

特殊图的双罗马控制数的研究

刘沙沙^{1*}, 边红^{1†}, 于海征², 魏丽娜¹

¹新疆师范大学数学科学学院, 新疆 乌鲁木齐

²新疆大学数学与系统科学学院, 新疆 乌鲁木齐

收稿日期: 2021年12月24日; 录用日期: 2022年1月14日; 发布日期: 2022年1月26日

摘要

令 $G = (V(G), E(G))$ 是一个简单连通图, 函数 $f: V(G) \rightarrow \{0, 1, 2, 3\}$ 满足: 1) 如果 $f(v) = 0$, 那么至少存在 v 的两个邻点 v_1, v_2 , 使得 $f(v_1) = f(v_2) = 2$, 或至少存在一个邻点 u 使得 $f(u) = 3$; 2) 如果 $f(v) = 1$, 那么至少存在 v 的一个邻点 u 使得 $f(u) = 2$ 或 3 . 则称 f 为图 G 的一个双罗马控制函数 (DRDF). 一个双罗马控制函数的权值为 $f(V(G)) = \sum_{u \in V(G)} f(u)$. 图 G 的双罗马控制函数的最小权值称为图 G 的双罗马控制数, 记作 $\gamma_{dR}(G)$. 权值为 $\gamma_{dR}(G)$ 的双罗马控制函数称为 G 的 γ_{dR} -函数. 本文主要给出了一些特殊图如: $P_m \boxtimes P_n$ ($m = 2, 3$), $P_{n,t}$, K_n^* , $M(C_n)$, $M(P_n)$ 的双罗马控制数的确切值.

关键词

双罗马控制函数, 双罗马控制数, 强积, 刺图, 中间图

Research on the Double Roman Domination Number of Some Special Graphs

Shasha Liu^{1*}, Hong Bian^{1†}, Haizheng Yu², Lina Wei¹

¹School of Mathematical Sciences, Xinjiang Normal University, Urumqi Xinjiang

* 第一作者.

† 通讯作者.

²College of Mathematics and System Sciences, Xinjiang University, Urumqi Xinjiang

Received: Dec. 24th, 2021; accepted: Jan. 14th, 2022; published: Jan. 26th, 2022

Abstract

Let $G = (V(G), E(G))$ be a simple connected graph, a function $f : V(G) \rightarrow \{0, 1, 2, 3\}$ satisfies with the property that 1) if $f(v) = 0$, then vertex v must exist at least two neighbors v_1, v_2 such that $f(v_1) = f(v_2) = 2$ or one neighbor u such that $f(u) = 3$; 2) if $f(v) = 1$, then there must exist at least one neighbor u of v such that $f(u) = 2$ or 3, and f is called a double Roman domination function (DRDF). The weight of a DRDF is $f(V(G)) = \sum_{u \in V(G)} f(u)$. The minimum weight of a DRDF on G is the double Roman domination number, denoted by $\gamma_{dR}(G)$. A double Roman domination function with the weight of $\gamma_{dR}(G)$ is called a γ_{dR} -function of G . In this paper, we present the exact values of the double Roman domination numbers of some special graphs, such as $P_m \boxtimes P_n$ ($m = 2, 3$), $P_{n,t}$, K_n^* , $M(C_n)$, $M(P_n)$.

Keywords

Double Roman Domination Function, Double Roman Domination Number, Strong Product, Thorn Graph, Middle Graph

Copyright © 2022 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

图的控制问题是图论中一个重要的研究领域, 该问题起源于国际象棋问题. 控制数的概念最早由 Berge [1]在其出版的《图论》中提出, 受 Berge 的启示, Oystein Ore [2]正式提出了控制数及其相关术语. 1999年, Stewart 首次在文献 [3]中提出了罗马控制的概念, 讲述了保卫罗马帝国的故事, 罗马帝国的一个城市如果没有驻扎军队, 则该城市没有被保护. 一个没有被保护的城 市在受到攻击时, 相邻的城市可以派军队支援, 但只有一支军队的城市无法向外调动, 若调动出去后, 该城市则不被保护. 如果每一个城市都驻扎一支军队, 军事花费太高. 要用尽可能少的军队来保护整个罗马帝国, 对

应罗马控制数. 随着对罗马控制问题的研究, 逐渐出现了很多罗马控制的推广形式. 双罗马控制的概念是由 Beeler [4] 等人最早提出的, 即罗马帝国的一个城市如果遭遇敌人攻击时, 若有两支军队去保护, 就得到了双重保护, 罗马帝国就拥有了更强的防御策略.

