Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2022, 11(1), 126-132
Published Online January 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2022.111018

Hans汉斯

Bergman空间上Toeplitz算子的拟正规性和双正规性

李 佳

辽宁师范大学数学学院，辽宁 大连

收稿日期：2021年12月13日；录用日期：2022年1月3日；发布日期：2022年1月18日

摘 要

本文主要研究Bergman空间上以非调和函数为符号的Toeplitz算子的拟正规性和双正规性：1) 以 $\varphi(z)=z^n+\lambda|z|^s$ 为符号的Toeplitz算子的拟正规性和双正规性；2) 以 $\psi(z)=az^n\bar{z}^m+b\bar{z}^nz^m$ 为符号的Toeplitz算子的拟正规性和双正规性。

关键词

Bergman空间，Toeplitz算子，拟正规，双正规

Quasi-Normality and Binormality of Toeplitz Operators on Bergman Spaces

Jia Li

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: Dec. 13th, 2021; accepted: Jan. 3rd, 2022; published: Jan. 18th, 2022

Abstract

In this paper, we mainly study the quasi-normality and binormality of Toeplitz operators in Bergman space with non-harmonic functions: 1) The quasi-normality and binormality of Toeplitz operators with $\varphi(z)=z^n+\lambda|z|^s$ as symbols; 2) Quasi-normality and binormality of Toeplitz operators with $\psi(z)=az^n\bar{z}^m+b\bar{z}^nz^m$ as symbols.

文章引用: 李佳. Bergman 空间上 Toeplitz 算子的拟正规性和双正规性[J]. 应用数学进展, 2022, 11(1): 126-132.
DOI: 10.12677/aam.2022.111018

Keywords

Bergman Spaces, Toeplitz Operators, Quasi-Normality, Binormality

1. 引言

Toeplitz 算子是算子理论的组成之一，Toeplitz 算子理论在概率论、控制论和物理等领域中的许多问题上都有着广泛的应用。正规算子起源于正规矩阵。如今，正规算子的理论较完备，许多学者将正规性的概念推广得到拟正规性、亚正规性、次正规性、双正规性等概念。

2019 年，Gu [1]等人介绍了 Hardy 空间上以解析函数或余解析函数为符号的双正规算子。进一步，对于以三角多项式和有理函数为符号的 Toeplitz 算子，他们证明了这些 Toeplitz 算子是双正规的当且仅当他们是正规的。

Bergman 空间上关于 Toeplitz 算子的相关性质见[2] [3] [4] [5]。1989 年，Nazih [6]证明了对于有界解析函数 φ，如果 T_φ 或者 $T_{\bar{\varphi}}$ 是拟正规的，则 φ 是一个常数。2010 年，Guediri [7]证明了若以有界解析函数或余解析函数为符号的对偶 Toeplitz 算子是拟正规的，则符号函数是一个常数。2020 年 Sumin [8]等人给出了 Bergman 空间上以调和函数和非调和函数为符号的正规 Toeplitz 算子相关结论。

2. 预备知识

设 H 为无穷维复可分 Hilbert 空间上，$B(H)$ 为 H 上一切有界线性算子所构成的 Banach 代数。设 $\mathbb{D}$ 是复数域 $\mathbb{C}$ 上的单位圆盘，设 $\mathrm{d}A$ 是 $\mathbb{D}$ 上的规范化面积测度。Bergman 空间 $L_a^2(\mathrm{d}A)$ 是 $L^2(\mathbb{D},\mathrm{d}A)$ 上全体解析函数构成的空间。定义 $L_a^2(\mathrm{d}A)$ 上的内积为

$$\langle f,g\rangle=\int_{\mathbb{D}} f(z)\overline{g(z)}\mathrm{d}A(z),\quad \forall f,g\in L_a^2(\mathrm{d}A).$$

