Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2022, 11(1), 16-21
Published Online January 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2022.111003

Hans汉斯

模糊集值鞅和模糊集值平方可积鞅

王　源，李俊刚

北方工业大学统计学系，北京

收稿日期：2021年12月4日；录用日期：2021年12月25日；发布日期：2022年1月7日

摘　要

本文中，我们首先介绍了一些必要的符号、定义，在第二部分中给出了一些集值和模糊集的相关定理及证明，第三部分中我们给出了模糊集值鞅的定义及模糊集值平方可积鞅的表示定理，并对该表示定理进行了证明，同时讨论了可分的模糊集值随机过程，对部分定理进行了证明。

关键词

模糊集值鞅，模糊集值平方可积鞅，鞅选择

Fuzzy Set-Valued Martingales and Fuzzy Set-Valued Square Integrable Martingales

Yuan Wang, Jungang Li

Department of Statistics, North China University of Technology, Beijing

Received: Dec. 4th, 2021; accepted: Dec. 25th, 2021; published: Jan. 7th, 2022

Abstract

In this paper, we first introduce some necessary symbols and definitions. In the second part, we give some related theorems and proofs of set-valued and fuzzy sets. In the third part, we give the definition of fuzzy set-valued martingale and the representation theorem of fuzzy set-valued square integrable martingale, and prove the representation theorem; at the same time, we discuss the separable fuzzy set-valued random process, and prove some theorems.

Keywords

Fuzzy Set-Valued Martingales, Fuzzy Set-Valued Square Integrable Martingales, Selection of Martingales

文章引用: 王源, 李俊刚. 模糊集值鞅和模糊集值平方可积鞅[J]. 应用数学进展, 2022, 11(1): 16-21.
DOI: 10.12677/aam.2022.111003

1. 引言

模糊集值变量首先是由 Kwakernaak [1]、Feron [2]、Puri 和 Ralescu [3]，利用不同的方法开始研究的。特别地，Puri 和 Ralescu 基于模糊集的集合表示以及集值随机变量理论，引进模糊集值随机变量的概念。

本文中，假定 R 是所有实数的集合，$I=[0,T]$ 是所有自然数的集合，Q 是所有有理数的集合，R^d 是普通范数 $\|\cdot\|$ 的 d 维欧几里得空间，$\mathcal{B}(E)$ 是几何空间 E 的波莱尔域，$(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ 是完备无原子概率空间，σ 域族满足一般条件(即包含所有的空集，非递减和右连续)。令 $f=\{f(t),\mathcal{A}_t:t\in I\}$ 是一个 R^d 值可适应随机过程。如果对任意 $t\in[0,T]$，f 是循序可测的，从 $[0,t]\times\Omega$ 到 R^d 的映射 $(s,\omega)\to f(s,\omega)$ 是 $\mathcal{B}([0,t])\times\mathcal{A}_t$ -可测的。

2. 相关基础理论

定义 2.1. $\mathbf{R}^d$ 上的一个模糊集是定义在 $\mathbf{R}^d$ 上取值为 $[0,1]$ 的一个函数 ν，即 $\nu:\mathbf{R}^d\to[0,1]$。

令 $\mathcal{F}(\mathbf{R}^d)$ 表示 $\mathbf{R}^d$ 上模糊集的全体。我们引入模糊集 ν 的 α 水平截集(或 α -截集)的概念，为了简便令 $I=[0,1]$，$I_+=(0,1]$。

定义 2.2. 对 $\nu\in\mathcal{F}(\mathbf{R}^d)$，定义 $\nu_\alpha=\{x\in R^d:\nu(x)\ge\alpha\}$，$\nu_{\alpha+}=\{x\in R^d:\nu(x)>\alpha\}$，对于 $\alpha\in I$，称 ν_α 为 ν 的 α 水平截集；对于 $\alpha\in(0,1)$；称 $\nu_{\alpha+}$ 为 ν 的 α 强水平截集。令 ν_{0+} 表示 ν 的支撑集，即 $\nu_{0+}=cl\{x\in R^d:\nu(x)>0\}$。

