(t) \\ y(t) &= \int_0^t 2u(t)v(t) dt = \sum_{k=0}^3 y_k B_k^3(t) \end{aligned}$$

得到满足 PH 曲线的控制顶点,

$$\begin{cases} P_0 = (x_0, y_0) \\ P_1 = P_0 + \frac{1}{2+m}(u_0^2 - v_0^2, 2u_0v_0) \\ P_2 = P_0 + \frac{1}{3}(u_0^2 - v_0^2 + u_0u_1 - v_0v_1 + \frac{m-1}{2+m}(u_1^2 - v_1^2), 2u_0v_0 + u_0v_1 + u_1v_0 + \frac{2m-2}{2+m}u_1v_1) \\ P_3 = P_0 + \frac{1}{3}(u_0^2 - v_0^2 + u_0u_1 - v_0v_1 + (u_1^2 - v_1^2), 2u_0v_0 + u_0v_1 + u_1v_0 + 2u_1v_1) \end{cases} \quad (3)$$

其中  $P_0$  任意选取, 本文中取  $P_0 = (0,0)$ , 取  $P_1 - P_0 = (1,0)$ , 故

$$P'(0) \parallel (1,0) \quad (4)$$

将(3)式代入(2)式, 计算得  $v_0 = 0$ 。由(3)式和(4)式经计算得

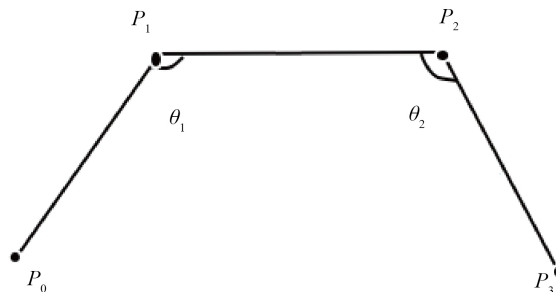
$$\begin{cases} P_0 = (0,0) \\ P_1 = \left(\frac{1}{2+m}u_0^2, 0\right) \\ P_2 = \left(\frac{1}{3}u_0^2 + \frac{1}{3}u_0u_1 + \frac{m-1}{3(2+m)}(u_1^2 - v_1^2), \frac{1}{3}u_0v_1 + \frac{2m-2}{3(2+m)}u_1v_1\right) \\ P_3 = \left(\frac{1}{3}u_0^2 + \frac{1}{3}u_0u_1 + \frac{1}{3}(u_1^2 - v_1^2), \frac{1}{3}u_0v_1 + \frac{2}{3}u_1v_1\right) \end{cases} \quad (5)$$

定理 2.2 如果  $m$ -Bézier 曲线的控制多边形的边长及其两个顶角满足以下条件:

$$\begin{cases} L_1 = \frac{1}{2+m}(u_0^2 + v_0^2) \\ L_2 = \left(\frac{m-1}{2(2+m)}\right)^2 [(u_0^2 + v_0^2) + (u_1^2 + v_1^2)] + \frac{1}{9}(u_0^2 + v_0^2)(u_1^2 + v_1^2) + 2\left(\frac{m-1}{2(2+m)}\right)^2 [(u_0u_1 + v_0v_1)^2 - (u_0v_1 - u_1v_0)^2] + \frac{2}{3}\left(\frac{m-1}{2(2+m)}\right) [(u_0^2 + v_0^2 + u_1^2 + v_1^2)(u_0u_1 + v_0v_1)] \\ L_3 = \frac{1}{2+m}(u_1^2 + v_1^2) \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\cos \theta_1}{\cos \theta_2} &= \frac{\frac{2(1-m)}{3(2+m)^2}(u_0^2 + v_0^2)^2(u_1^2 + v_1^2) + F}{\frac{2(1-m)}{3(2+m)^2}(u_0^2 + v_0^2)(u_1^2 + v_1^2)^2 + G} \\ F &= \frac{2(1-m)}{3(2+m)^2} [(u_0u_1 + v_0v_1)^2 - (u_1v_0 - u_0v_1)^2] (u_1^2 + v_1^2) \\ &\quad - \frac{2}{3(2+m)} (u_0^2 + v_0^2)(u_0u_1 + v_0v_1)(u_1^2 + v_1^2) \\ G &= \frac{2(1-m)}{3(2+m)^2} [(u_0u_1 + v_0v_1)^2 - (u_1v_0 - u_0v_1)^2] (u_0^2 + v_0^2) \\ &\quad - \frac{2}{3(2+m)} (u_0^2 + v_0^2)(u_0u_1 + v_0v_1)(u_0^2 + v_0^2) \end{aligned}$$