Beeler 在文献 [4] 中最早提出了双罗马控制的概念, 并研究了双罗马控制数与控制数和罗马控制之间的关系, 同时给出了关于图 G 的阶数的双罗马控制数的上界, 并且刻画了达到上界的图类. Lakshmanan 在文献 [5] 中给出了一个图的 Mycielskian 图的双罗马控制数的界以及对于一个图加一条边后对原图的双罗马控制数的影响. 在文献 [6] 中 Ahangar 提出了对于二部图和弦图的双罗马控制数的判断问题是 NP-完全的, 给出了 P_n 和 C_n 的双罗马控制数的确切值, 并且给出了具有较小双罗马控制数的图的刻画. 陈优在 [7] 中给出了 $P_2 \square C_n, C_3 \square C_n$ 的双罗马控制数. 杜良丽在 [8] 中给出了 $P_2 \square P_n$ 的双罗马控制数. Nazari-Moghaddam 在 [9] 给出了双罗马控制数临界性的概念并刻画出了相关的图.

本文主要给出了一些特殊图如: $P_m \boxtimes P_n$ ($m = 2, 3$), $P_{n,t}, K_n^*, M(C_n), M(P_n)$ 的双罗马控制数的确切值.

2. 基本概念

令 $G = (V(G), E(G))$ 是一个简单图, 顶点集为 $V(G)$, 边集为 $E(G)$, $|V(G)| = n$ 为图 G 的顶点个数. 对于 $v \in V(G)$, 定义 v 的开邻域为 $N(v) = \{u \in V : uv \in E\}$, v 的闭邻域为 $N[v] = N(v) \cup v$. 显然, 顶点 v 的度 $deg(v) = |N(v)|$.

如果函数 $f : V(G) \rightarrow \{0, 1, 2, 3\}$ 满足:

- 1) 如果 $f(v) = 0$, 那么至少存在 v 的两个邻点 v_1, v_2 使得 $f(v_1) = f(v_2) = 2$, 或至少存在 v 的一个邻点 u 使得 $f(u) = 3$;
- 2) 如果 $f(v) = 1$, 则至少存在 v 的一个邻点 u 使得 $f(u) = 2$ 或 3 . 则称 f 为 G 的一个双罗马控制函数 (DRDF).

一个双罗马控制函数的权重为 $f(V(G)) = \sum_{u \in V(G)} f(u)$. 图 G 所有双罗马控制函数的最小权值称为图 G 的双罗马控制数, 记作 $\gamma_{dR}(G)$. 权值为 $\gamma_{dR}(G)$ 的双罗马控制函数称为 G 的 γ_{dR} -函数. 令 $V_i = \{v \in V : f(v) = i\}, i = \{0, 1, 2, 3\}$, 则双罗马控制函数可以记为 $f = (V_0, V_1, V_2, V_3)$, 函数的权为 $\omega(f) = f(V) = |V_1| + 2|V_2| + 3|V_3|$.

对于任意两个简单图 G 和 H , $G \boxtimes H$ 称为图 G 和 H 的强积图, 其顶点集为 $V(G) \times V(H)$, 点 (u_1, v_1) 和 (u_2, v_2) 相邻当且仅当若 $u_1 u_2 \in E(G), v_1 = v_2$ 或 $u_1 = u_2, v_1 v_2 \in E(H)$ 或 $u_1 u_2 \in E(G), v_1 v_2 \in E(H)$. n 阶简单图 G 的刺图 [10] 是指在图 G 的每个顶点 v_i 上分别添加 $l_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 个叶子顶点后构成的图, 记作 G^* . 一个刺棒是由 n 个顶点组成的路, 在路的两个端点各添加 $t - 1$ 个悬挂点所组成的图, 记为 $P_{n,t}$. 图 G 的中间图 [11] 是指在图 G 的每条边上都插入一个新的顶点, 再把图 G 中相邻边上插入的新点相连而得到的图称为图 G 的中间图, 记为 $M(G)$. 用 C_n 和 P_n 分别表示 n 个顶点的圈和路.

命题2.1 [4] 对于任意图 $G, f = (V_0, V_1, V_2, V_3)$ 是图 G 的 γ_{dR} -函数, 则 $V_1 = \emptyset$.

3. 主要结果

定理3.1 令 $P_2 \boxtimes P_n$ 为 P_2 与 P_n 的强直积, 其中正整数 $n \geq 2$. 则

$$\gamma_{dR}(P_2 \boxtimes P_n) = 3\lceil \frac{n}{3} \rceil.$$

证明 为了方便讨论, 记 $P_2 \boxtimes P_n$ 的第一层的顶点为 u_1, u_2, \dots, u_n , 第二层的顶点记为 v_1, v_2, \dots, v_n , 如图 1 所示(从下至上), 不失一般性, 规定 $f(u_i) \leq f(v_i)$.