定理 2.3 [4]. 如果 $\nu\in\mathcal{F}(\mathbf{R}^d)$，$\{\nu_\alpha:\alpha\in I\}$ 是它的水平截集类，则对任意 $x\in R^d$，有

$$\nu(x)=\sup_{\alpha\in I}\left[\alpha\cdot I_{\nu_\alpha}(x)\right]=\sup_{\alpha\in\mathbf{Q}\cap I}\left[\alpha\cdot I_{\nu_\alpha}(x)\right]$$

也可以写作

$$\nu(x)=\sup_{\alpha\in I}\left[\alpha\in I:x\in\nu_\alpha\right]=\sup_{\alpha\in\mathbf{Q}\cap I}\left[\alpha\in\mathbf{Q}\cap I:x\in\nu_\alpha\right]$$

上述定理说明每个模糊集能够由 α 水平截集族 $\{\nu_\alpha:\alpha\in I\}$ 表示，且能够由可列个 α 水平截集 $\{\nu_\alpha:\alpha\in\mathbf{Q}\cap I\}$ 表示，其中 $\mathbf{Q}$ 是有理数集。

定义 2.4. 模糊集值随机变量(或模糊随机集)是一个映射 $X:\Omega\to F(R^d)$，满足对任意 $\alpha\in(0,1]$，$X_\alpha(\omega)=\{x\in R^d:X(\omega)(x)\ge\alpha\}$ 是集值随机变量。

定义 2.5. 模糊集值随机变量 X 的期望，表示为 $E[X]$，是 $\mathbf{F}(\mathbf{R}^d)$ 的一个模糊集，满足条件：对任意 $\alpha\in I$，

$$(E[X])_\alpha=cl\int_\Omega X_\alpha\mathrm{d}\mu=cl\{E[f]:f\in S_{X_\alpha}\},$$

其中闭包是在 R^d 中取的。

这里的积分是 Aumann 积分的推广，当定义 $(E[X])_\alpha$ 时，为了保持每个模糊集期望的水平截集是闭集，这里取了闭包，即 $(E[X])_\alpha=clE[X_\alpha]$。如果 $X\in L^1[\Omega,F_{kc}(R^d)]$，则 $E[X_\alpha]$ 是紧凸集，且 $(E[X])_\alpha=E[X_\alpha]$。

定理 2.6 [4]. 设 $X\in L^1[\Omega,\mathbf{A},\mu;\mathbf{F}_{kc}(\mathbf{R}^d)]$，$\mathbf{A}_0$ 是 $\mathbf{A}$ 的 σ 域，则存在 $Y\in L^1[\Omega,\mathbf{A}_0,\mu;\mathbf{F}_{kc}(\mathbf{R}^d)]$ 使得

$$\int_A Y\mathrm{d}\mu = \int_A X\mathrm{d}\mu\,,\quad A \in \mathbf{A}_0$$

注：称 Y 是模糊集值随机变量 X 在 $\mathbf{A}_0$ 的条件下的期望，记为 $E\left[X \mid \mathbf{A}_0\right]$，更多记号和定义参见[4]。

3. 模糊集值鞅和模糊集值平方可积鞅

定义 3.1 一个模糊集值随机过程 $\tilde{F}_\alpha = \left\{\tilde{F}_\alpha(t), \mathcal{A}_t : t \in I\right\}$ 称为模糊集值鞅，如果：

1) $\tilde{F}_\alpha = \left\{\tilde{F}_\alpha(t), \mathcal{A}_t : t \in I\right\}$ 是适应的，对任意的 $t \in I$，$\tilde{F}_\alpha(t)$ 是 L^1-有界的

2) 对任意的 $\alpha \in (0,1]$，$t \ge s$，$t, s \in I$，$E\left[\tilde{F}_\alpha(t) \mid \mathcal{A}_s\right] = \tilde{F}_\alpha(s)$，$a.e.(\mu)$