Bergman 空间 $L_a^2(\mathrm{d}A)$ 上的再生核

$$K(z,w)=\frac{1}{(1-z\overline{w})^2},\quad z,w\in\mathbb{D}.$$

设 P 是 $L^2(\mathbb{D},\mathrm{d}A)$ 到 $L_a^2(\mathrm{d}A)$ 的正交投影，积分算子 P 表示为

$$Pf(z)=\int_{\mathbb{D}} K(z,w)f(w)\mathrm{d}A(w)=\int_{\mathbb{D}}\frac{f(w)}{(1-z\overline{w})^2}\mathrm{d}A(w).$$

设 $L^\infty(\mathbb{D})$ 是 $\mathbb{D}$ 上全体本质有界可测函数构成的空间。对 $\varphi\in L^\infty(\mathbb{D})$，以 φ 为符号的算子 $T_\varphi: L_a^2(\mathrm{d}A)\to L_a^2(\mathrm{d}A)$ 定义为

$$T_\varphi f=P(\varphi f),\ \ f\in L_a^2(\mathrm{d}A).$$

则 T_φ 被称为 Bergman 空间 $L_a^2(\mathrm{d}A)$ 上的 Toeplitz 算子。以 T_φ^* 定义 T_φ 的共轭算子。对 $\forall T_\varphi\in L_a^2(\mathrm{d}A)$，如果 $T_\varphi^*T_\varphi=T_\varphi T_\varphi^*$，则 T_φ 是正规的；如果 $T_\varphi^*T_\varphi T_\varphi=T_\varphi T_\varphi^*T_\varphi$，则 T_φ 是拟正规的；如果 $T_\varphi T_\varphi^* T_\varphi^* T_\varphi=T_\varphi^* T_\varphi T_\varphi T_\varphi^*$，则 T_φ 是双正规的。这三类算子之间的关系如下

正规 $\to$ 拟正规 $\to$ 双正规

设 a 和 b 是复数，φ 和 ψ 是上的有界函数。则 Toeplitz 算子有如下性质：

a) $T_{a\varphi+b\psi}=aT_{\varphi}+bT_{\psi}$。

b) $T_{\overline{\varphi}}=T_{\varphi}^{*}$。

如果 $\varphi\in H^{\infty}$，则

c) $T_{\psi}T_{\varphi}=T_{\psi\varphi}$。

d) $T_{\overline{\varphi}}T_{\psi}=T_{\overline{\varphi}\psi}$。

3. 以非调和函数为符号的 Toeplitz 算子的拟正规性和双正规性

本节主要研究了两个非调和函数，分别是 $\varphi(z)=z^{n}+\lambda|z|^{s}$ 和 $\psi(z)=az^{n}\overline{z}^{m}+b\overline{z}^{n}z^{m}$，并给出了 Toeplitz 算子拟正规和双正规的充要条件。首先介绍本文常用的一个引理：

引理 3.1 [9] 如果 $k\in\mathbb{N}_{0}$ 并且 $s\in(0,\infty)$，则

1) $P\left(z^{k}|z|^{s}\right)=\dfrac{2(k+1)}{2k+s+2}z^{k}$，

2) $P\left(z^{k}\overline{z}^{s}\right)=\begin{cases}\dfrac{k-s+1}{k+1}z^{k-s} & k\geq s\\ 0 & k<s\end{cases}$。

命题 3.2 设 $\varphi(z)=z^{n}+\lambda|z|^{s}$，其中 $n>0$，$s\in\mathbb{N}$，$z\in\mathbb{D}$，$\lambda\in\mathbb{C}$。则

1) T_{φ} 不是拟正规的；

2) T_{φ} 是双正规的当且仅当 $\lambda=0$。

证明：1) 由引理 2.1，有 $T_{\varphi}1=T_{z^{n}+\lambda|z|^{s}}1=P\left(z^{n}\right)+\lambda P\left(|z|^{s}\right)=z^{n}+\dfrac{2}{s+2}\lambda$，进一步