其中  $\{L_i = |P_{i-1} - P_i|\}_{i=1}^3$  为控制多边形的边长, 此时  $m$ -Bézier 曲线为 PH 曲线。其控制多边形如图所示:



证明: 根据公式(3)中的坐标以及两点间距离公式我们可以得出控制多边形各边长为(6)式。

由余弦定理可得  $\cos \theta_1 = \frac{L_1^2 + L_2^2 - L_{02}^2}{2L_1L_2}$ ,  $\cos \theta_2 = \frac{L_2^2 + L_3^2 - L_{13}^2}{2L_2L_3}$

$$\frac{\cos \theta_1}{\cos \theta_2} = \frac{\frac{2(1-m)}{3(2+m)^2}(u_0^2 + v_0^2)^2(u_1^2 + v_1^2) + F}{\frac{2(1-m)}{3(2+m)^2}(u_0^2 + v_0^2)(u_1^2 + v_1^2)^2 + G}$$

其中

$$F = \frac{2(1-m)}{3(2+m)^2} \left[ (u_0u_1 + v_0v_1)^2 - (u_1v_0 - u_0v_1)^2 \right] (u_1^2 + v_1^2) - \frac{2}{3(2+m)} (u_0^2 + v_0^2)(u_0u_1 + v_0v_1)(u_1^2 + v_1^2)$$

$$G = \frac{2(1-m)}{3(2+m)^2} \left[ (u_0u_1 + v_0v_1)^2 - (u_1v_0 - u_0v_1)^2 \right] (u_0^2 + v_0^2) - \frac{2}{3(2+m)} (u_0^2 + v_0^2)(u_0u_1 + v_0v_1)(u_0^2 + v_0^2)$$

由定理 2.1 得

$$\text{当 } m=0 \text{ 时, } \begin{cases} L_1 = \frac{u_0^2 + v_0^2}{3} \\ L_2 = \frac{(u_0^2 + v_0^2)(u_1^2 + v_1^2)}{9}, \text{ 此时 } L_2^2 = L_1L_3 \text{ 显然成立。} \\ L_3 = \frac{u_1^2 + v_1^2}{3} \end{cases}$$

根据(6)式控制多边形的边长长度满足的关系, 由余弦定理可得

$$\cos \angle P_0P_1P_2 = \cos \angle P_1P_2P_3 = \frac{-(u_0u_1 + v_0v_1)}{\sqrt{(u_0^2 + v_0^2)(u_1^2 + v_1^2)}}$$

则可得

$\angle P_0P_1P_2 = \angle P_1P_2P_3$  或  $\angle P_0P_1P_2 = \pi - \angle P_1P_2P_3$  为进一步确定多边形两个夹角之间的关系, 计算  $\sin \angle P_0P_1P_2, \sin \angle P_1P_2P_3$ , 即

$$\begin{aligned} \sin \angle P_0P_1P_2 &= \frac{(\Delta P_1 \times \Delta P_0) \cdot z}{L_2L_1} \\ \sin \angle P_1P_2P_3 &= \frac{(\Delta P_2 \times \Delta P_1) \cdot z}{L_3L_2} \end{aligned} \tag{7}$$

其中  $z$  是单位向量, 并与平面  $B(t)$  正交, 则可得,

$$\sin \angle P_0P_1P_2 = \sin \angle P_1P_2P_3 = \frac{u_1v_0 - u_0v_1}{\sqrt{(u_0^2 + v_0^2)(u_1^2 + v_1^2)}}, \text{ 即 } \angle P_0P_1P_2 = \angle P_1P_2P_3$$

结合(7)式可知  $L_1 = L_3, \frac{\cos \theta_1}{\cos \theta_2} = 1, \cos \theta_1 = \cos \theta_2$ 。