定义 3.2 一个模糊集值随机过程 $\tilde{F}_\alpha = \left\{\tilde{F}_\alpha(t), \mathcal{A}_t : t \in I\right\}$ 对任意的 $\omega \in \Omega$，$\alpha \in (0,1]$，在 $t_0 \in I$ 处称作模糊下半连续，如果对任意固定的 $\omega \in \Omega$ 及任意开集 G 满足 $\tilde{F}_\alpha(\omega, t_0) \cap G \ne \Phi$，则存在 $\delta > 0$ 满足当 $|t - t_0| < \delta$ 时，有 $\tilde{F}_\alpha(\omega, t_0) \cap G \ne \Phi$。

定义 3.3 一个模糊集值随机过程 $\tilde{F}_\alpha = \left\{\tilde{F}_\alpha(t), \mathcal{A}_t : t \in I\right\}$ 对任意 $\omega \in \Omega$，$\alpha \in (0,1]$，在 $t_0 \in I$ 时称作豪斯多夫模糊集值下半连续，如果对任意固定的 $\omega \in \Omega$，$\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，则当 $|t - t_0| < \delta$ 时，$\tilde{F}_\alpha(\omega, t_0) \subset \varepsilon + \tilde{F}_\alpha(\omega, t)$。

注：模糊下半连续简记为 f.l.s.c.，豪斯多夫模糊下半连续简记为 h.f.l.s.c.，类似地，模糊上半连续简记为 f.u.s.c.，豪斯多夫模糊上半连续简记为 h.f.u.s.c.。

定义 3.4. 假设 (X, d) 是可分的度量空间，Y 是一个度量空间，$f : \Omega \times X \to Y$ 称作卡拉西奥多里函数，如果：

a) 对任给的 $x \in X$，$\omega \to f(\omega, x)$ 是可测的。

b) 对任给的 $\omega \in \Omega$，$x \to f(\omega, x)$ 是可测的。

定理 3.5 [5]. 假设 $f : \Omega \times X \to Y$ 是一个卡拉西奥多里函数，则 $f(\cdot,\cdot)$ 是乘积可测的。

定理 3.6 [5]. 假定 X 是一个完备的可分度量空间，Y 是一个可分的巴拿赫空间，集值映射 $F : \Omega \times X \to K_c(Y)$ 满足：

1) $(\omega, x) \to F(\omega, x)$ 是可测的；

2) 对每个 $\omega \in \Omega$，$x \to F(\omega, x)$ 是下半连续的。

则存在 F 的卡拉西奥多里选择的序列 $\left\{f_n : \Omega \times X \to Y, n \ge 1\right\}$，对任意 $(\omega, x) \in \Omega \times X$，

$$F(\omega, x) = cl\left\{f_n(\omega, x) : n \ge 1\right\}$$

现在我们讨论可分的模糊集值随机过程。假定 X 是可分的巴拿赫空间，$\{x_n : n \ge 1\}$ 是 X 的一个可数稠密子集，$\{r_k, k \ge 1\}$ 是所有有理数的集合，$B(x_n, r_k)$ 是一个球。令 F 为 $\left\{\overline{B(x_n, r_k)}, B(x_n, r_k)^c : n, k \ge 1\right\}$ 的有限交的集合，则 F 是可数的。

定义 3.7. 假设 Y 是完备的可分度量空间，$\alpha \in (0,1]$，$\tilde{F}_\alpha : \Omega \times X \to K(Y)$ 称作可分的，在 $\tilde{F}_\alpha(\omega, B) = \cup\left\{\tilde{F}_\alpha(\omega, x) : x \in B\right\}(B \subset X)$ 时，如果存在一个 $\mu(N) = 0$ 的可数的集合 $D \subset X$ 和 $N \subset \mathcal{A}$，使得对任意 $\omega \in \Omega \setminus N$ 和 $A \in \tilde{F}$，则有 $cl\tilde{F}_\alpha(\omega, A \cap D) = cl\tilde{F}_\alpha(\omega, A)$。如果对任意的开集 $G \subset Y$，$\tilde{F}_\alpha^{-1}(G) = \left\{(\omega, x) \in \Omega \times X : \tilde{F}_\alpha(\omega, x) \cap G \ne \varnothing \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}(X)\right\}$，则 $\tilde{F}_\alpha$ 称作乘积可测的，如果对任意的开集 $G \subset Y$，$\tilde{F}_\alpha^{-1}(G) = \left\{(\omega, x) \in \Omega \times X : \tilde{F}_\alpha(\omega, x) \cap G \ne \varnothing \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}(X)\right\}$。