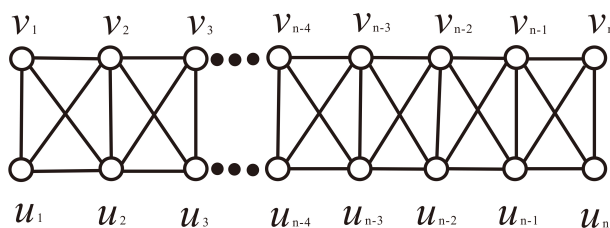


Figure 1. $P_2 \boxtimes P_n$

图 1. $P_2 \boxtimes P_n$

考虑函数 $f : V(P_2 \boxtimes P_n) \rightarrow \{0, 2, 3\}$,

当 $n \equiv 0(mod 3)$ 时, $f(v_{3i-1}) = 3, 1 \leq i \leq \frac{n}{3}$, 其余顶点赋值为 0;

当 $n \equiv 1(mod 3)$ 时, $f(v_{3i-1}) = 3, 1 \leq i \leq \frac{n-1}{3}, f(v_n) = 3$, 其余顶点赋值为 0;

当 $n \equiv 2(mod 3)$ 时, $f(v_{3i-1}) = 3, 1 \leq i \leq \frac{n-2}{3}, f(v_n) = 3$, 其余顶点赋值为 0.

显然 f 为 $P_2 \boxtimes P_n$ 的一个双罗马控制函数, 使得 $\gamma_{dR}(P_2 \boxtimes P_n) \leq 3\lceil \frac{n}{3} \rceil$.

反过来, 对顶点集进行归纳, 显然对于 $n \leq 5$ 成立, 假设对于 $n \geq 6$ 并且对于任意小于 n 的结论都成立. 令 $f = (V_0, V_2, V_3)$ 为 $P_2 \boxtimes P_n$ 的一个 γ_{dR} -函数. 分以下 3 种情况讨论:

1) 当 $f(v_n) + f(u_n) = 3$ 时.

此时 $f(v_n) = 3, f(u_n) = 0$. 由双罗马控制函数定义可知: $f(v_{n-1}) = f(u_{n-1}) = 0$, 则有 $f(v_{n-2}) + f(v_{n-3}) \leq 3$. 否则若 $f(v_{n-2}) + f(v_{n-3}) > 3$. 定义实值函数 $g : V(P_2 \boxtimes P_n) \rightarrow \{0, 2, 3\}$, 使得 $g(v_n) = g(v_{n-3}) = 3$, 其余点赋值与 f 相同, 显然 g 为 $P_2 \boxtimes P_n$ 的一个双罗马控制函数, 使得 $\omega(g) < \omega(f)$, 矛盾. 定义实值函数 $h : V(P_2 \boxtimes P_{n-3}) \rightarrow \{0, 2, 3\}$, 使得 $h(v_{n-3}) = f(v_{n-2}) + f(v_{n-3}), h(u_{n-3}) = f(u_{n-2}) + f(u_{n-3})$, 其余点赋值与 f 相同, 则有 $\gamma_{dR}(P_2 \boxtimes P_n) = \omega(f) = \omega(h) + 3 \geq \gamma_{dR}(P_2 \boxtimes P_{n-3}) + 3 = 3\lceil \frac{n}{3} \rceil$.

2) 当 $f(v_n) + f(u_n) < 3$ 时.

不妨设 $f(v_n) = 2, f(u_n) = 0$, 则有 $f(u_{n-1}) \geq 2$ 或 $f(v_{n-1}) \geq 2$. 不妨设 $f(u_{n-1}) \geq 2$. 定义实值函数 $g : V(P_2 \boxtimes P_n) \rightarrow \{0, 2, 3\}$, 使得 $g(v_{n-1}) = 3, g(v_n) = 0$, 其余点赋值与 f 相同, 显然 g 为 $P_2 \boxtimes P_n$ 的一个双罗马控制函数, 使得 $\omega(g) < \omega(f)$, 矛盾.

3) 当 $f(v_n) + f(u_n) > 3$ 时.

情形1: $f(v_n) = 3, f(u_n) = 2$. 定义实值函数 $g : V(P_2 \boxtimes P_n) \rightarrow \{0, 2, 3\}$, 使得 $g(v_n) = 3, g(u_n) = 0$, 其余点赋值与 f 相同, 显然 g 为 $P_2 \boxtimes P_n$ 的一个双罗马控制函数, 使得 $\omega(g) < \omega(f)$, 矛盾.

情形2: $f(v_n) = 2, f(u_n) = 2$. 定义实值函数 $g : V(P_2 \boxtimes P_n) \rightarrow \{0, 2, 3\}$, 使得 $g(v_n) = 3, g(u_n) = 0$, 其余点赋值与 f 相同, 显然 g 为 $P_2 \boxtimes P_n$ 的一个双罗马控制函数, 使得 $\omega(g) < \omega(f)$, 矛盾.

定理3.2 令 $P_3 \boxtimes P_n$ 为 P_3 与 P_n 的强直积, 其中正整数 $n \geq 2$. 则

$$\gamma_{dR}(P_3 \boxtimes P_n) = 3 \lceil \frac{n}{3} \rceil.$$

证明 为了方便讨论, 记 $P_3 \boxtimes P_n$ 的第一层的顶点为 u_1, u_2, \dots, u_n , 第二层的顶点记为 v_1, v_2, \dots, v_n , 第三层的顶点为 w_1, w_2, \dots, w_n (自下而上).