#### 4. 构造三次带形状参数的 PH 过渡曲线

给定平面参数曲线方程  $P(t) = (x(t), y(t))$ , 该参数曲线的切向量为  $P'(t) = (x'(t), y'(t))$ , 曲线  $P(t)$  的曲率为

$$\kappa(t) = \frac{|P'(t) \times P''(t)|}{|P'(t)|^3}$$

其中

$$\begin{aligned} P''(t) &= (x''(t), y''(t)); \\ |P'(t)| &= \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}。 \end{aligned}$$

由(2)~(4), 可得:

$$\begin{cases} \kappa(t) = \frac{2(uv' - u'v)}{(u^2 + v^2)^2} \\ \kappa(0) = \frac{2(u_0v_1 - u_1v_0)}{(u_0^2 + v_0^2)^2} \\ \kappa(1) = \frac{2(u_0v_1 - u_1v_0)}{(u_1^2 + v_1^2)^2} \\ \kappa'(t) = \left\{ 2 \left[ (uv'' - u''v)(u^2 + v^2) - 4(uv' - u'v)(uu' + vv') \right] \right\} / (u^2 + v^2)^3 \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} \kappa(0) = \frac{2u_0v_1}{u_0^4} \\ \kappa(1) = \frac{2u_0v_1}{(u_1^2 + v_1^2)^2} \end{cases} \quad (9)$$

由(8)式可以得出  $\kappa_0$  和  $\kappa_1$  符号相同, 所以在两圆不互相包含的情况下, 过渡曲线是一个 C 型过渡曲线。给定始末控制点  $P_0$ 、 $P_3$ , 且  $P_0$  的曲率圆心为  $C_0$ , 其曲率的半径为  $r_0$ , 由  $G^2$  连续可得:

$$\begin{cases} P_0 = (0, 0) \\ P'(0) \parallel (1, 0) \\ (\kappa(0), \kappa(1)) = \left( \frac{1}{r_0}, \frac{1}{r_1} \right) \end{cases}$$

假设  $r_1 > r_0$ , 若令:

$$\lambda = \sqrt[4]{r_0/r_1} \quad (10)$$

可得  $0 < \lambda < 1$ 。设控制多边形中  $P_1 - P_0$  与  $P_2 - P_1$  的夹角依次为  $\alpha$ 、 $\beta$ , 其中  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ,  $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ , 则

$$v_1/u_1 = \tan \frac{\alpha + \beta}{2}$$

将(8)式和(9)式带入(6)式可得:

$$\begin{cases} u_0 = \sqrt{2} r_0^{\frac{3}{8}} r_1^{\frac{1}{8}} \sqrt{\sin \frac{\alpha + \beta}{2}} \\ u_1 = \sqrt{2} r_0^{\frac{1}{8}} r_1^{\frac{3}{8}} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sqrt{\sin \frac{\alpha + \beta}{2}} \\ v_1 = \sqrt{2} r_0^{\frac{1}{8}} r_1^{\frac{3}{8}} \sin^{\frac{3}{2}} \frac{\alpha + \beta}{2} \end{cases}$$

**引理 1 [3]** (Kneser 定理) Spiral 上任何一点的曲率圆一定包含较小的曲率圆, 并且一定被较大的曲率圆所包含。

由引理 1 可知, 在两圆不相互包含的前提下, 曲率内部必有极值点。为了使曲线尽可能光滑, 要求曲线内部的极值点尽可能的少, 本文假设所要构造的 C 型过渡曲线曲率有且仅有一个极值点。

下面讨论 PH 过渡曲线的存在性。

**定理 3.1** 当两圆互不包含时, 即当  $r > r_1 - r_0$ , 若

$$0 < \cos \frac{\alpha + \beta}{2} < \lambda < 1$$

此时过渡曲线是一个C型过渡曲线。

证明 三次 PH 曲线导数为:

$$\kappa'(t) = \frac{-8(uv' - u'v)(uu' + vv')}{(u^2 + v^2)^3} = \frac{-8f(t)}{(u^2 + v^2)^3}, \text{ 其中}$$

$$f(t) = \sum_{i=0}^3 f_i(t) B_i'(t);$$

$$f_1 = 4r_0 r_1^{3/4} \sin^3 \frac{\alpha + \beta}{2} \left( r_1^{1/4} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} - r_0^{1/4} \right);$$

$$f_2 = 2r_0^{3/4} r_1^{3/4} \sin^3 \frac{\alpha + \beta}{2} (r_1^{1/2} - r_0^{1/2});$$

$$f_3 = 4r_0^{3/4} r_1 \sin^3 \frac{\alpha + \beta}{2} \left( r_1^{1/4} - r_0^{1/4} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \right)$$