定理 3.8 [6]. 如果 $\alpha \in (0,1]$，$\tilde{F}_\alpha : \Omega \times X \to K(X)$ 满足：

1) 对任意 $x \in X$，$\omega \to \tilde{F}_\alpha(\omega, x)$ 是可测的，也就是说对任意开集 $G \subset X$，$\left\{\omega \in \Omega : \tilde{F}_\alpha(\omega, x) \cap G \ne \varnothing\right\} \in \mathcal{A}$；

2) 对任给的 $\omega \in \Omega$，$x \to f(\omega, x)$ 是下半连续或是豪斯多夫下半连续；

3) $\tilde{F}_\alpha(\cdot,\cdot)$ 是可分的。

则 $(\omega,x)\to\tilde F_\alpha(\omega,x)$ 是乘积可测的。

推论 3.9. 假定 $\tilde F_\alpha=\{\tilde F_\alpha(t),\mathcal{A}_t:t\in I\}$ 是可分的模糊集值鞅，对任意给定的 $\omega\in\Omega$，$\tilde F_\alpha(\omega,t)$ 是模糊下半连续的，那么若 $\alpha\in(0,1]$，则 $\tilde F_\alpha$ 是乘积可测的。

定义 3.10. 一个 R^d -值随机过程 $f=\{f(t),\mathcal{A}_t:t\in I\}$ 称作 $\tilde F_\alpha=\{\tilde F_\alpha(t),\mathcal{A}_t:t\in I\}$ 的一个 L^p -鞅选择，$\alpha\in(0,1]$，如果：

1) $f\in S^p(\tilde F_\alpha)$；

2) $\{f(t),\mathcal{A}_t:t\in I\}$ 是 $L^p[I\times\Omega;R^d]$ 中的一个鞅。

令 $\alpha\in(0,1]$，$\mathrm{MS}^p(\tilde F_\alpha)$ 为 $\tilde F_\alpha=\{\tilde F_\alpha(t),\mathcal{A}_t:t\in I\}$ 的所有 L^p -鞅选择的集合。如果 $p=1$，$\mathrm{MS}^1(\tilde F_\alpha)$ 可以写作 $\mathrm{MS}(\tilde F_\alpha)$。

定理 3.11. 令 $\tilde F_\alpha=\{\tilde F_\alpha(t),\mathcal{A}_t:t\in I\}\subset L^1[\Omega;\mathrm{F}_c(R^d)]$ 为可适应的乘积可测的模糊集值随机过程，那么下列命题是等价的：

1) $\{\tilde F_\alpha(t),\mathcal{A}_t:t\in I\}$ 是一个模糊集值鞅；

2) 对任意 $s,t\in I$，$s\le t$，我们有 $S^1_{\tilde F_\alpha(s)}(\mathcal{A}_s)=cl\{E[g\mid\mathcal{A}_s]:g\in S^1_{\tilde F_\alpha(t)}(\mathcal{A}_t)\}$；

3) 对任意 $s\in I$，$S^1_{\tilde F_\alpha(s)}(\mathcal{A}_s)=cl\{g(s):\{g_t:t\in I\}\in\mathrm{MS}(\tilde F_\alpha)\}$。

此外，如果 $\tilde F_\alpha=\{\tilde F_\alpha(t),\mathcal{A}_t:t\in I\}$ 是模糊区间值随机过程(也就是说 $d=1$)，1) 也等价于此。