考虑函数 $f : V(P_3 \boxtimes P_n) \rightarrow \{0, 2, 3\}$,

当 $n \equiv 0, 2 \pmod{3}$ 时, $f(v_i) = 3, i \equiv 2 \pmod{3}$, 其余顶点赋值为0;

当 $n \equiv 1 \pmod{3}$ 时, $f(v_i) = 3, i \equiv 2 \pmod{3}, f(v_n) = 3$, 其余顶点赋值为0;

显然 f 为 $P_3 \boxtimes P_n$ 的一个双罗马控制函数, 使得 $\gamma_{dR}(P_3 \boxtimes P_n) \leq 3 \lceil \frac{n}{3} \rceil$.

反过来, 对点集进行归纳, 显然对于 $n \leq 4$ 成立, 假设对于 $n \geq 5$ 并且对于任意小于 n 的结论都成立. 假设 $f = (V_0, V_2, V_3)$ 为 $P_3 \boxtimes P_n$ 的一个 γ_{dR} -函数.

由 $P_3 \boxtimes P_n$ 的结构特点及双罗马控制数的定义, 可以得到 $P_3 \boxtimes P_n$ 的列只有赋值为3以及赋值为0的列. 否则假设存在赋值为2的列.

情形1: 当 $f(w_n) = 2, f(v_n) = f(u_n) = 0$ 时. 由双罗马控制数的定义知 $f(v_{n-1}) = 3$, 则有 $f(u_{n-1}) = 0, f(w_{n-1}) = 0$. 定义实值函数 $g : V(P_3 \boxtimes P_n) \rightarrow \{0, 2, 3\}$, 使得 $g(w_n) = 0$, 其余点赋值与 f 相同, 显然 g 为 $P_3 \boxtimes P_n$ 的一个双罗马控制函数, 使得 $\omega(g) < \omega(f)$, 矛盾.

情形2: 当 $f(v_n) = 2, f(w_n) = f(u_n) = 0$ 时. 由双罗马控制数的定义知 $f(v_{n-1}) \geq 2$, 则有 $f(w_{n-1}) = 0, f(u_{n-1}) = 0$. 定义实值函数 $g : V(P_3 \boxtimes P_n) \rightarrow \{0, 2, 3\}$, 使得 $g(v_{n-1}) = 3, g(v_n) = 0$, 其余点赋值与 f 相同, 显然 g 为 $P_3 \boxtimes P_n$ 的一个双罗马控制函数, 使得 $\omega(g) < \omega(f)$, 矛盾.

情形3: 当 $f(u_n) = 2, f(w_n) = f(v_n) = 0$ 时. 由于 $P_3 \boxtimes P_n$ 的对称性可知和情形1类似.

接下来讨论 $f(w_n) + f(v_n) + f(u_n) = 3$ 与 $f(w_n) + f(v_n) + f(u_n) = 0$ 时的情形.

(i) $f(w_n) + f(v_n) + f(u_n) = 3$

情形1: 当 $f(w_n) = 3, f(v_n) = f(u_n) = 0$ 时. 由双罗马控制数的定义知 $f(w_{n-1}) = f(v_{n-1}) = 0$, 则有 $f(u_{n-1}) = 3$. 定义实值函数 $g : V(P_3 \boxtimes P_n) \rightarrow \{0, 2, 3\}$, 使得 $g(v_{n-1}) = 3, g(w_n) = 0$, 其余点赋值与 f 相同, 显然 g 为 $P_3 \boxtimes P_n$ 的一个双罗马控制函数, 使得 $\omega(g) < \omega(f)$, 矛盾.

情形2: 当 $f(v_n) = 3, f(w_n) = f(u_n) = 0$ 时. 由双罗马控制数的定义知 $f(w_{n-1}) = f(v_{n-1}) = f(u_{n-1}) = 0$. 定义实值函数 $g : V(P_3 \boxtimes P_{n-2}) \rightarrow \{0, 2, 3\}$, 使得 $g(w_{n-2}) = f(w_{n-2}) + f(w_{n-1}), g(v_{n-2}) = f(v_{n-2}) + f(v_{n-1}), g(u_{n-2}) = f(u_{n-2}) + f(u_{n-1})$, 其余点赋值与 f 相同, 则有 $\gamma_{dR}(P_3 \boxtimes P_n) = \omega(f) = \omega(g) + 3 \geq \gamma_{dR}(P_3 \boxtimes P_{n-2}) + 3 = 3 \lceil \frac{n}{3} \rceil$.