当  $0 < \cos \frac{\alpha + \beta}{2} < \lambda < 1$  时,  $f_1 < 0, f_3 > 0, f(0)f(1) < 0$ , 这时曲线有尽可能少的曲率极值点。所以构造的过渡曲线是 C 型  $G^2$  连续。

定理 2 令端点曲率  $\kappa_0, \kappa_1$  对应的曲率半径为  $r_0, r_1, \lambda = \sqrt[4]{r_0/r_1}$ 。如果

$$0.5176 < \lambda < 1 \tag{11}$$

且

$$r_1 - r_0 < r < m(\lambda)(r_1 - r_0)$$

其中  $m(\lambda) = \frac{\sqrt{9 - 8\lambda^2 + 14\lambda^4 - 8\lambda^6 + 9\lambda^8}}{3(1 - \lambda^4)}$ 。

满足上述条件的三次 PH 过渡曲线是唯一的。

证明 给定曲线的两个端点  $P_0, P_3$ , 三次 PH 曲线的坐标系设定与端点曲率圆圆心和半径如图 1 所示。若圆心距为  $r$ , 则有  $|C_1 - C_0| = r$ 。

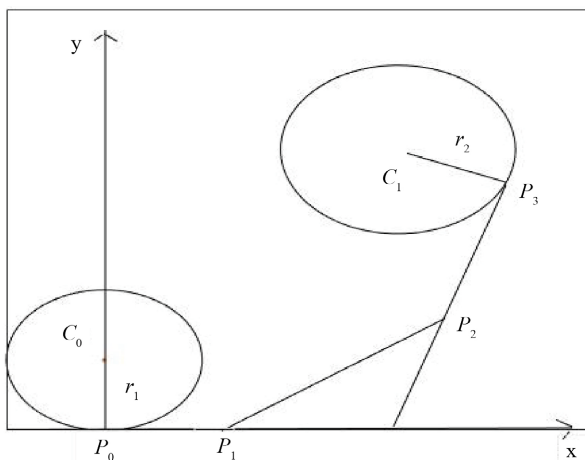


Figure 1. Coordinate system setting and end point curvature circle of cubic PH curve

图 1. 三次 PH 曲线的坐标系设定与端点曲率圆

由图 1 得:  $C_0 = (0, r_0)$ ,  $C_1 = (x_3 - r_1 \sin(\alpha + \beta), y_3 + r_1 \cos(\alpha + \beta))$ , 则两圆之间的圆心距向量为  $C_1 - C_0 = (x_3 - r_1 \sin(\alpha + \beta), y_3 + r_1 \cos(\alpha + \beta) - r_0)$ 。

构造关于  $\frac{\alpha + \beta}{2}$  的函数  $g\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) = |C_1 - C_0|^2 - r^2$ 。令  $q = \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$ , 则  $0 \leq q < 1$ 。将  $r_0 = \lambda^4 r_1$  带入  $g\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$  得到一个四次方程, 它的变量是  $q$ , 方程如下:

$$\begin{aligned} \tilde{g}(q) &= -\frac{16}{9} \lambda^4 r_1^2 q^4 + \frac{16}{9} \lambda^3 (1 + \lambda^2) r_1^2 q^3 + \frac{8}{9} \lambda^2 (-1 + \lambda^2) r_1^2 q^2 - \frac{16}{9} \lambda^3 (1 + \lambda^2) r_1^2 q \\ &\quad + \frac{1}{9} [-9r^2 + (9 - 8\lambda^2 + 14\lambda^4 - 8\lambda^6 + 9\lambda^8) r_1^2] \\ &= 0 \end{aligned}$$