4) 存在两个实值 L^1 -鞅选择 $\xi=\{\xi(t),\mathcal{A}_t:t\in I\}$ 和 $\eta=\{\eta(t),\mathcal{A}_t:t\in I\}$ 对每个 t，$\alpha\in(0,1]$，几乎处处 $\tilde F_\alpha(t,\omega)=[\xi(t,\omega),\eta(t,\omega)]$。

证明. 因为 $\tilde F_\alpha$ 是乘积可测的，则 $\tilde F_\alpha$ 的选择是乘积可测的。根据[7]中的定理 3.1，我们可得到以上结果。

注：对固定的 $\alpha\in(0,1]$，$\tilde F_\alpha$ 为集值随机过程，$\{\tilde g^i_\alpha=\{\tilde g^i_\alpha(t):t\in I\}:i\ge1\}$，$\tilde f_{n,\alpha}$，$\tilde f_{i,\alpha}$，$\tilde f_{nk,\alpha}$，$\tilde g_{i,\alpha}$，$\tilde g_{jk,\alpha}$ 为随机过程序列，$\tilde f_\alpha$ 为随机过程。

推论 3.12. 假定 $\tilde F_\alpha=\{\tilde F_\alpha(t),\mathcal{A}_t:t\in I\}\subset L^1[\Omega;\mathrm{F}_c(R^d)]$ 是一个乘积可测的模糊集值鞅，则存在一个模糊 R^d -值鞅的序列

$$\{\tilde g^i_\alpha=\{\tilde g^i_\alpha(t):t\in I\}:i\ge1\}\subset\mathrm{MS}(\tilde F_\alpha)$$

满足对 $t\in I$，几乎处处 $\tilde F_\alpha(t,\omega)=cl\{\tilde g^i_\alpha(t,\omega):i\ge1\}$。

定理 3.13. 假定 $\mathcal{A}$ 是 μ -可分的，并且令 $\tilde F_\alpha=\{\tilde F_\alpha(t),\mathcal{A}_t:t\in I\}$ 是可分的模糊集值平方可积鞅，并且对任意固定的 $\omega\in\Omega$，$\alpha\in(0,1]$，$\tilde F_\alpha(\omega,t)$ 是模糊下半连续的，则

$$S^1(\tilde F_\alpha)=cl\{\tilde g^i_\alpha:\{\tilde g^i_\alpha(t):t\in I\}\in\mathrm{MS}(\tilde F_\alpha),i\ge1\},$$

其闭包在空间 $(L^1[I\times\Omega;F^d],\|\cdot\|_1)$ 中。

证明：对任意 $\tilde f_\alpha\in S^1(\tilde F_\alpha)$，由[6]中的定理 2.6 性质可知，存在 $\tilde f_{n,\alpha}\in S^1(\tilde F_\alpha)$ 使得在 $n\to\infty$ 时，$E\int_0^T\|\tilde f_{n,\alpha}(s,\omega)-\tilde f_\alpha(s,\omega)\|\mathrm{d}s\to0$，所以存在 $\{\tilde f_{n,\alpha}:n\ge1\}$ 的序列 $\{\tilde f_{nk,\alpha}:k\ge1\}$ 满足对几乎处处 $s\in I$，当 $k\to\infty$ 时，$E\|\tilde f_{nk,\alpha}(s,\omega)-\tilde f_\alpha(s,\omega)\|$ 收敛于 0。