$T_{\varphi}^{*}T_{\varphi}1=\dfrac{1}{n+1}+\left(\dfrac{2}{s+2}\right)^{2}|\lambda|^{2}+\dfrac{2(n+1)}{2n+s+2}\overline{\lambda}z^{n}$，$n\geq1$，再次运用引理 2.1，可得

$$T_{\varphi}T_{\varphi}^{*}T_{\varphi}1=\frac{2(n+1)}{2n+s+2}\overline{\lambda}z^{2n}+\frac{1}{n+1}z^{n}+\left(\frac{2}{s+2}\right)^{2}|\lambda|^{2}z^{n}+\left(\frac{2(n+1)}{2n+s+2}\right)^{2}|\lambda|^{2}z^{n}+\frac{2}{(n+1)(s+2)}\lambda+\left(\frac{2}{s+2}\right)^{3}\lambda|\lambda|^{2},$$

相似地，

$$T_{\varphi}^{*}T_{\varphi}T_{\varphi}1=\frac{2(2n+1)}{4n+s+2}\overline{\lambda}z^{2n}+\frac{n+1}{2n+1}z^{n}+\frac{4(n+1)}{(s+2)(2n+s+2)}|\lambda|^{2}z^{n}+\left(\frac{2(n+1)}{2n+s+2}\right)^{2}|\lambda|^{2}z^{n}+\frac{2}{(n+1)(s+2)}\lambda+\frac{2}{2n+s+2}\lambda+\left(\frac{2}{s+2}\right)^{3}\lambda|\lambda|^{2}.$$

若 T_{φ} 是拟正规的，则 $T_{\varphi}T_{\varphi}^{*}T_{\varphi}1=T_{\varphi}^{*}T_{\varphi}T_{\varphi}1$。若 $\lambda=0$，对比 z^{n} 的系数，有 $\dfrac{1}{n+1}=\dfrac{n+1}{2n+1}$，矛盾；若 $\lambda\neq0$，对比 z^{2n} 的系数，有 $\dfrac{n+1}{2n+s+2}=\dfrac{2n+1}{4n+s+2}$，矛盾。因此不论 λ 为何值，T_{φ} 都不是拟正规的。

2) 证明过程同 1)，其中

$$T_\varphi T_\varphi^* T_\varphi^* T_\varphi 1=\left(\frac{2(n+1)}{2n+s+2}\right)^2\bar{\lambda}^2 z^{2n}+\frac{2}{2n+s+2}\bar{\lambda}z^n+\frac{2}{(n+1)(s+2)}\bar{\lambda}z^n+\left(\frac{2(n+1)}{2n+s+2}\right)^3|\lambda|^2 z^n$$
$$+\left(\frac{2}{s+2}\right)^3\bar{\lambda}|\lambda|^2 z^n+\frac{4}{(2n+s+2)(s+2)}|\lambda|^2+\frac{4}{(n+1)(s+2)^2}|\lambda|^2+\left(\frac{2}{s+2}\right)^4|\lambda|^4,$$

同理可得，

$$T_\varphi^* T_\varphi T_\varphi T_\varphi^* 1=\frac{4(2n+1)}{(s+2)(4n+s+2)}\bar{\lambda}^2 z^{2n}+\frac{2(n+1)}{(2n+1)(s+2)}\bar{\lambda}z^n+\left(\frac{2}{s+2}\right)^2\frac{2(n+1)}{2n+s+2}\bar{\lambda}|\lambda|^2 z^n$$
$$+\left(\frac{2(n+1)}{2n+s+2}\right)^2\frac{2}{s+2}\bar{\lambda}|\lambda|^2 z^n+\frac{2}{s+2}\left(\frac{2}{s+2}\frac{1}{n+1}+\frac{2}{2n+s+2}\right)|\lambda|^2+\left(\frac{2}{s+2}\right)^4|\lambda|^4.$$

若 T_φ 是双正规的，则 $T_\varphi T_\varphi^* T_\varphi^* T_\varphi 1=T_\varphi^* T_\varphi T_\varphi T_\varphi^* 1$。若 $\lambda=0$，则等式成立。若 $\lambda\neq 0$，对比 z^{2n} 的系数，可得 $\left(\frac{n+1}{2n+s+2}\right)^2\neq\frac{(2n+1)}{(s+2)(4n+s+2)}$。