由(10)式可得出结论,  $0 \leq q = \cos \frac{\alpha + \beta}{2} < \lambda$ 。考虑方程  $\tilde{g}(q) = 0$  在开区间  $(0, \lambda)$  内根的情况, 根据函数的零点存在性定理, 方程  $\tilde{g}(q) = 0$  在区间  $(0, \lambda)$  内可以有根的条件为  $\tilde{g}(0)\tilde{g}(\lambda) < 0$ 。

$$\begin{aligned} \tilde{g}(0) &= \frac{1}{9} [-9r^2 + (9 - 8\lambda^2 + 14\lambda^4 - 8\lambda^6 + 9\lambda^8) r_1^2] \\ &= \frac{9 - 8\lambda^2 + 14\lambda^4 - 8\lambda^6 + 9\lambda^8}{9(1 - \lambda^4)^2} (r_1 - r_0)^2 - r^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{g}(\lambda) &= \frac{1}{9} [-9\lambda^2 + (-1 + \lambda^2)^2 (9 + 10\lambda^2 + 17\lambda^4) r_1^2] \\ &= \frac{9 + 10\lambda^2 + 17\lambda^4}{9(1 + \lambda^2)^2} (r_1 - r_0)^2 - r^2 \end{aligned}$$

由  $0 < \lambda < 1$  得:  $0 < \frac{\sqrt{9 + 10\lambda^2 + 17\lambda^4}}{3(1 + \lambda^2)} < 1$ 。因为  $r > r_1 - r_0$ , 所以  $\tilde{g}(\lambda) < 0$ 。由此得  $\tilde{g}(0) > 0$ 。

由  $\tilde{g}(0) > 0$  得:

$$\frac{\sqrt{9 - 8\lambda^2 + 14\lambda^4 - 8\lambda^6 + 9\lambda^8}}{3(1 - \lambda^4)} (r_1 - r_0) > r_0$$

当  $0.5176 < \lambda < 1$  时, 上面所述的不等式成立。故当  $(r_1 - r_0) < r < m(\lambda)(r_1 - r_0)$  时, 有  $g(0)g(\lambda) < 0$ , 此时方程  $\tilde{g}(q) = 0$  在  $(0, \lambda)$  内一定有根。

上面已经讨论了方程  $\tilde{g}(q) = 0$  的根一定存在, 下面讨论根的唯一性的。

由(11)式得:

$$\tilde{g}'(q) = -\frac{16}{9} \lambda^3 (1 + \lambda^2) r_1^2 + \frac{16}{9} \lambda^2 (-1 + \lambda^2)^2 r_1^2 q^2 + \frac{16}{3} \lambda^3 (1 + \lambda^2) r_1^2 q - \frac{64}{9} \lambda^4 r_1^2 q^3,$$

且

$$\tilde{g}'(0) = -\frac{16}{9} \lambda^3 (1 + \lambda^2) r_1^2 < 0, \tilde{g}'(\lambda) = 0。$$

因为



$$g''(q) = \frac{16}{9}\lambda^2(-1+\lambda^2)^2 r_1^2 + \frac{32}{3}\lambda^3(1+\lambda^2)r_1^2 q - \frac{64}{3}\lambda^4 r_1^2 q^2,$$

$$\begin{aligned} \tilde{g}(q) &= -\frac{16}{9}\lambda^4 r_1^2 q^4 + \frac{16}{9}\lambda^3(1+\lambda^2)r_1^2 q^3 \\ &\quad + \frac{8}{9}\lambda^2(-1+\lambda^2)r_1^2 q^2 - \frac{16}{9}\lambda^3(1+\lambda^2)r_1^2 q \\ &\quad + \frac{1}{9}[-9r^2 + (9-9\lambda^2+14\lambda^4-8\lambda^6+9\lambda^8)r_1^2] \end{aligned}$$