根据定理 3.11，对任意的 $s\in I$，$S^1_{\tilde F_\alpha(s)}(\mathcal{A}_s)=cl\{\tilde g_\alpha(s):\{\tilde g_\alpha(t):t\in I\}\in\mathrm{MS}(\tilde F_\alpha)\}$，且 $\mathrm{MS}(\tilde F_\alpha)$ 是可分空间 $L^1[I\times\Omega;F^d]$ 的一个子集。所以存在序列 $\{\{\tilde g_{i,\alpha}(t):t\in I\}:i\ge1\}\subset\mathrm{MS}(\tilde F_\alpha)$ 满足对几乎处处 $s\in I$，在 $i\to\infty$ 时有

$$E\|\tilde g_{i,\alpha}(s,\omega)-\tilde f_\alpha(s,\omega)\|\mathrm{d}s\to0。$$

根据有界收敛定理，我们有：在 $i\to 0$ 时，$E\int_0^T\left\|\tilde{g}_{i,\alpha}(s,\omega)-\tilde{f}_\alpha(s,\omega)\right\|\mathrm{d}s\to 0$。

证明完毕。

备注 3.14 在以上定理和推论中，L^1，S^1，$\mathrm{MS}\left(\tilde{F}_\alpha\right)$ 可以分别被 L^p，S^p，$\mathrm{MS}^p\left(\tilde{F}_\alpha\right)$（$p>1$）取代。

接下来，我们假设随机过程 $\tilde{F}_\alpha=\left\{\tilde{F}_\alpha(t):t\in I\right\}$ 在 $\mathrm{F}_c\left(R^d\right)$ 中取值，且若没有特殊声明，$\mathcal{A}$ 是 μ-可分的。

定义 3.15 一个模糊集值鞅 $\tilde{F}_\alpha=\left\{\tilde{F}_\alpha(t),\mathcal{A}_t:t\in I\right\}$，$\alpha\in(0,1]$，如果 $\sup_{t\in I}E\left[\left\|\tilde{F}_\alpha(t)\right\|_{\mathrm{F}}^2\right]<\infty$，称作平方可积的。

注意一个模糊集值平方可积鞅是 L^2-有界的。

定理 3.16. 假定 $\tilde{F}_\alpha=\left\{\tilde{F}_\alpha(t),\mathcal{A}_t:t\in I\right\}$ 是可分的模糊集值平方可积鞅且对任意固定的 $\omega\in\Omega$，$\alpha\in(0,1]$，$\tilde{F}_\alpha(\omega,t)$ 是模糊下半连续的，则存在连续模糊鞅选择的一个序列 $\left\{\tilde{f}_{i,\alpha}:i\geq 1\right\}$ 满足对任意 $(t,\omega)\in I\times\Omega$，

$$\tilde{F}_\alpha(t,\omega)=cl\left\{\tilde{f}_{i,\alpha}(t,\omega):i\geq 1\right\}\tag{3.1}$$

证明：因为任意给定的 $\omega\in\Omega$，$\alpha\in(0,1]$，$\tilde{F}_\alpha(\omega,t)$ 是模糊下半连续的，存在一系列的卡拉西奥多里选择 $\left\{\tilde{f}_{i,\alpha}:I\times\Omega\to F^d,i\geq 1\right\}$ 满足对任意 $(t,\omega)\in I\times\Omega$，我们有 $\tilde{F}_\alpha(t,\omega)=cl\left\{\tilde{f}_{i,\alpha}(t,\omega):i\geq 1\right\}$。

进一步，对任意给定的 $\tilde{f}_{i,\alpha}$，存在一个序列 $\left\{\tilde{g}_{j,\alpha}:j\geq 1\right\}\subset\mathrm{MS}^2\left(\tilde{F}_\alpha\right)$ 满足在 $j\to\infty$ 时，

$$E\int_0^T\left\|\tilde{g}_{j,\alpha}(s,\omega)-\tilde{f}_{i,\alpha}(s,\omega)\right\|^2\mathrm{d}s\to 0。$$

因此，存在 $\left\{\tilde{g}_{j,\alpha}:j\geq 1\right\}$ 的子序列 $\left\{\tilde{g}_{jk,\alpha}:k\geq 1\right\}$ 满足对几乎处处 $s\in I$，在 $k\to\infty$ 时，

$$E\left\|\tilde{g}_{jk,\alpha}(s,\omega)-\tilde{f}_{i,\alpha}(s,\omega)\right\|^2\to 0。$$