当 $\lambda=0$ 时，$\varphi(z)=z^n$，此时对 $\forall k$，有

$$T_\varphi T_\varphi^* T_\varphi^* T_\varphi z^k=T_{z^n}T_{z^n\bar{z}^{2n}}z^k=\begin{cases}\frac{k-n+1}{k+n+1}z^k, & k\geq n,\\ 0, & k<n,\end{cases}$$

$$T_\varphi^* T_\varphi T_\varphi T_\varphi^* z^k=T_{\bar{z}^n z^{2n}}T_{\bar{z}^n}z^k=\begin{cases}\frac{k-n+1}{k+n+1}z^k, & k\geq n,\\ 0, & k<n,\end{cases}$$

因此 T_φ 是双正规的当且仅当 $\lambda=0$。结论得证。

当 $n=s=1$ 时，得到一个简单的实例如下：

例 3.3 设 $\varphi(z)=z+\lambda|z|$，其中 $z\in\mathbb{D}$，$\lambda\in\mathbb{C}$。则

1) T_φ 不是拟正规的；

2) T_φ 是双正规的当且仅当 $\lambda=0$。

为了讨论以 $\varphi(z)=az^n\bar{z}^m+b\bar{z}^n z^m$ 为符号的 Toeplitz 算子的拟正规性和双正规性，首先给出一个必要的引理：

引理 3.4 [8] 设 $\psi(z)=az^m\bar{z}^n+b\bar{z}^t z^s$，其中 $m\geq n\geq 0$，$t\geq s\geq 0$，$a,b\in\mathbb{C}$ 且非零。则 T_φ 是正规的当且仅当 $\varphi(z)$ 有形式

$$\psi(z)=(a+b)|z|^{2m}\text{ 或 }\psi(z)=az^m\bar{z}^n+b\bar{z}^m z^n\ (|a|=|b|).$$

命题 3.5 设 $\psi(z)=az^n\bar{z}^m+b\bar{z}^n z^m$，其中 $n\geq m>0, a,b\in\mathbb{C}$ 且非零，则

1) T_ψ 是拟正规的当且仅当 $|a|=|b|$，

2) T_ψ 是双正规的当且仅当 $|a|=|b|$。

证明：1) 根据引理 2.4 和 T_ψ 是正规的则 T_ψ 是拟正规的可得充分性，下证必要性。

由引理 2.1 可知

$$T_\psi z^{n-m}=T_{az^n\bar{z}^m+b\bar{z}^n z^m}z^{n-m}=aP\left(z^{2n-m}\bar{z}^m\right)+bP\left(z^n\bar{z}^n\right)$$
$$=a\frac{2n-2m+1}{2n-m+1}z^{2n-2m}+b\frac{1}{n+1},$$

再次利用引理 2.1，

$$\begin{aligned}T_\psi T_\psi z^{n-m} &= T_{az^n\bar{z}^m+b\bar{z}^n z^m}\left(a\frac{2n-2m+1}{2n-m+1}z^{2n-2m}+b\frac{1}{n+1}\right)\\&= a^2\frac{3n-3m+1}{3n-2m+1}\frac{2n-2m+1}{2n-m+1}z^{3n-3m}\\&\quad+ab\left[\frac{n-m+1}{(n+1)^2}+\frac{(2n-2m+1)(n-m+1)}{(2n-m+1)^2}\right]z^{n-m},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}T_\psi^* T_\psi z^{n-m} &= T_{\bar{a}\bar{z}^n z^m+\bar{b}z^n\bar{z}^m}\left(a\frac{2n-2m+1}{2n-m+1}z^{2n-2m}+b\frac{1}{n+1}\right)\\&= a\bar{b}\frac{3n-3m+1}{3n-2m+1}\frac{2n-2m+1}{2n-m+1}z^{3n-3m}\\&\quad+\left[|a|^2\frac{(2n-2m+1)(n-m+1)}{(2n-m+1)^2}+|b|^2\frac{n-m+1}{(n+1)^2}\right]z^{n-m},\end{aligned}$$