情形3: 当 $f(u_n) = 3, f(w_n) = f(v_n) = 0$ 时. 由于 $P_3 \boxtimes P_n$ 的对称性可知和情形1类似.

$$(ii) f(w_n) + f(v_n) + f(u_n) = 0$$

此时即 $f(w_n) = 0, f(v_n) = 0, f(u_n) = 0$. 由双罗马控制数的定义知 $f(v_{n-1}) = 3$, 则有 $f(w_{n-2}) = f(w_{n-1}) = f(v_{n-2}) = f(u_{n-2}) = f(u_{n-1}) = 0$. 定义实值函数 $g : V(P_3 \boxtimes P_{n-3}) \rightarrow \{0, 2, 3\}$, 使得 $g(w_{n-3}) = f(w_{n-3}) + f(w_{n-2}), g(v_{n-3}) = f(v_{n-3}) + f(v_{n-2}), g(u_{n-3}) = f(u_{n-3}) + f(u_{n-2})$, 其余点赋值与 f 相同, 则有 $\gamma_{dR}(P_3 \boxtimes P_n) = \omega(f) = \omega(g) + 3 \geq \gamma_{dR}(P_3 \boxtimes P_{n-3}) + 3 = 3\lceil \frac{n}{3} \rceil$.

定理3.3 令 $P_{n,t}$ 是一个刺图, 其中 $n \geq 3, t \geq 3$. 则

$$\gamma_{dR}(P_{n,t}) = \begin{cases} n + 3, & n \equiv 0, 2(mod 3); \\ n + 2, & n \equiv 1(mod 3). \end{cases}$$

证明 为了方便讨论, 对 $P_{n,t}$ 进行适当的标号, 如图 2 所示.

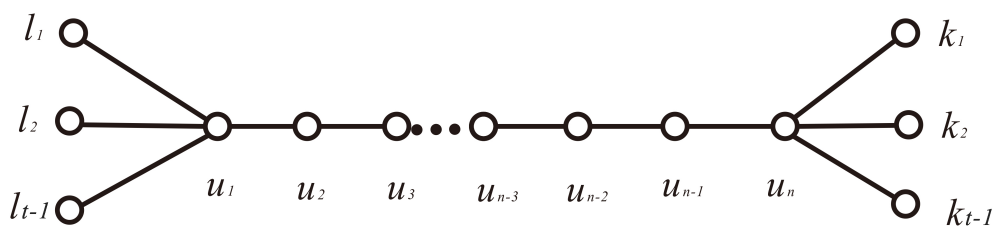


Figure 2. $P_{n,t}$

图 2. $P_{n,t}$

考虑函数 $f : V(P_{n,t}) \rightarrow \{0, 2, 3\}$,

当 $n \equiv 0(mod 3)$ 时, $f(u_i) = 3, i \equiv 2(mod 3), f(u_n) = 3$, 其余顶点赋值为0;

当 $n \equiv 1(mod 3)$ 时, $f(u_i) = 3, i \equiv 2(mod 3)$, 其余顶点赋值为0;

当 $n \equiv 2(mod 3)$ 时, $f(u_i) = 3, i \equiv 2(mod 3)$ 且 $i \neq n - 1, f(u_{n-2}) = 2, f(u_n) = 3$, 其余顶点赋值为0.

显然 f 为 $P_{n,t}$ 的一个双罗马控制函数, 使得

$$\gamma_{dR}(P_{n,t}) \leq \begin{cases} n + 3, & n \equiv 0, 2(mod 3); \\ n + 2, & n \equiv 1(mod 3). \end{cases}$$

反过来对 n 进行归纳, 显然对于 $n \leq 6$ 都成立, 现假设对于 $n \geq 7$ 以及所有点数小于 n 的结论都成立. 假设 $g = (V_0, V_2, V_3)$ 为 $P_{n,t}$ 的一个 γ_{dR} -函数. 由于 $P_{n,t}$ 的结构特点, 规定 $g(u_1) = g(u_n) = 3, g(l_1) = g(l_2) = \dots = g(l_{t-1}) = 0, g(k_1) = g(k_2) = \dots = g(k_{t-1}) = 0$. 讨论 $g(u_{n-2})$ 这个点:

1) 当 $g(u_{n-2}) = 0$ 时, 可得 $g(u_{n-3}) = 3$. 定义实值函数 $h : V(P_{n-3,t}) \rightarrow \{0, 2, 3\}$, 其中 $P_{n-3,t}$

是删去 $u_{n-1}, u_{n-2}, u_{n-3}$ 再连接 u_{n-4} 与 u_n 得到的. 显然 g 为 $P_{n-3,t}$ 的一个双罗马控制函数.

$$\gamma_{dR}(P_{n,t}) = \omega(g) = \omega(h) + 3 \geq \gamma_{dR}(P_{n-3,t}) + 3 \geq \begin{cases} n + 3, & n \equiv 0, 2(\text{mod}3); \\ n + 2, & n \equiv 1(\text{mod}3). \end{cases}$$

2) 当 $g(u_{n-2}) = 2$ 时, 定义实值函数 $h : V(P_{n-2,t}) \rightarrow \{0, 2, 3\}$, 其中 $P_{n-2,t}$ 是删去 u_{n-1}, u_{n-2} , 再连接 u_{n-3} 与 u_n 得到的. 显然 g 为 $P_{n-2,t}$ 的一个双罗马控制函数.