因为 $\mathcal{A}$ 是 μ-可分的，$\left\{\tilde{f}_{i,\alpha}(t),\mathcal{A}_t,a.e\ t\in I\right\}$ 对任意 $i\geq 1$ 是模糊平方可积鞅。

不失一般性地，在下文中我们假设 $\left\{\tilde{f}_{i,\alpha}(t),\mathcal{A}_t,t\in I\right\}$ 对任意 $i\geq 1$ 是一个模糊平方可积鞅。所以，我们得到(3.1)，证明完毕。

根据这个定理及[8]中的定理 1.3.3，我们得到如下推论：

推论 3.17. 假定 $\tilde{F}_\alpha=\left\{\tilde{F}_\alpha(t),\mathcal{A}_t:t\in I\right\}$ 是可分的模糊集值平方可积鞅且对任意固定的 $\omega\in\Omega$，$\alpha\in(0,1]$，$\tilde{F}_\alpha(\omega,t)$ 是模糊下半连续的，则存在一个 R^d-值连续鞅选择序列 $\tilde{f}_\alpha=\left\{f_\alpha^i=\left\{f_\alpha^i(t),\mathcal{A}_t:t\in I\right\}:i\geq 1\right\}$ 使得对任意 $t\in I$，

$$S^2_{\tilde{F}_\alpha(t)}\left(\mathcal{A}_t\right)=\overline{de}_{\mathcal{A}_t}\left\{\tilde{f}_{i,\alpha}(t):i\geq 1\right\}\tag{3.2}$$

其关于 Ω 的 $\mathcal{A}_t$-可测的有限部分是可分解的。

备注 3.18. $\tilde{F}$ 的 R^d-值连续鞅选择的集合表示为 $\mathrm{CMS}\left(\tilde{F}_\alpha\right)$，但遗憾的是我们无法直接推断 $\mathrm{CMS}\left(\tilde{F}_\alpha\right)$ 是否为 $L^2\left[I\times\Omega;F^d\right]$ 中一个封闭的集合。

一般说来，我们不能直接得到 $S^2_{\tilde{F}_\alpha(t)}\left(\mathcal{A}_t\right)=\left\{\tilde{f}_\alpha(t):\tilde{f}_\alpha\text{是}\tilde{F}_\alpha\text{的一个连续鞅选择}\right\}$，只能从定理 3.16 得到(3.2)。

基金项目

本论文工作由北京市属高校基本科研业务费(No. 110052971921/103)和北京市教委基本科研业务费(No. KM202010009013)资助。

参考文献

[1] Kwakernaak, H. (1978) Fuzzy Random Variables: Definition and Theorems. *Information Sciences*, **15**, 1-29. https://doi.org/10.1016/0020-0255(78)90019-1

[2] Féron, R. (1976) Ensembles aléatoire flous. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences Série A*, **182**, 903-906.

[3] Puri, M.L. and Ralescu, D.A. (1986) Fuzzy Random Variables. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **114**, 409-422. https://doi.org/10.1016/0022-247X(86)90093-4

[4] 张文修, 李寿梅, 汪振鹏, 高勇. 集值随机过程引论[M]. 北京: 科学出版社, 2007: 430-437.

[5] Hu, S. and Papageorgiou, N.S. (1997) Handbook of Multivalued Analysis. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/978-1-4615-6359-4

[6] Li, S., Li, J. and Li, X. (2010) Stochastic Integral with Respect to Set-Valued Square Integrable Martingales. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **370**, 659-671. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2010.04.040

[7] Li, S. and Ren, A. (2007) Representation Theorems, Set-Valued and Fuzzy Set-Valued Ito Integral. *Fuzzy Sets and System*, **158**, 949-962. https://doi.org/10.1016/j.fss.2006.12.004

[8] Li, S., Ogura, Y. and Kreinovich, V. (2002) Limit Theorems and Applications of Set-Valued and Fuzzy Set-Valued Random Variables. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/978-94-015-9932-0