是一个二次函数其变量为  $q$ ，并且该曲线的开口是向下的，

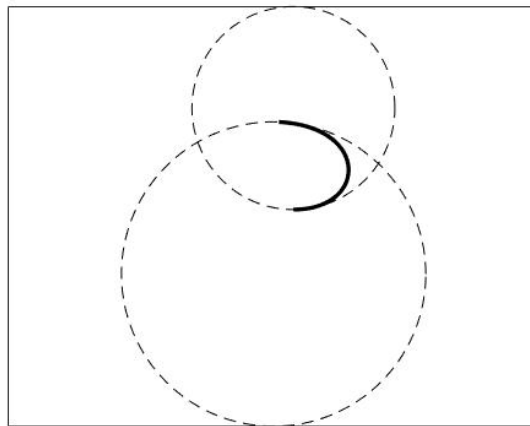
$$\tilde{g}''(0) = \frac{16}{9}\lambda^2(-1+\lambda^2)^2 r_1^2 > 0,$$

$$\tilde{g}''(q) = \frac{16}{9}\lambda^2 r_1^2 (1-\lambda^4+4\lambda^2(1-\lambda^2)) > 0$$

所以  $\tilde{g}'(q)$  是一个单调递增的函数。固  $\tilde{g}(q) = 0$  在开区间  $(0, \lambda)$  内的根具有唯一性。

### 5. 数值例子

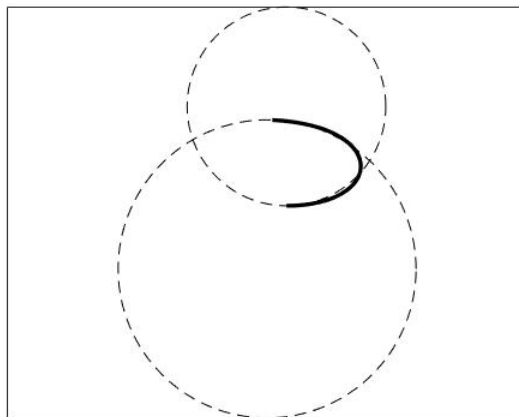
例 1 取  $m = 1$ ，起始点  $P_0 = (0, 0)$ ，并选取  $r_0 = 1$ ，由定理 2，可选  $r_1 = 1.5$ ，此时可设  $P_0$  的曲率圆为  $\Omega_0$ ，它的圆心是  $(0, 1)$ ，通过计算可得，所要构造的带参数的 PH 过渡曲线，其端点曲率圆的圆心距的取值区间为  $(r_1 - r_0) < r < 3.3833(r_1 - r_0)$ 。令  $r = 3.3(r_1 - r_0)$ ，得到结论  $\frac{\alpha + \beta}{2} = 1.5448$ ，因此确定此带参数的三次 PH 过渡曲线，如图 2 所示。



**Figure 2.** The cubic PH transition curve when  $r_1 = 1.5$  (solid line part)

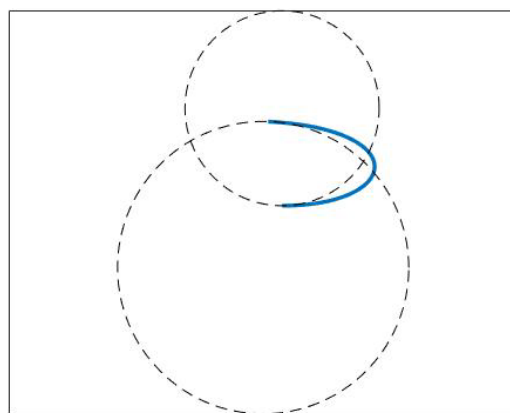
**图 2.**  $r_1 = 1.5$  时的三次 PH 过渡曲线(实线部分)

例 2 令  $m = 2$ ，起始点  $P_0 = (0, 0)$ ，并选取  $r_0 = 2$ ，由定理 2，可选  $r_1 = 1.5$ ，此时可设  $P_0$  的曲率圆为  $\Omega_0$ ，它的圆心是  $(0, 1)$ ，通过计算可得，所要构造的带参数的 PH 过渡曲线，其端点曲率圆的圆心距的取值区间为  $(r_1 - r_0) < r < 3.3833(r_1 - r_0)$ 。令  $r = 3.3(r_1 - r_0)$ ，得到结论  $\frac{\alpha + \beta}{2} = 1.5448$ ，因此确定此带参数的三次 PH 过渡曲线，如图 3 所示。