$$\gamma_{dR}(P_{n,t}) = \omega(g) = \omega(h) + 3 \geq \gamma_{dR}(P_{n-2,t}) + 2 \geq \begin{cases} n + 3, & n \equiv 0, 2(\text{mod}3); \\ n + 2, & n \equiv 1(\text{mod}3). \end{cases}$$

3) 当 $g(u_{n-2}) = 3$ 时, $g(u_{n-3}) = 0$. 定义实值函数 $h : V(P_{n-3,t}) \rightarrow \{0, 2, 3\}$, 其中 $P_{n-3,t}$ 是删去 $u_{n-1}, u_{n-2}, u_{n-3}$ 再连接 u_{n-4} 与 u_n 得到的. 显然 g 为 $P_{n-3,t}$ 的一个双罗马控制函数.

$$\gamma_{dR}(P_{n,t}) = \omega(g) = \omega(h) + 3 \geq \gamma_{dR}(P_{n-3,t}) + 3 \geq \begin{cases} n + 3, & n \equiv 0, 2(\text{mod}3); \\ n + 2, & n \equiv 1(\text{mod}3). \end{cases}$$

为了方便讨论, 给出了完全图 K_4 的刺图的顶点标记方式, 如图 3 所示.

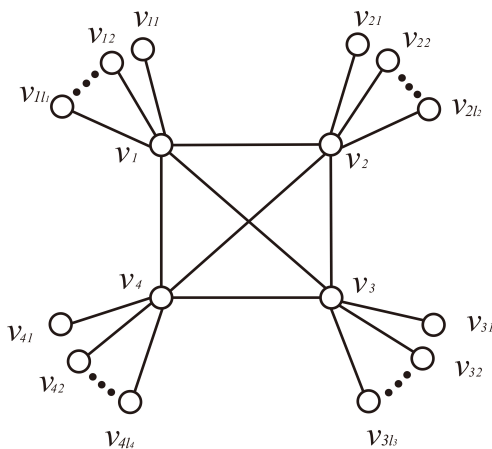


Figure 3. K_4^*

图 3. K_4^*

定理3.4 若 K_n^* 是一个完全图 K_n 的刺图, 其中 $n \geq 3, l_i \geq 1, i = 1, 2, \dots, n$. 则

- 1) 当 $l_i = 1, i = 1, 2, \dots, n$ 时, $\gamma_{dR}(K_n^*) = 2n + 1$;
- 2) 当 $l_i \geq 2, i = 1, 2, \dots, n$ 时, $\gamma_{dR}(K_n^*) = 3n$.

证明 1) 定义实值函数 $f : V(K_n^*) \rightarrow \{0, 2, 3\}$, 令 $f(v_i) = 3, f(v_{i1}) = 0, 1 \leq i \leq n$ 剩余点赋值为 2. 显然 f 为 K_n^* 的一个双罗马控制函数, 则有 $\gamma_{dR}(K_n^*) \leq 3 + 2(n - 1) = 2n + 1$.

反过来, 对 n 进行归纳. 假设 $f = (V_0, V_2, V_3)$ 为 K_n^* 的一个 γ_{dR} -函数, 可知要使 K_n^* 的权值和最小, 显然所有悬挂点的赋值只能为 0 或 2, 否则, 若其中有赋值为 3 的点, 不妨设这个点为 v_{i1} ,

即 $f(v_{i1}) = 3$. 由双罗马控制函数的定义知: $f(v_i) = 0$, 则支撑点中除 v_i 外必然还有一个点赋值为3, 不妨设为 v_j , 即 $f(v_j) = 3$. 则 $f(v_{j1}) = 0$. 定义一个实值函数 $g : V(K_n^*) \rightarrow \{0, 2, 3\}$, 使得 $g(v_i) = 3, g(v_{i1}) = 0, g(v_j) = 0, g(v_{j1}) = 2$. 其余点的赋值与 f 相同. 显然 g 为 K_n^* 的一个双罗马控制函数, 使得 $\omega(g) < \omega(f)$ 矛盾. 同时所有的支撑点的赋值只能为0或3, 否则, 若其中有赋值为2的点, 不妨设这个点为 v_i , 即 $f(v_i) = 2$. 由双罗马控制函数的定义知: $f(v_{i1}) = 2$. 定义一个实值函数 $h : V(K_n^*) \rightarrow \{0, 2, 3\}$, 使得 $h(v_i) = 3, h(v_{i1}) = 0$, 其余点的赋值与 f 相同. 显然 h 为 K_n^* 的一个双罗马控制函数, 使得 $\omega(h) < \omega(f)$ 矛盾. 显然 $f(v_i) = 3$ 时, 有 $f(v_{i1}) = 0$. $f(v_i) = 0$ 时, 有 $f(v_{i1}) = 2$. 可以得到 K_n^* 中至少有一个点赋值为3. 假设 K_n^* 中恰好有 $1+t$ 个点赋值为3 (t 为正整数), 则 K_n^* 恰好有 $n-(1+t)$ 个点赋值为2. 则有 $\omega(f) = 3(1+t) + 2[n-(1+t)] = 2n + 1 + t \geq 2n + 1$.