进一步，

$$\begin{aligned}T_\psi^* T_\psi T_\psi z^{n-m} &= a^2\bar{b}\frac{4n-4m+1}{4n-3m+1}\frac{3n-3m+1}{3n-2m+1}\frac{2n-2m+1}{2n-m+1}z^{4n-4m}\\&\quad+a|a|^2\frac{3n-3m+1}{(3n-2m+1)^2}\frac{(2n-2m+1)^2}{2n-m+1}z^{2n-2m}\\&\quad+a|b|^2\frac{2n-2m+1}{2n-m+1}\left[\frac{n-m+1}{(n+1)^2}+\frac{(2n-2m+1)(n-m+1)}{(2n-m+1)^2}\right]z^{2n-2m}\\&\quad+b|a|^2\frac{1}{n+1}\left[\frac{n-m+1}{(n+1)^2}+\frac{(2n-2m+1)(n-m+1)}{(2n-m+1)^2}\right],\end{aligned}$$

同样地，

$$\begin{aligned}T_\psi T_\psi^* T_\psi z^{n-m} &= a^2\bar{b}\frac{4n-4m+1}{4n-3m+1}\frac{3n-3m+1}{3n-2m+1}\frac{2n-2m+1}{2n-m+1}z^{4n-4m}\\&\quad+a|b|^2\frac{3n-3m+1}{(3n-2m+1)^2}\frac{(2n-2m+1)^2}{2n-m+1}z^{2n-2m}\\&\quad+a\frac{2n-2m+1}{2n-m+1}\left[|b|^2\frac{n-m+1}{(n+1)^2}+|a|^2\frac{(2n-2m+1)(n-m+1)}{(2n-m+1)^2}\right]z^{2n-2m}\\&\quad+b\frac{1}{n+1}\left[|b|^2\frac{n-m+1}{(n+1)^2}+|a|^2\frac{(2n-2m+1)(n-m+1)}{(2n-m+1)^2}\right],\end{aligned}$$

若 T_ψ 是拟正规的，则 $T_\psi T_\psi^* T_\psi z^{n-m} = T_\psi^* T_\psi T_\psi z^{n-m}$。对比常数项，有

$$\begin{aligned}&|a|^2 b\frac{1}{n+1}\left[\frac{n-m+1}{(n+1)^2}+\frac{(2n-2m+1)(n-m+1)}{(2n-m+1)^2}\right]\\&= b\frac{1}{n+1}\left[|b|^2\frac{n-m+1}{(n+1)^2}+|a|^2\frac{(2n-2m+1)(n-m+1)}{(2n-m+1)^2}\right],\end{aligned}$$