**Figure 3.** The cubic PH transition curve when  $m = 2$  (solid line part)

**图 3.** 当  $m = 2$  时的三次 PH 过渡曲线(实线部分)



**Figure 4.** The cubic PH transition curve when  $m = 3$  (solid line part)

**图 4.** 当  $m = 3$  时的三次 PH 过渡曲线(实线部分)

例 3 令  $m = 3$ , 起始点  $P_0 = (0, 0)$ , 并选取  $r_0 = 1$ , 由定理 2, 可选  $r_1 = 1.5$ , 此时可设  $P_0$  的曲率圆为  $\Omega_0$ , 它的圆心是  $(0, 1)$ , 通过计算可得, 所要构造的带参数 PH 过渡曲线, 其端点曲率圆的圆心距的取值区间为  $(r_1 - r_0) < r < 3.3833(r_1 - r_0)$ 。令  $r = 3.3(r_1 - r_0)$ , 得到结论  $\frac{\alpha + \beta}{2} = 1.5448$ , 因此确定此带参数的三次 PH 过渡曲线, 如图 4 所示。

## 参考文献

- [1] 桂校生.  $C^1$  四次 Pythagorean Bézier 样条曲线的构造[J]. 安庆师范学院学报(自然科学版), 2011, 17(1): 27-30.
- [2] Bashir, U., Abbsa, M. and Ali, J.M. (2013) The  $G^2$  and  $G^2$  Rational Quadratic Trigonometric Bézier Curve with Two Shape Parameters with Applications. *Applied Mathematics and Computation*, **219**, 10183-10197. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2013.03.110>
- [3] Liang, X.K. (2011) Extension of the Cubic Uniform B-Spline Curve Based on the Linear Combination of Curves. *Journal of Image and Graphics*, **16**, 118-123.
- [4] Cao, J. and Wang, G.Z. (2011) Non-Uniform B-Spline Curves with Multiple Shape Parameters. *Journal of Zhejiang University-Science Computers & Electronics*, **12**, 800-808. <https://doi.org/10.1631/jzus.C1000381>
- [5] Han, X.L. and Zhu, Y.P. (2012) Curve Construction Based on Five Trigonometric Blending Functions. *BIT Numerical*

- 
- Mathematics*, **52**, 953-979. <https://doi.org/10.1007/s10543-012-0386-0>
- [6] 严兰兰, 韩旭里. 高阶连续的形状可调三角多项式曲线曲面[J]. 中国图形学报, 2015, 20(3): 427-436.
- [7] Walton, D.J. and Meek, D.S. (1996) A Planar Cubic Bézier Spiral. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **72**, 85-100. [https://doi.org/10.1016/0377-0427\(95\)00246-4](https://doi.org/10.1016/0377-0427(95)00246-4)
- [8] Walton, D.J. and Meek, D.S. (1998)  $G^2$  Curves Composed of Planar Cubic and Pythagorean Hodographs Quintic Spirals. *Computer Aided Geometric Design*, **15**, 547-566. [https://doi.org/10.1016/S0167-8396\(97\)00028-9](https://doi.org/10.1016/S0167-8396(97)00028-9)
- [9] Zhang, P. and Liang, P. (2017) Optimization of Polynomial Transition Curves from the Viewpoint of Jerk Value. *Archives of Civil Engineering*, **63**, 181-199. <https://doi.org/10.1515/ace-2017-0012>
- [10] Walton, D.J. and Meek, D.S. (1999)  $G^2$  Transition between Two Circles with a Fair Cubic Bézier Curve. *Computer-Aided Design*, **31**, 857-866. [https://doi.org/10.1016/S0010-4485\(99\)00073-1](https://doi.org/10.1016/S0010-4485(99)00073-1)
- [11] Walton, D.J. and Meek, D.S. (2002)  $G^2$  Transition between Two Circles with a Fair Pythagorean Hodograph Quintic Curve. *Journal Computational and Applied Mathematics*, **138**, 109-126. [https://doi.org/10.1016/S0377-0427\(01\)00359-4](https://doi.org/10.1016/S0377-0427(01)00359-4)
- [12] Han, X.A., Ma, Y.V. and Huang, X.L. (2009) The Cubic Trigonometric Bezier Curve with Two Shape Parameters. *Applied Mathematics Letters*, **22**, 226-231. <https://doi.org/10.1016/j.aml.2008.03.015>