2) 由图形特点可知, 每个支撑点至少关联两个悬挂点, 要使 K_n^* 的权值和最小, 只需将所有支撑点赋3, 所有悬挂点赋0即可. 所以 $\gamma_{dR}(K_n^*) = 3n$.

定理3.5 令 $M(C_n)$ 和 $M(P_n)$ 分别是 C_n 和 P_n 的中间图, 其中 $n \geq 2$.

则 $\gamma_{dR}(M(C_n)) = \gamma_{dR}(M(P_n)) = n + \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

证明 根据 $M(C_n)$ 的图形结构可知: 图中的点度分为 $deg(v) = 2$ 与 $deg(v) = 4$ 两种. 从任意一个 $deg(v) = 2$ 的点按照顺时针方向对图进行标号 v_1, v_2, \dots, v_{2n} , 如图4所示.

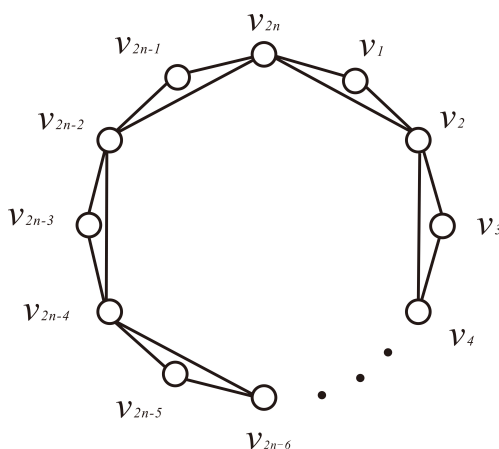


Figure 4. $M(C_n)$

图 4. $M(C_n)$

设实值函数 $f : V(M(C_n)) \rightarrow \{0, 2, 3\}$, 当 n 为偶数时, $f(v_i) = 3, i \equiv 2(mod4)$, 其余顶点赋值为0. 当 n 为奇数时, $f(v_i) = 3, i \equiv 2(mod4), f(v_{2n-1}) = 2$, 其余顶点赋值为0. 显然 f 为 $M(C_n)$ 的一个双罗马控制函数. 使得 $\gamma_{dR}(M(C_n)) \leq n + \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

反过来, 对 n 进行归纳. 假设 $g = (V_0, V_2, V_3)$ 为 $M(C_n)$ 的一个 γ_{dR} -函数. 由图形标号及特点可得: $deg(v_i) = 2, i \equiv 1(mod2), deg(v_i) = 4, i \equiv 0(mod2)$.

首先讨论 v_{2n}, v_{2n-1} 这两个点:

1) $g(v_{2n}) \in \{0, 3\}$. 否则 $g(v_{2n}) = 2$. 由双罗马控制函数的定义可知: $g(v_1) = g(v_{2n-1}) = 0$, 则有 $g(v_2) \geq 2, g(v_{2n-2}) \geq 2$. 定义实值函数 $h : V(M(C_n)) \rightarrow \{0, 2, 3\}$, 令 $h(v_{2n}) = 3, h(v_2) =$

$h(v_{2n-2}) = 0$, 其余点赋值与 g 相同, 显然 h 为 $M(C_n)$ 的一个双罗马控制函数, 使得 $\omega(h) < \omega(g)$ 矛盾.

2) $g(v_{2n-1}) \in \{0, 2\}$. 否则 $g(v_{2n-1}) = 3$. 当 n 为偶数时, 由双罗马控制函数的定义可知: $g(v_{2n}) = g(v_{2n-2}) = 0$. 定义实值函数 $h' : V(M(C_n)) \rightarrow \{0, 2, 3\}$, 令 $h'(v_{2n-1}) = 2$, 其余点赋值与 g 相同, 显然 h' 为 $M(C_n)$ 的一个双罗马控制函数, 使得 $\omega(h') < \omega(g)$ 矛盾. 当 n 为奇数时, 由双罗马控制函数的定义可知: $g(v_{2n}) = g(v_{2n-2}) = g(v_1) = g(v_{2n-2}) = 0$, 则有 $g(v_2) = 3, g(v_{2n-4}) = 3, g(v_{2n-5}) = 0$. 定义实值函数 $h' : V(M(C_n)) \rightarrow \{0, 2, 3\}$, 令 $h'(v_{2n-2}) = 3, h'(v_{2n-1}) = h'(v_{2n-4}) = 0, h'(v_{2n-5}) = 2$, 其余点赋值与 g 相同, 显然 h' 为 $M(C_n)$ 的一个双罗马控制函数, 使得 $\omega(h') < \omega(g)$ 矛盾.