即

$$\left(|a|^2-|b|^2\right)\frac{n-m+1}{(n+1)^2}=0,$$

因为 $n \ge m$，所以 $\frac{n-m+1}{(n+1)^2} \ne 0$，由此可得 $|a|=|b|$。

2) 同样容易得到充分性，下证必要性。通过直接的计算可得

$$\begin{aligned}T_\psi T_\psi^* T_\psi^* T_\psi 1 &= a^2\bar{b}^2\frac{n-m+1}{n+1}\frac{2n-2m+1}{2n-m+1}\frac{3n-3m+1}{3n-2m+1}\frac{4n-4m+1}{4n-3m+1}z^{4n-4m}\\&+a\bar{b}|b|^2\frac{n-m+1}{n+1}\frac{3n-3m+1}{2n-m+1}\frac{(2n-2m+1)^2}{(3n-2m+1)^2}z^{2n-2m}\\&+a\bar{b}|a|^2\frac{2n-2m+1}{2n-m+1}\left[\frac{(n-m+1)^2(2n-2m+1)}{(n+1)(2n-m+1)^2}+\frac{(n-m+1)^2}{(n+1)^3}\right]z^{2n-2m}\\&+|a|^2|b|^2\frac{1}{n+1}\left[\frac{(n-m+1)^2(2n-2m+1)}{(n+1)(2n-m+1)^2}+\frac{(n-m+1)^2}{(n+1)^3}\right],\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}T_\psi^* T_\psi T_\psi T_\psi^* 1 &= a^2\bar{b}^2\frac{n-m+1}{n+1}\frac{2n-2m+1}{2n-m+1}\frac{3n-3m+1}{3n-2m+1}\frac{4n-4m+1}{4n-3m+1}z^{4n-4m}\\&+a\bar{b}|a|^2\frac{n-m+1}{n+1}\frac{3n-3m+1}{2n-m+1}\frac{(2n-2m+1)^2}{(3n-2m+1)^2}z^{2n-2m}\\&+a\bar{b}|b|^2\frac{2n-2m+1}{2n-m+1}\left[\frac{(n-m+1)^2(2n-2m+1)}{(n+1)(2n-m+1)^2}+\frac{(n-m+1)^2}{(n+1)^3}\right]z^{2n-2m}\\&+|a|^2|b|^2\frac{1}{n+1}\left[\frac{(n-m+1)^2(2n-2m+1)}{(n+1)(2n-m+1)^2}+\frac{(n-m+1)^2}{(n+1)^3}\right],\end{aligned}$$

对比 z^{2n-2m} 的系数，可得

$$a\bar{b}\left(|a|^2-|b|^2\right)G(n,m)=0,$$

其中 $G(n,m)=\frac{(n-m+1)(2n-2m+1)}{(2n-m+1)^2}+\frac{n-m+1}{(n+1)^2}-\frac{(2n-2m+1)(3n-3m+1)}{(3n-2m+1)^2}\ne 0$，由于 a,b 非零，可得 $|a|=|b|$。

4. 研究结论

本文研究 Bergman 空间上 Toeplitz 算子的拟正规性和双正规性，并给出两个以非调和函数为符号函数的 Toeplitz 算子的拟正规性和双正规性的充分必要条件。

参考文献

[1] Gu, C., Kang, D.O., Ko, E., *et al.* (2019) Binormal Toeplitz Operators on the Hardy Space. *International Journal of Mathematics*, **30**, 1950001. https://doi.org/10.1142/S0129167X19500010

[2] Park, J.D. (2006) Bounded Toeplitz Products on the Bergman Space of the Unit Ball. *Integral Equations and Operator*

Theory, **54**, 571-584. https://doi.org/10.1007/s00020-005-1405-1

[3] Raimondo, R. (2000) Toeplitz Operators on the Bergman Space of the Unit Ball. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, **62**, 273-285. https://doi.org/10.1017/S0004972700018748

[4] Ahern, P. and Čučković, Ž. (2001) Products of Toeplitz Operators on the Bergman Space. *Illinois Journal of Mathematics*, **45**, 113-121. https://doi.org/10.1215/ijm/1258138257

[5] Gu, C. and Kang, D. (2014) Normal Toeplitz and Hankel Operators with Operator-Valued Symbols. *Houston Journal of Mathematics*, **40**, 1155-1181.

[6] Faour, N. (1989) On Quasinormal, Subnormal, and Hyponormal Toeplitz Operators. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, **38**, 121-129. https://doi.org/10.1007/BF02844854

[7] Guediri, H. (2010) Quasinormality and Numerical Ranges of Certain Classes of Dual Toeplitz Operators. *Abstract and Applied Analysis*, **2010**, Article ID 426319. https://doi.org/10.1155/2010/426319

[8] Kim, S. and Lee, J. (2020) Normal Toeplitz Operators on the Bergman Space. *Mathematics*, **8**, 1463. https://doi.org/10.3390/math8091463

[9] Simanek, B. (2019) Hyponormal Toeplitz Operators with Non-Harmonic Algebraic Symbol. *Analysis and Mathematical Physics*, **9**, 1613-1626. https://doi.org/10.1007/s13324-018-00279-2