其次, 考虑以下三种情况:

1) 当 $g(v_{2n}) + g(v_{2n-1}) = 3$ 时, 即 $g(v_{2n}) = 3, g(v_{2n-1}) = 0$. 显然可以得到 g 为 $M(C_{n-2})$ 的一个双罗马控制函数并且权重小于或等于 $\omega(g) - 3$. 根据归纳假设 $\gamma_{dR}(M(C_{n-2})) \geq n - 2 + \lceil \frac{n-2}{2} \rceil = n + \lceil \frac{n}{2} \rceil - 3$. 因此有 $\gamma_{dR}(M(C_n)) = \omega(g) \geq \gamma_{dR}(M(C_{n-2})) + 3 = n + \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

2) 当 $g(v_{2n}) + g(v_{2n-1}) < 3$ 时. 分为 $g(v_{2n}) = 0, g(v_{2n-1}) = 2$ 与 $g(v_{2n}) = 0, g(v_{2n-1}) = 0$. 当 $g(v_{2n}) = 0, g(v_{2n-1}) = 2$ 时, 显然可以得到 g 为 $M(C_{n-1})$ 的一个双罗马控制函数并且权重小于或等于 $\omega(g) - 2$. 根据归纳假设 $\gamma_{dR}(M(C_{n-1})) \geq n - 1 + \lceil \frac{n-1}{2} \rceil = n - 1 + \lceil \frac{n}{2} \rceil$. 因此有 $\gamma_{dR}(M(C_n)) = \omega(g) \geq \gamma_{dR}(M(C_{n-1})) + 2 = n + \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1 \geq n + \lceil \frac{n}{2} \rceil$. 当 $g(v_{2n}) = 0, g(v_{2n-1}) = 0$ 时, 显然可以得到 g 为 $M(C_{n-2})$ 的一个双罗马控制函数并且权重小于或等于 $\omega(g) - 3$. 根据归纳假设 $\gamma_{dR}(M(C_{n-2})) \geq n - 2 + \lceil \frac{n-2}{2} \rceil = n + \lceil \frac{n}{2} \rceil - 3$. 因此有 $\gamma_{dR}(M(C_n)) = \omega(g) \geq \gamma_{dR}(M(C_{n-2})) + 3 = n + \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

3) 当 $g(v_{2n}) + g(v_{2n-1}) > 3$ 时, 即 $g(v_{2n}) = 3, g(v_{2n-1}) = 2$. 定义实值函数 $h'' : V(M(C_n)) \rightarrow \{0, 2, 3\}$, 令 $h''(v_{2n}) = 3, h''(v_{2n-1}) = 0$, 其余点赋值与 g 相同, 显然 h'' 为 $M(C_n)$ 的一个双罗马控制函数, 使得 $\omega(h'') < \omega(g)$ 矛盾.

很容易得到每一个 $M(C_n)$ 的一个 γ_{dR} -函数也是 $M(P_n)$ 的一个 γ_{dR} -函数, 则对于 $M(P_n)$ 结论同样成立.

基金项目

国家自然科学基金项目(11761070, 61662079, 12071194); 2021年新疆维吾尔自治区自然基金联合项目(2021D01C078); 2020年新疆师范大学一流专业、一流课程项目资助.

参考文献

- [1] Berge, C. (1962) Theory of Graphs and Its Applications. Methuen, London.
- [2] Ore, O. (1962) Theory of Graphs. American Mathematical Society, Providence.

-
- [3] Stewart, I. (1999) Defend the Roman Empire. *Scientific American*, **281**, 136-139.
<https://doi.org/10.1038/scientificamerican1299-136>
- [4] Beeler, R.A., Haynes, T.W. and Hedetniemi, S.T. (2016) Double Roman Domination. *Discrete Applied Mathematics*, **211**, 23-29.
<https://doi.org/10.1016/j.dam.2016.03.017>
- [5] Anu, V. and Lakshmanan, S.A. (2018) Double Roman Domination Number. *Discrete Applied Mathematics*, **244**, 198-204.
<https://doi.org/10.1016/j.dam.2018.03.026>
- [6] Ahangar, H.A., Chellali, M. and Sheikholeslami, S.M. (2017) On the Double Roman Domination in Graphs. *Discrete Applied Mathematics*, **232**, 1-7.
<https://doi.org/10.1016/j.dam.2017.06.014>
- [7] 陈优. 图的双罗马控制[D]: [硕士学位论文]. 郑州: 郑州大学, 2018.
- [8] 杜良丽. 格子图的双罗马控制集[J]. 滁州学院学报, 2021, 23(2): 54-57.
- [9] Nazari-Moghaddam, S. and Volkmann, L. (2020) Critical Concept for Double Roman Domination in Graphs. *Discrete Mathematics, Algorithms and Applications*, **12**, 1-12.
<https://doi.org/10.1142/S1793830920500202>
- [10] Bonchev, D.I. and Klein, D.J. (2002) On the Wiener Number of Thorn Trees, Stars, Rings, and Rods. *Croatica Chemica Acta*, **75**, 613-620.
- [11] 刘海英, 秦琼, 王志平, 马永刚. 中间图的pebbling数[J]. 大连海事大学学报, 2006, 32(4): 125-128.